

La spirale d'Ulam

- Noms et prénoms des élèves, niveau : DELMAS Lucie, LACAZE Elise, MANHES Anaïs et TRIN Léa, élèves de terminale scientifique
- Etablissement : Lycée Emile DUCLAUX
- Enseignants : Fabrice LALLEMAND, Alexandre ROCQ
- Chercheur : Dominique MANCHON de l'université Blaise PASCAL de Clermont Ferrand
- Année : 2016-2017

Ce sujet repose sur l'étude d'un objet mathématique créé par le mathématicien Stanisław Marcin Ulam : la spirale d'Ulam. La construction de cette spirale se fait en enroulant les entiers naturels dans les sens des aiguilles d'une montre, puis en mettant en évidence les nombres premiers. On peut alors rapidement observer que les nombres premiers ont une tendance à s'aligner sur certaines diagonales. Le but du sujet est de comprendre l'origine de ces alignements.

7	8	9
6	1	2
5	4	3

Figure 1 : Construction de la spirale d'Ulam

Définition : Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs.

Nous avons obtenus plusieurs résultats :

- Une méthode efficace pour parvenir à coder la spirale
- Une méthode pour déterminer les polynômes à l'origine des termes de chaque diagonale de la spirale
- Une étude expérimentale de la proportion de nombres premiers donnée par des polynômes du second degré

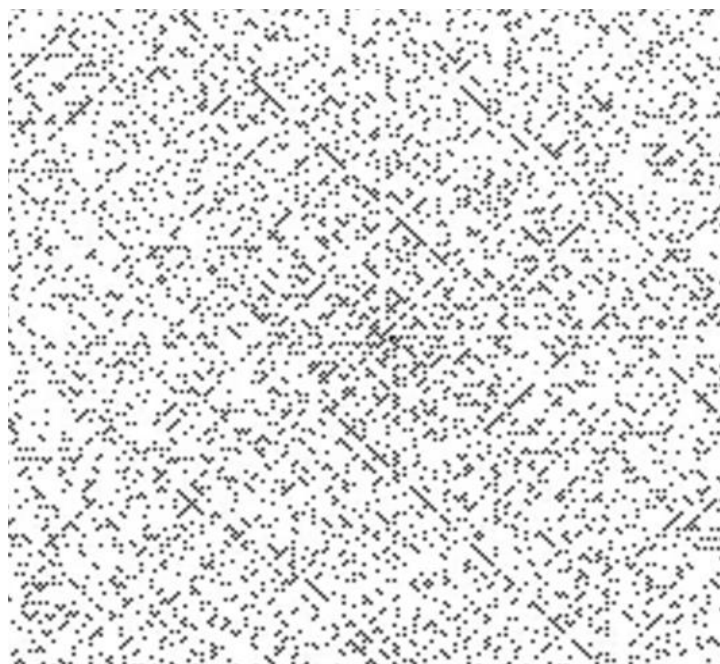


Figure 2 : Visualisation de l'alignement des nombres premiers sur la spirale

I- Prérequis : Le repérage sur la spirale :

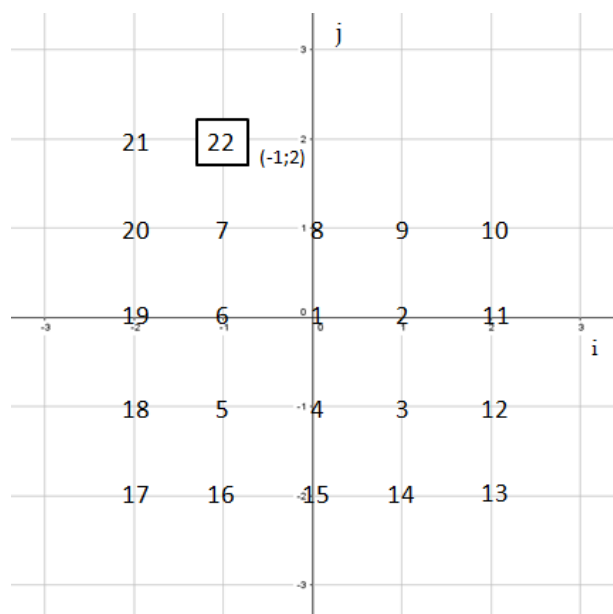


Figure 3 : Se repérer sur la spirale

On repère chaque entier naturel n sur notre spirale par ses coordonnées i et j sur la spirale. Par exemple, le nombre 22 est repéré : 22 (-1 ; 2).

