les suites de Farey

par Mlle Nouara Machouche (2nde), Mlle Myriam Félix (2nde), Mlle Laurence Moyer (TS), M. Lionel Meunier (2nde), élèves du **lycée Paul Eluard de Saint Denis (93)**, cinq élèves de 12 à 14 ans du **collège Jean Vilar de Villetaneuse (93)**, et M. Adi Bennouda, M. Nabil Kasmi, M. Erwin Lim, M. Radouane Smati, élèves de 1°S du **lycée Jacques Feyder d'Epinay sur Seine (93)**

enseignants :
MM. Yves Alvez, Alain Huet, Nolwen Labbé-Poquet, M. Adrien Fryc, Mme Gwenola Madec, M. Marc Anquetil

chercheur :
M. François Parreau, de l'université Paris 13

coordination article : Machouche Nouara

compte-rendu de parrainage :

Qu'est-ce que la suite de Farey ? C'est une suite de fractions irréductibles ∈ [0, 1].

Qui est Farey ? Naturaliste du 18° siècle et Mystère !

But ? Trouver une meilleure approximation d'un réel x avec x ∈ [0, 1]. Ils ont établi trois conjectures qui sont devenues ensuite des propriétés (car elles ont été démontrées). Ils ont aussi établi deux programmes sur deux calculatrices différentes. Remarque : le sujet n'est pas facile à traiter, mais l'exposé effectué a été réussi en ayant quand même quelques points qui devraient être mieux expliqués afin de permettre une meilleure compréhension.

NI — Approximation par des fractions : suite de Farey. 17

Comment s'approcher le mieux possible d'un nombre arbitraire par une fraction sans utiliser de nombre entier supérieur à *N* (nombre entier fixé à l'avance) ? Quelles fractions nouvelles apparaissent lorsque qu'on augmente *N* ? Ces fractions à petits nombres interviennent naturellement dans l'animation d'images de synthèse.

Historique.

Savoir qui était FAREY ne fut pas chose facile. Nous avions seulement quelques vagues informations concernant un géologue anglais du début du XIXème siècle. M. Jean BRETTE mathématicien au *Palais de la découverte* et présent au congrès de "MATh.en.JEANS" a eu l'amabilité de nous passer des documents où apparaissait le nom de Farey avec quelques notes de commentaires. Il s'agit de documents extraits de *History of the Theory of Numbers*, volume 1, par Léonard Eugène Dickson, professeur de mathématiques à l'université de Chicago et de *An Introduction to the Theory of Numbers*, par G. H. Hardy et E. M. Wright.

Dans des notes accompagnant ces documents il est écrit que Farey fait l'objet d'une vingtaine de lignes dans le *Dictionary of national biography* et il est mentionné le commentaire suivant : comme géologue il est oublié et son biographe ne mentionne rien de lui qui passera à la postérité.

En fait Farey n'avait rien publié concernant ces suites jusqu'en 1816 où il mentionne la propriété (que nous avons appelée conjecture n°2 et démontrée) dans le *Philosophical Magazine*. Il est écrit dans les commentaires qu'il ne donna aucune démonstration et qu'il est peu probable qu'il en ait trouvé une.

Son nom est passé à la postérité à cause de Augustin Louis Cauchy qui lut son texte. Il démontra la propriété et donna le nom de suites de Farey à ces suites de fractions que nous allons vous décrire.

Bien que d'autres mathématiciens de la même époque aient travaillé de façon plus approfondie sur ces suites avant Cauchy et avant que Farey n'en parle, en particulier le mathématicien anglais C. Haros, les mathématiciens ont continué après Cauchy de les appeler :

« suites de Farey ».

