SUITES DE FAREY

Année 2014-2015

Cléa Drobinski et Maiwenn Beucher, élèves de 4ème

Encadrés par Mme Béasse et Mme Boillot

Établissement : Collège Saint Pierre, Plouha.
Ce sujet a été traité avec des collégiens et des lycéens du lycée Saint Magloire de Dol De Bretagne.
Cet article est un bilan de ce qu'ont trouvé les collégiens de Plouha uniquement.

Chercheur : Victor Kleptsyn, CNRS, Université de Rennes 1.

Sommaire

Cléa et Maiwenn sur leur stand lors du Congrès à Angers

A) Présentation du sujet

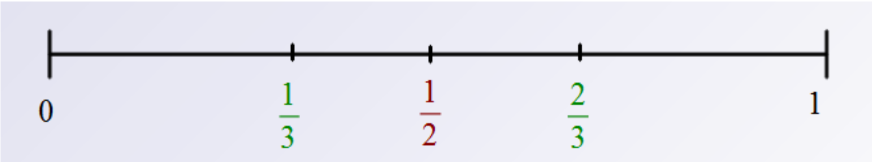
Notre recherche porte sur les suites de Farey.

Qu'est-ce qu'une suite de Farey ?

- On choisit un nombre D qui sera le dénominateur maximal autorisé.
- On écrit toutes les fractions dont le dénominateur n'excède pas D et dont le numérateur est inférieur au dénominateur. Ainsi toutes les fractions sont comprises entre $\frac{1}{D}$ et $\frac{D-1}{D}$.
- On place ces fractions sur un segment [0 ; 1] afin de les ordonner.

L'ensemble de toutes ses fractions forment la série de Farey d'ordre D.

Concrètement ici d'ordre 3.



Sur ce segment (gradué de 0 à 1), on prend un dénominateur maximal D=3. Les fractions à placer sont donc $\frac{1}{2}$ (égal a la moitié du segment) ainsi que $\frac{1}{3}$ (qui s'insère entre 0 et $\frac{1}{2}$) et $\frac{2}{3}$ (qui s'insère entre $\frac{1}{2}$ et 1).

Pour écrire la suite de Farey d'ordre suivant : D+1, on place toutes les fractions de la suite d'ordre D et on ajoute les fractions dont le dénominteur est D+1.

Concrètement : Pour la suite de Farey d'ordre 4, en plus des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, et $\frac{2}{3}$ qui sont celles de la suite d'ordre 3, on doit placer $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$, mais on ne replace pas les fractions réductibles. Donc $\frac{2}{4}$, qui est égal à $\frac{1}{2}$, ne se replace pas.

Finalement, étudier les séries de Farey, c'est mettre de l'ordre dans les fractions ; on range les fractions sur le segment [0 ; 1].

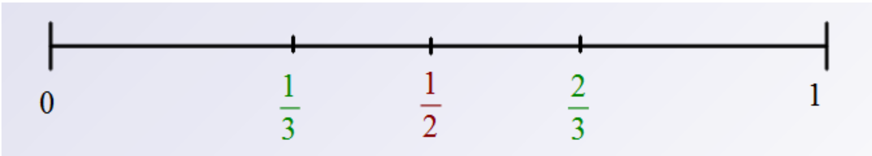
Jusque l'ordre 4, ce n'est pas très difficile, mais dès l'ordre 5, on voit surgir une difficulté : placer $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ ne pose pas de problème. En effet, $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$ et $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$ mais où placer $\frac{2}{5}$? Entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$? Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$? Pas évident !

Et lorsqu'on sera à l'ordre 17 par exemple, ou à l'ordre 359, comment savoir où placer les fractions les unes par rapport aux autres ?

Voici la question posée par notre chercheur Victor Kleptsyn

« Si on a, sur un segment (gradué de 0 à 1), les fractions de Farey d'ordre D, et que l'on veut passer à celles d'ordre D+1, comment vont s'insérer les fractions de dénominateur D+1 ?
Pour répondre à cette question, vous aurez besoin de chercher ce que vaut la différence entre deux fractions consécutives de Farey. »

Explication de la question de Victor Kleptsyn à partir de la suite de Farey d'ordre 3



Où placer les fractions d'ordre supérieur D=4, qui sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Que vaut la différence entre 0 et $\frac{1}{3}$? entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$? entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$? entre $\frac{2}{3}$ et 1 ?