II- Coder la spirale :

Pour mieux visualiser l'alignement des nombres premiers sur la spirale, nous avons commencé par la coder. Cette démarche nous a aussi permis d'étudier l'enroulement et ainsi d'effectuer plus facilement nos démonstrations par la suite.

Nous avons mis au point une méthode dont nous allons décrire le fonctionnement.

▪ Description de la méthode :

: Entrer A un entier définissant le nombre d'enroulements

: n prend la valeur 1

: i et j prennent la valeur 0

: Pour k variant de 1 à A faire :

 : si $i = j$ faire :

 : n prend la valeur $n+1$

 : i prend la valeur $i+1$

 : si n est premier, l'afficher aux coordonnées (i ; j)

 : tant que $|i| \geq |j|$ (1)

 : n prend la valeur $n+1$

 : j prend la valeur $j-1$

 : si n est premier, l'afficher aux coordonnées (i ; j)

 : tant que $|i| \leq |j|$:

 : n prend la valeur $n+1$

 : i prend la valeur $i-1$

 : si n est premier, l'afficher aux coordonnées (i ; j)

 : tant que $|i| \geq |j|$:

 : n prend la valeur $n+1$

 : j prend la valeur $j+1$

 : si n est premier, l'afficher aux coordonnées (i ; j)

 : tant que $i = j$:

 : n prend la valeur $n+1$

 : i prend la valeur $i+1$

 : si n est premier, l'afficher aux coordonnées (i ; j)

: Afficher la spirale

On change de « tour »

On descend jusqu'à la diagonale d'équation : $i = -j$

On décale jusqu'à la diagonale d'équation : $-i = -j$

On remonte jusqu'à la diagonale d'équation : $-i = j$

On décale jusqu'à la diagonale d'équation : $i = j$

III-Trouver les équations donnant chaque terme en fonction des ses coordonnées :

Pour comprendre la présence plus ou moins grande de nombres premiers sur chaque diagonale, nous avons tenté de trouver des équations donnant chaque terme de la spirale en fonction de ses coordonnées.

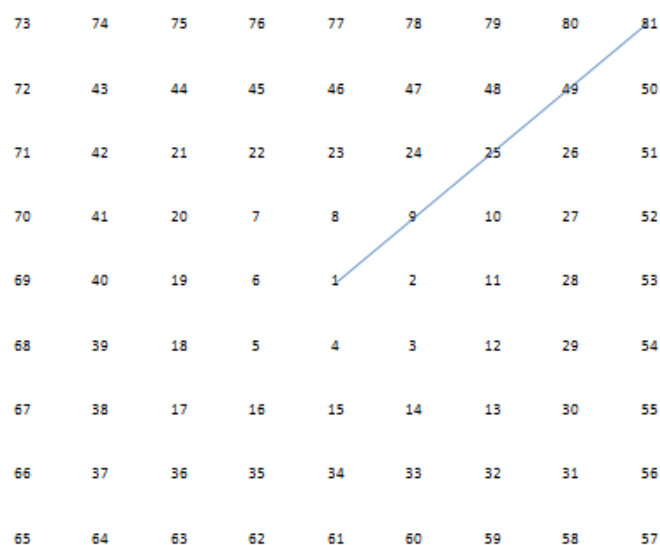


Figure 4 : La demi-diagonale d'équation $i = j$

Notre première démarche a été de conjecturer l'expression de chaque terme de la diagonale indiquée ci-dessus. On l'appellera diagonale d'équation $i=j$. On observe que les termes de cette diagonale sont les suivants $1(0 ; 0)$, $9(1 ; 1)$, $25(3 ; 3)$... On conjecture donc naturellement que chaque terme de la diagonale peut s'écrire sous la forme :

$$n_i = (2i + 1)^2 \text{ avec } i \text{ l'abscisse du terme } n$$

Pour démontrer cette conjecture, on commence par trouver une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation qui lie le terme n_i au terme n_{i+1} , sachant que le terme noté n_i est le terme d'abscisse i sur la diagonale $i=j$ (2).