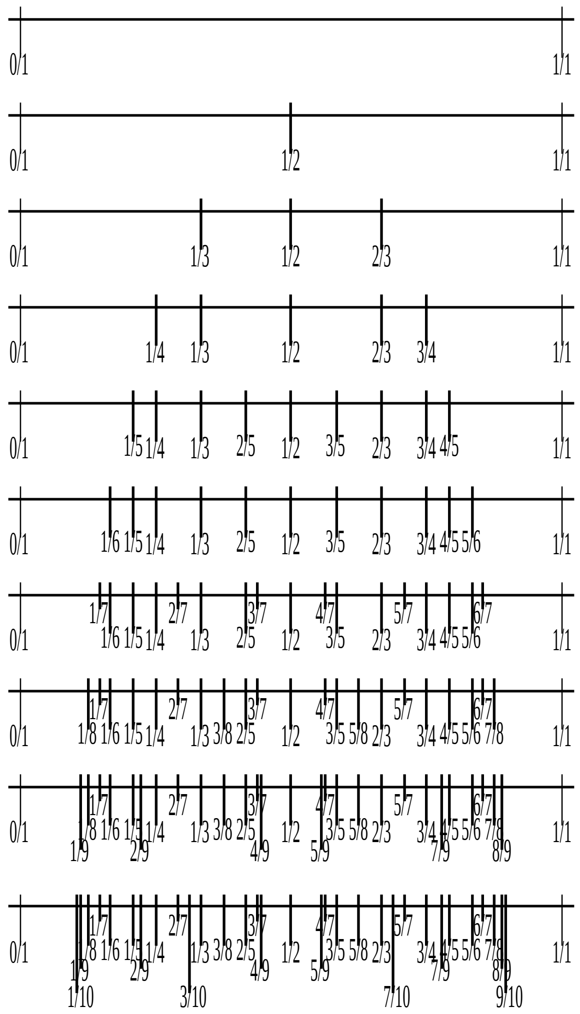
[fin du prégénérique]

Construction des suites de Farey.

Nous avons étudié comment l'intervalle [0; 1] se remplit, naturellement, avec des fractions a/b, irréductibles, a appartenant à N, et b appartenant à N*.

Pour cela nous avons utilisé la méthode suivante, qui consiste à écrire successivement des suites F_n de fractions a/b avec la première suite $F_1 = (0/1 ; 1/1)$ et F_n (n supérieur ou égal à 1) formées de fractions irréductibles, avec des dénominateurs inférieurs ou égaux à n.

Notre première étape fut de construire les suites de F_1 à F_{10}.



Par exemple, pour passer de F_3 à F_4, aux fractions de F_3 nous avons ajouté les fractions ayant le dénominateur égal à 4, irréductibles, et nous avons alors classé toutes ces fractions dans l'ordre croissant.

Conjectures.

Notre deuxième étape fut, à partir de ces dix premières suites, de tirer des conjectures.

Première conjecture :

1/2 est le centre de symétrie pour chaque suite F_n.

Deuxième conjecture :

Si deux fractions a/b et c/d se suivent dans une suite F_n avec $a/b < c/d$ alors

$$bc - ad = 1.$$

$bc - ad$ étant le numérateur de la fraction obtenue à partir de la différence des deux fractions a/b et c/d.

Exemple : dans F_7, 2/5 et 3/7 se suivent et

$$5 \times 3 - 2 \times 7 = 1$$

Troisième conjecture :

Lorsque deux fractions a/b et c/d sont consécutives dans une suite F_n, la première fraction à apparaître entre celles-ci sera

$$(a + c) / (b + d).$$

Exemple : la première fraction qui apparaît entre 1/3 et 2/5 est 3/8

Nous avons ensuite cherché à obtenir la meilleur approximation d'un réel X, $0 \leq X \leq 1$ par une fraction de F_n (n donné).

Pour $X > 1$ on effectue la meilleure approximation de X–E(X), par une fraction a/b de F_n, n donné, alors E(X) + a/b est la meilleure approximation de X par une fraction irréductible de dénominateur inférieur ou égal à n.

Pour $X < 0$, nous passons par $-X$.

Exemple : 3 + 1/7 = 22/7 est la meilleure approximation fractionnaire de π par une fraction irréductible de dénominateur inférieur ou égal à 27.

Démonstrations des conjectures.

Si nous n'avons pas eu de grandes difficultés à établir les trois conjectures il n'en fut pas de même pour arriver aux démonstrations.

Première conjecture :

“Pour tout n appartenant à N*, 1/2 est centre de symétrie de F_n.”

Pour cela nous allons établir:

• que toute fraction m/n de F_n **a** sa fraction symétrique $(n - m) / n$ par rapport à 1/2 dans F_n.