<u>B) Nos conjectures et résultats obtenus</u>

Conjecture 1 Il semble que lorsqu'on fait le produit des dénominateurs de deux fractions de Farey consécutives, on trouve le dénominateur de la différence entre ces deux fractions. Il semble que le numérateur fasse toujours 1.
Autrement dit, la différence entre 2 fractions de Farey $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ semble donc être $\frac{1}{bd}$.

2/ Placement « sur les bords » : on a démontré que la fraction $\frac{1}{D+1}$ se placera entre 0 et la fraction $\frac{1}{D}$.
De plus on a démontré que la différence entre les fractions $\frac{1}{D}$ et $\frac{1}{D+1}$ est bien, comme le laissait penser la conjecture 1/, $\frac{1}{D\times(D+1)}$.

Conjecture 3
Plus généralement, on a remarqué que lorsqu'une fraction de Farey s'insère entre 2 autres, la somme des dénominateurs des deux fractions déjà placées donne le dénominateur de la fraction qui s'insère. Il semble que cela fasse pareil pour les numérateurs : la somme des numérateurs des deux fractions déjà placées donne le numérateur de la fraction qui s'insère.
Autrement dit :
Il semble que lorsqu'une fraction de Farey $\frac{e}{f}$ s'insère entre 2 autres $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, alors $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$.

4/ On a démontré que si la conjecture sur la différence entre deux fractions est vraie (conjecture 1/), alors la conjecture sur le placement des fractions (conjecture 3/) est vraie.

<u>C) Comment les conjectures ont été élaborées ; comment les démonstrations ont été faites</u>

<u>1/ Conjecture sur la différence</u>

On a émis une conjecture pour trouver la différence entre deux fractions consécutives de Farey. *Il semble que lorsqu'on fait le produit des dénominateurs de deux fractions consécutives, on trouve le dénominateur de la différence. Il semble que le numérateur fasse toujours 1.*

<u>Voici comment nous avons trouvé cette conjecture:</u>
Si on calcule normalement la différence entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$, en mettant au même dénominateur les deux fractions, on trouve :

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3\times 3}{4\times 3} - \frac{2\times 4}{3\times 4}$$

$= \dfrac{9}{12} - \dfrac{8}{12}$

$= \dfrac{1}{12}$. On remarque que c'est $\dfrac{1}{4\times 3}$

C'est en faisait des exemples comme celui-ci, que nous avons émis notre conjecture. Bien sûr ce n'est qu'une conjecture, nous ne l'avons pas démontré.

2/ Démonstration du placement des fractions « sur le bord » et de la distance entre ces fractions

Si on a placé toutes les fractions de Farey d'ordre D, la fraction placée la plus à gauche sur [0 ; 1] est la fraction $\dfrac{1}{D}$. Si on veut placer les fractions de Farey de dénominateurs D+1, les fractions à placer seront $\dfrac{1}{D+1}$, $\dfrac{2}{D+1}$, et ainsi de suite, jusque $\dfrac{D}{D+1}$. La plus petite d'entre elles est la fraction $\dfrac{1}{D+1}$. Elle se placera entre 0 et la fraction $\dfrac{1}{D}$.

En effet, puisque D < D+1 , on a $\dfrac{1}{D} > \dfrac{1}{D+1}$ (plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite)

De plus, la différence entre ces deux fractions est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{D}-\frac{1}{D+1} &= \frac{1\times(D+1)}{D\times(D+1)}-\frac{1\times D}{(D+1)\times D}\\ &= \frac{D+1-D}{D\times(D+1)}\\ &= \frac{1}{D\times(D+1)}\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que la différence entre ces deux fractions consécutives de Farey a pour numérateur 1 et que son dénominateur est le produit des dénominateurs des deux fractions.

3/ a/ Elaboration de la conjecture 3.

Rappel de cette conjecture 3 :

Il semble que lorsqu'une fraction de Farey $\dfrac{e}{f}$ s'insère entre 2 autres $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $\dfrac{e}{f}=\dfrac{a+c}{b+d}$

Nous avons découvert une particularité qui nous a semblé étonnante dans le placement des fractions.

