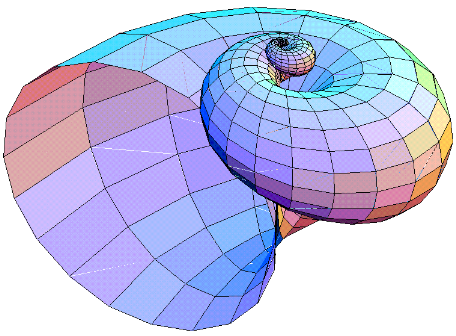
surfaces paramétrées

par … du lycée Louise Michel de Bobigny et de la MJC Daniel André de Drancy

enseignant : François Gaudel

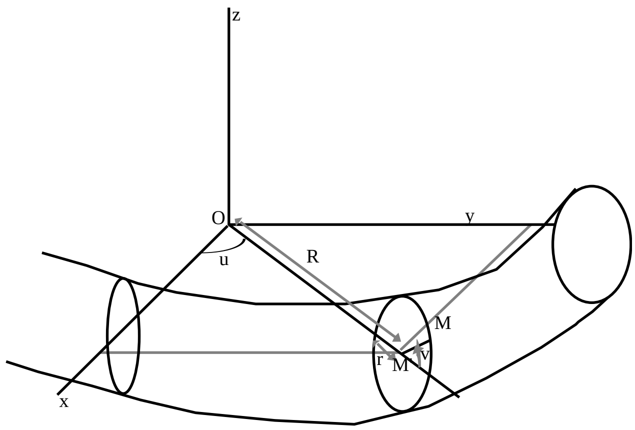
But de notre programme :

dessiner des “escargots” de formes variées, du type :



Pour obtenir ces formes, nous allons partir de l'équation d'un tore dont on peut faire varier les paramètres.

équation d'un tore



Soit un point M, st M' son projeté orthogonal dans le plan (Oxy). Le point M a alors pour coordonnées dans le plan (Oxy) :

$$x = OM' \cos u$$
$$y = OM' \sin u$$

Or : $OM' = R + r \cos v$ (voir dessin)

d'où l'équation du tore :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \\ z = r \sin v \end{array}}$$

Mais cette équation n'est pas complète si on veut obtenir un “escargot”. D'où il est nécessaire de faire croître R et r simultanément, et rajouter un terme à z qui le fait décroître au même rythme. Ainsi le tore devient un “escargot”.

$$\boxed{\begin{array}{c} x = [R(u) + r(u) \cos v] \cos u \\ y = [R(u) + r(u) \cos v] \sin u \\ z = r(u) \sin v - h(u) \end{array}}$$

R et r sont des fonctions de u ; h(u) permet de moduler la hauteur. En jouant sur les fonctions R(u), r(u) et h(u) on peut obtenir tous les “escargots” qu'on veut. [NDLC : avec ou sans bave ?]

Quand r = R, c'est-à-dire que le cercle est tangent à l'axe des z, l'équation devient :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = R(u)\,(1 + \cos v) \cos u \\ y = R(u)\,(1 + \cos v) \sin u \\ z = R(u) \sin v - h(u) \end{array}}$$

les fonctions R(u) et h(u)

On peut les faire varier linéairement : on pose

$$R(u) = u,\ h(u) = -\,u$$

ou $R(u) = k\,u,\ h(u) = -\,k'\,u.$

Cet accroissement donne des formes assez [moches ?]. A chaque tour, le rayon est augmenté de k ¥ 2 π.

C'est pourquoi on va utiliser un accroissement exponentiel :

$$R(u) = k^u,\ h(u) = -\,a\,k'^{\,u}$$

$$M\ \boxed{\begin{array}{c} x = k^u\,(1 + \cos v) \cos u \\ y = k^u\,(1 + \cos v) \sin u \\ z = k^u \sin v + \alpha\,k'^{\,u} \end{array}}$$

Ainsi définie, cette équation permet d'obtenir des formes proches des formes naturelles. A chaque tour les coordonnées sont multipliées par $k^{2\pi}$. On passe d'une boucle à la suivante par une homothétie de rapport $k^{2\pi}$.