• que toute fraction m/n de F_n est la symétrique par rapport à 1/2 d'une fraction de F_n.

En effet :

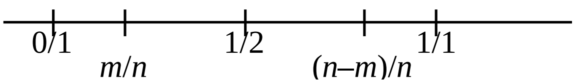
• soit m/n une fraction de F_n alors

$$1 - (m/n) = (n - m) / n$$

appartient à F_n. Car si d est un diviseur commun à $(n - m)$ et à n, alors il existe q appartenant N et q' appartenant N tels que:

$$n = dq \text{ et } n - m = dq'$$

d'où $dq - m = dq'$, c'est-à-dire $d(q - q') = m$. d est donc un diviseur commun à m et n donc $d = 1$ car m/n est irréductible. Il en résulte que $(n - m) / n$ est irréductible.



• réciproquement :

Si m/n est une fraction F_n alors elle est l'image par la symétrie de centre 1/2 de la fraction $(n - m) / n$ qui est dans F_n.

[NDLR : bien sûr, si $(n - m) / n$ est symétrique de m/n, alors m/n est symétrique de $(n - m) / n$ … ce n'est pas propre à cette conjecture.]

Deuxième et troisième conjectures :

“Si a/b et c/d sont deux fractions consécutives dans une suite F_n avec $a/b < c/d$ alors

$$bc - ad = 1$$

et $(a + c) / (b + d)$ est la PREMIERE fraction à apparaître entre a/b et c/d.”

1) Soit a/b et c/d deux fractions consécutives d'une suite F_n avec $a/b < c/d$ et $bc - ad = 1$ alors :

$$a/b < (a + c) / (b + d) < c/d$$

car :

$$(a + c) / (b + d) - a/b = 1 / \big(b(b + d)\big) > 0$$
$$c/d - (a + c) / (b + d) = 1 / \big(d(b + d)\big) > 0$$

et $(a + c) / (b + d)$ est irréductible car :

$$b(a + c) - a(b + d) = bc - ad = 1$$

donc si $a + c$ et $b + d$ ont un diviseur commun, ce diviseur commun divise 1, il est donc égal à 1.

2) Quelle que soit la fraction irréductible m/n telle que $a/b < m/n < c/d$ il existe des entiers naturels q, r non nuls tels que :

$$L_1 : m = qa + rc \text{ et } L_2 : n = qb + rd$$

En effet, faisant $cL_2 - dL_1$ nous obtenons :

$$nc - md = q(bc - ad) = q$$
$$q > 0 \text{ car } m/n < c/d$$

q est un entier car n, c, m, d sont des entiers.

De même $bL_1 - aL_2$ donne :

$$mb - na = r(bc - ad) = r$$
$$r > 0 \text{ car } a/b < m/n$$

r est un entier car m, b, n, a sont des entiers.

Il en résulte que $(a + c) / (b + d)$ est la première fraction à apparaître entre a/b et c/d car $qb + rd > b + d$ puisque q, r, b, d, sont des entiers positifs non nuls.

3) a) Dans la suite $F_1 = (0/1 ; 1/1)$

$$1 \times 1 - 0 \times 1 = 1$$

b) Si dans une suite F_n dès que deux fractions a/b et c/d avec $a/b < c/d$ sont consécutives on a : $bc - ad = 1$ alors, dans F_{n+1}, si s/t et u/v sont deux fractions **consécutives** avec $s/t < u/v$:

• soit s/t ***et*** u/v sont déjà dans F_n et nous avons $tu - sv = 1$

• soit s/t **ou** u/v **n'**est **pas** dans F_n.

Si par exemple s/t **n'est pas dans** F_n alors il existe deux fractions consécutives a/b et c/d de F_n telles que $a/b < s/t < c/d$. D'après 2), il existe des entiers naturels non nuls q, r tels que $s/t = (qa + rc)/(qb + rd)$
avec $n + 1 = \mathrm{t} = qb + rd$

Or d'après 2) $(a + c) / (b + d)$ est la **première** fraction à apparaître entre a/b et c/d, nous obtenons donc :

$$n + 1 = qb + rd \geq b + d \geq n + 1.$$

Il en résulte $qb + rd = b + d$ puis $q = r = 1$. Ceci entraîne que $s/t = (a + c) / (b + d)$ et que c'est la **seule** fraction dans F_{n+1} comprise entre a/b et c/d, d'où $u/v = c/d$.