$\dfrac{1}{5}$ Se place entre 0 et $\dfrac{1}{4}$ avec 0= $\dfrac{0}{1}$ car $\dfrac{1}{5}$ = 0,2 et $\dfrac{1}{4}$ = 0,25

Eh bien $\dfrac{0+1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{2}{5}$ se place entre $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{1}{3}\approx 0{,}66$ et $\dfrac{1}{2}$ =0,5 alors que $\dfrac{2}{5}$ = 0,4.

De même pour les fractions $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{4}{5}$.

On a cherché à savoir si ce n'était qu'une particularité de l'ordre 5, ou si cette façon d'obtenir le placement des fractions marchait toujours.

A l'ordre 6, il y a peu de fractions à placer, car la moitié sont réductibles, mais notre conjecture fonctionne.

A l'ordre 7 :

$\frac{1}{7}$ est entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{6}$ or $\frac{0+1}{1+6}$; $\frac{2}{7}$ est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ or $\frac{1+1}{4+3}$;
$\frac{3}{7}$ est entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ or $\frac{2+1}{5+2}$; $\frac{4}{7}$ est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{5}$ or $\frac{1+3}{2+5}$;
$\frac{5}{7}$ est entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ or $\frac{2+3}{3+4}$; $\frac{6}{7}$ est entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{1}$ or $\frac{5+1}{6+1}$.

ATTENTION: Ce ne sont pas des additions de fractions, mais des additions de numérateurs entre eux et de dénominateurs entre eux.

De ces constations, nous avons émis la conjecture :
Il semble que la somme des dénominateurs des deux fractions de Farey déjà placées donne le dénominateur de la fraction qui s'insère entre elles. De même, il semble que cela fasse pareil pour les numérateurs : la somme des numérateurs des deux fractions déjà placées donne le numérateur de la fraction qui s'insère entre elles.
Autrement dit :

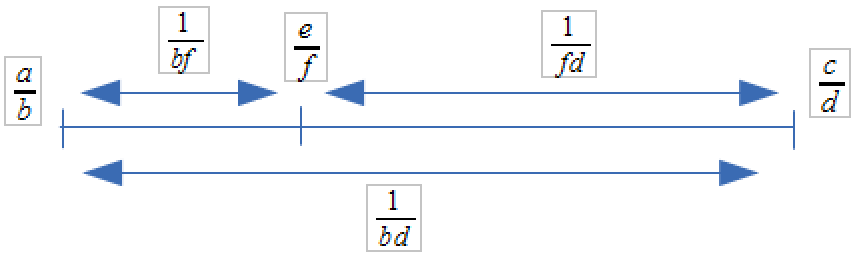
Il semble que lorsqu'une fraction de Farey $\frac{e}{f}$ *s'insère entre 2 autres* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *, alors* $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$

<u>b/ Travail de démonstration </u>:

Nous n'avons pas totalement démontré cette conjecture. Mais nous avons démontré que si la conjecture 1/ est vraie, alors cette conjecture 3/ est vraie. Voici comment :

<u>b.1 Pour le dénominateur</u>

Nous nous sommes d'abord intéressé aux dénominateurs pour tenter de démontrer que lorsqu'une fraction s'insère entre 2 autres, la somme des dénominateurs des deux fractions déjà placées donne le dénominateur de la fraction qui s'insère.



- Si notre première conjecture est vraie, celle concernant la différence entre deux fractions consécutives, alors $\frac{e}{f}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bf}$, $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}$ et $\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{1}{fd}$

- On peut remarquer que la différence entre les fractions, c'est géométriquement la distance entre entre ces deux fractions.

- Puisque les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ sont alignés dans cet ordre, la somme des distances entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{e}{f}$ et entre $\frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ donne la distance entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On obtient donc l'égalité suivante :

$$\frac{1}{bf}+\frac{1}{fd}=\frac{1}{bd}$$

On met les fractions au même dénominateur.

$\frac{1 \times d}{bf \times d}$ + $\frac{1 \times b}{fd \times b}$ = $\frac{1 \times f}{bd \times f}$

$\frac{d}{bfd}$ + $\frac{b}{bfd}$ = $\frac{f}{bfd}$

On utilise la distributivité.