Nous arrivons donc à :

$$\begin{aligned} tu - sv &= (b + d)c - (a + c)d \\ &= bc - ad \\ &= 1 \text{ car } a/b \text{ et } c/d \text{ sont} \\ &\qquad \text{consécutives dans } F_n. \end{aligned}$$

De même si u/v **n'est pas dans** F_n il existe deux fractions consécutives a/b et c/d dans $F_n$telles que $a/b < u/v < c/d$ et un raisonnement identique au précédent conduit à $u/v = (a + c) / (b + d)$ et $s/t = a/b$, puis

$$\begin{aligned} tu - sv &= b(a + c) - a(b + d) \\ &= bc - ad \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc dans F_{n+1} dès que deux fractions a/b et c/d sont consécutives nous avons $bc - ad = 1$.

c) Cela étant vrai dans F_1 sera donc vrai dans F_2, puis dans F_3, puis dans F_4 donc pour toute suite F_n, n appartenant à N*.

Meilleure approximation d'un nombre réel x, $0 \leq x \leq 1$, **par une fraction de** F_n, n **donné**.

Pour mettre en place le procédé d'approximation nous allons d'abord montrer la **propriété** suivante :

Soient a/b et c/d deux fractions consécutives dans une suite F_n, avec $a/b < c/d$ (donc $bc - ad = 1$), alors quels que soient les réels positifs q et r, non tous les deux nuls :

$$a/b \leq (qa + rc)/(qb + rd) \leq c/d$$

En effet :

1)
$(qa + rc)/(qb + rd) - a/b = r/\big(b\ (qb + rd)\big) \geq 0$

2)
$c/d - (qa + rc)/(qb + rd) = q/\big(d\ (qb + rd)\big) \geq 0$

car, pour 1) :

$(qa + rc)/(qb + rd) - a/b$
$= \big((qa + rc)\mathrm{b} - \mathrm{a}(qb + rd)\big) / \big(b(qb + rd)\big)$
$= \big((bqa + rcb) - (aqb + ard)\big) / \big(b(qb + rd)\big)$
$= (rcb - rad) / \big(b(qb + rd)\big)$
$= r(bc - ad)/ \big(b(qb + rd)\big)$
$= r / \big(b(qb + rd)\big)$ car $bc - ad = 1$

Nous procédons de la même manière pour 2).

[NDLC : N* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, autant dire les entiers strictement positifs au lieu d'écrire « n appartenant à N* » ils auraient pu mettre simplement « n entier strictement positif ».]

Procédé pour obtenir la meilleure approximation fractionnaire d'un réel X, $0 \le X \le 1$.

Cela consiste lorsque X est encadré par deux fractions consécutives a/b et c/d dans une suite de Farey F_p, $1 \le p \le n$, à faire apparaître la première fraction qui est comprise entre a/b et c/d dans une suite de Farey, c'est-à-dire $(a + c) / (b + d)$.

Ce qui permet à chaque étape de diminuer l'encadrement et d'obtenir deux nouvelles fractions consécutives encadrant X. Ceci tant que $b + d \le n$, F_n étant la suite dans laquelle nous voulons déterminer la meilleure approximation fractionnaire de X.

Si $X = 0$ ou $X = 1$

0/1 ou 1/1 sont respectivement les meilleures approximations.

Si $0 < X < 1$:

$$X = (1 - X) \times 0 + X \times 1$$
$$1 = (1 - X) \times 1 + X \times 1$$

Posons $q_1 = 1 - X$ et $r_1 = X$, nous obtenons :

$$X/1 = (q_1 \times 0 + r_1 \times 1)/(q_1 \times 1 + r_1 \times 1)$$

Premier cas : si $q_1 > r_1$ nous pouvons alors écrire :

$$X/1 = \big((q_1 - r_1) \times 0 + r_1 \times (0+1)\big) \,/\, \big((q_1 - r_1) \times 1 + r_1 \times (1+1)\big)$$