$bfd \times (\frac{d}{bfd} + \frac{b}{bfd})$ = $(\frac{f}{bfd}) \times bfd$

$d + b = f$

Nous avons démontré notre deuxième conjecture : lorsqu'une fraction s'insère entre deux autres, la somme des dénominateurs des deux fractions donnent le dénominateur de la fraction qui s'insère.

b.2 Pour le numérateur

Nous savons maintenant que, si la conjecture 1/ est vraie, on est certain que le dénominateur f de la fraction $\frac{e}{f}$ qui s'insère entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est $f = b + d$.

Nous allons maintenant démontrer que, dans ces conditions, son numérateur e est égal à $a + c$.

Calculons la différence entre la fraction qui s'insère $\frac{e}{b+d}$ et la fraction de gauche $\frac{a}{b}$:

$$\frac{e}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{e \times b}{(b+d) \times b} - \frac{a \times (b+d)}{b \times (b+d)}$$ (On a réduit au même dénominateur)

$$= \frac{e \times b - a \times (b+d)}{(b+d) \times b}$$

Et, d'après la conjecture 1, on a aussi $\frac{e}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{(b+d) \times b}$

Donc

$$\frac{e \times b - a \times (b+d)}{(b+d) \times b} = \frac{1}{(b+d) \times b}$$

Dans cette égalité de fractions, les dénominateurs sont les mêmes, donc nécessairement, les numérateurs sont égaux.

On en déduit que $e \times b - a \times (b+d) = 1$

Calculons maintenant la différence entre la fraction de droite $\frac{c}{d}$ et la fraction qui s'insère $\frac{e}{b+d}$:

$$\frac{c}{d} - \frac{e}{b+d} = \frac{c \times (b+d)}{d \times (b+d)} - \frac{e \times d}{(b+d) \times d}$$ (On a réduit au même dénominateur)

$$= \frac{c \times (b+d) - e \times d}{(b+d) \times d}$$

Et, d'après la conjecture 1, on a aussi $\frac{c}{d} - \frac{e}{b+d} = \frac{1}{(b+d) \times d}$

Donc $\frac{c \times (b+d) - e \times d}{(b+d) \times d} = \frac{1}{(b+d) \times d}$

Dans cette égalité de fractions, les dénominateurs sont les mêmes, donc nécessairement, les numérateurs sont égaux.

On en déduit que $c \times (b+d) - e \times d = 1$

Puisque $e \times b - a \times (b+d) = 1$ et $c \times (b+d) - e \times d = 1$, on en déduit que

$e\times b-a\times(b+d)=c\times(b+d)-e\times d$

On transpose $-e\times d$ de l'autre côté du égal.
$e\times b+e\times d-a\times(b+d)=c\times(b+d)$

On factorise par e le début de l'équation.
$e\times(b+d)-a\times(b+d)=c\times(b+d)$

On factorise par $(b+d)$.

$(b+d)\times(e-a)=c\times(b+d)$

On divise les deux membres par $(b+d)$.
$e-a=c$

On ajoute $+a$ à chaque membre de l'équation.
$e=a+c$

Nous savons maintenant que, si la conjecture 1/ est vraie, on est certain que le numérateur e de la fraction $\frac{e}{f}$ qui s'insère entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est $e=a+c$.

<u>D/ Conclusion</u>

Finalement, nous avons donc démontré que, *s'il est vrai que la différence entre deux fractions successives de Farey est de la forme « 1 sur le produit des dénominateurs », alors la fraction* $\frac{e}{f}$ *qui s'insère entre 2 autres* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *est* $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$.

Victor Kleptsyn, notre chercheur, nous a donné des références historiques intéressantes sur les suites de Farey. Tout d'abord, ce nom « Suite de Farey » vient d'un géologue britannique, Sir John Farey, qui ne fit « que » conjecturer, en 1816, cette propriété étudiée. Voici un extrait d'un article dans lequel il fait mention de cette conjecture.
On a curious Property of vulgar Fractions.
By Mr. J. Farey, Sen. To Mr. Tilloch

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it; although, perhaps, not in its lowest terms.

Le grand mathématicien Cauchy lut cette lettre et démontra cette propriété, sans avoir remarqué qu'en fait, c'est un autre mathématicien, français, le citoyen Charles Haros, qui publia le premier une démonstration de cette propriété en 1802, démonstration que l'on trouve dans le journal de Polytechnique, au mois Messidor de l'an X.