En posant :

$q_2 = q_1 - r_1$ et $r_2 = r_1$, q_2 et r_2 étant positifs nous en déduisons :

$$0/1 \le X \le 1/2.$$

Deuxième cas : si $q_1 < r_1$ nous pouvons écrire :

$$X/1 = \big((q_1 \times (0+1) + (r_1 - q_1) \times 1\big) \,/\, \big(q_1 \times (1+1) + (r_1 - q_1) \times 1\big)$$

En posant :

$q_2 = q_1$ et $r_2 = (r_1 - q_1)$, q_2 et r_2 étant positifs nous en déduisons :

$$1/2 \le X \le 1.$$

A l'étape suivante en comparant q_2 à r_2 comme nous l'avons fait avec q_1 et r_1 nous ferons apparaître soit la fraction 1/3 dans le premier cas, soit la fraction 2/3 dans le second cas. Nous continuons ainsi tant que la somme des dénominateurs ne dépasse pas n.

Si à une étape p nous avons $q_p = r_p$ alors $X = (a + c) / (b + d)$: $(a + c) / (b + d)$ est alors la meilleure approximation fractionnaire.

••••••••••••••• Annexes.

Programme sur CASIO fx 7000 G, fx 7800, fx 8000 permettant d'obtenir la meilleure approximation fractionnaire d'un réel X dans une suite de Farey F_n, n entier naturel donné non nul.

"N=" : ?→N : "X=" : ?→ X : 0→A : 1→B : 1→C : 1→D : 1–X→Q :

X→R : LBL 0 : B+D>N⇒GOTO 2 : R>Q⇒GOTO 1 : Q–R→Q :

R→R : A→A : B→B : A+C→C : B+D→D : GOTO 0 : LBL 1 :

B+D>N⇒GOTO 2 : Q→Q : R–Q→R :

A+C→A : B+D→B : C→C : D→D : GOTO 0 : LBL 2 :

X–A÷B≤C÷D–X⇒GOTO 3 : "C=" : C ⊂

"D=" : D ⊂

LBL 3 : "A=" : A ⊂

"B=" : B ⊂

••••••••••••••

Programme sur TI 80, TI 81, TI 82, TI 85 permettant d'obtenir la meilleure approximation fractionnaire d'un réel *X*, avec $0 \leq X \leq 1$ dans une suite de Farey F_n, *n* entier naturel donné non nul.

```
DISP"N="
INPUT N
DISP"X="
INPUT X
0→A
1→B
1→C
1→D
1–X→Q
X→R
Lbl ∅
If B+D >N
GOTO 2
If R >Q
GOTO 1
Q–R→Q
R→R
A→A
B→B
A+C→C
B+D→D
GOTO ∅
Lbl 1
If B+D >N
GOTO 2
Q→Q
R–Q→R
A+C→A
B+D→B
C→C
D→D
GOTO ∅
Lbl 2
If X– A/B ≤ C/D –X
GOTO 3
Disp "C="
Disp C
PAUSE
Disp "D="
Disp D
PAUSE
Lbl 3
Disp "A="
Disp A
PAUSE
Disp "B="
Disp B
Pause
```

REMARQUES :

1) $A \div B$ est la fraction approchée par défaut du réel *X* ; $C \div D$ est la fraction approchée par excès.

2) Pour un réel *X* n'appartenant à l'intervalle [0 ; 1], nous utilisons $X - E(X)$ pour $X > 1$, et pour $X < 0$ nous passons par $-X$.

Exemple : soit $X = \pi$.

Pour $n = 27$,

$3 + 1/7 = 22/7$ est la meilleure approximation fractionnaire de π.

Pour $n = 50$,

$3 + 1/7 = 22/7$ est la meilleure approximation fractionnaire de π.

Pour $n = 100$,

$3 + 14/99 = 311/99$ est la meilleure approximation fractionnaire de π.

Pour $n = 300$,

$3 + 16/113 = 355/113$ est la meilleure approximation fractionnaire de π.

Pour $n = 1000$,

$3 + 16/113 = 355/113$ est la meilleure approximation fractionnaire de π.

Remarque : 355/113 donne π avec les six premières décimales exactes.