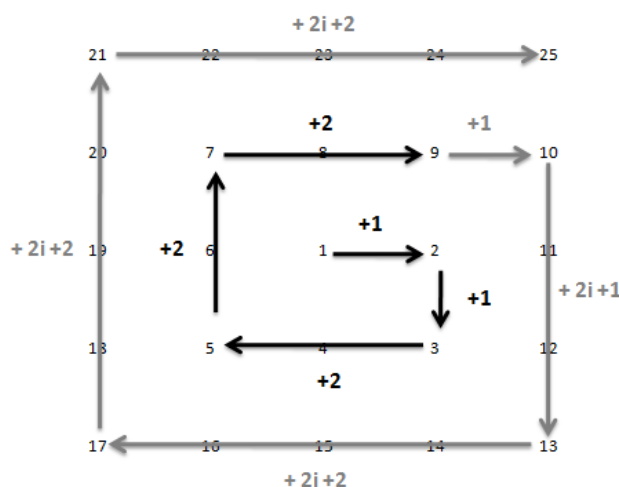


Figure 5 : trouver une formule de récurrence

En étudiant l'enroulement, on trouve facilement la relation suivante :

$$n_{i+1} = n_i + 8i + 8$$

En utilisant la formule de récurrence démontrée précédemment, montrons que tous les termes de la demi-équation étudiée peuvent s'écrire sous la forme $n_i = (2i + 1)^2$.

▪ **Démonstration par récurrence :**

Initialisation : pour $i=0$, on a $n_0 = 1$ et $(2 \cdot 0 + 1)^2 = 1$

La propriété est donc vraie pour $i = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel p , c'est à dire : $n_p = (2p + 1)^2$

Montrons que, par conséquent, elle est encore vraie au rang $p+1$, c'est à dire :

$$n_{p+1} = (2(p + 1) + 1)^2$$

$$\text{On a : } n_{p+1} = n_p + 8p + 8$$

$$= 4p^2 + 4p + 1 + 8p + 8$$

$$= 4p^2 + 12p + 9$$

$$= (2p + 3)^2 = (2(p + 1) + 1)^2$$

Conclusion : La propriété est vraie pour $i=0$ et nous avons montré que si elle était vraie pour un certain entier naturel i , alors elle était vraie pour $i+1$, donc, par application du principe de récurrence, tous les nombres de la demi-diagonale $i=j$ peuvent s'écrire sous la forme $n_i = (2i + 1)^2$.

A partir de la diagonale d'équation $i=j$ nous pouvons trouver les équations des autres diagonales.

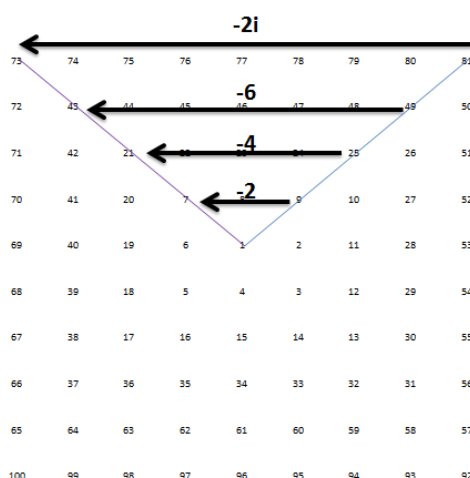


Figure 6 : Dédurre les équations de chaque diagonale

On peut donc, par cette méthode déduire chacune des quatre demi-diagonales principales de la spirale. On obtient une situation quadratique :

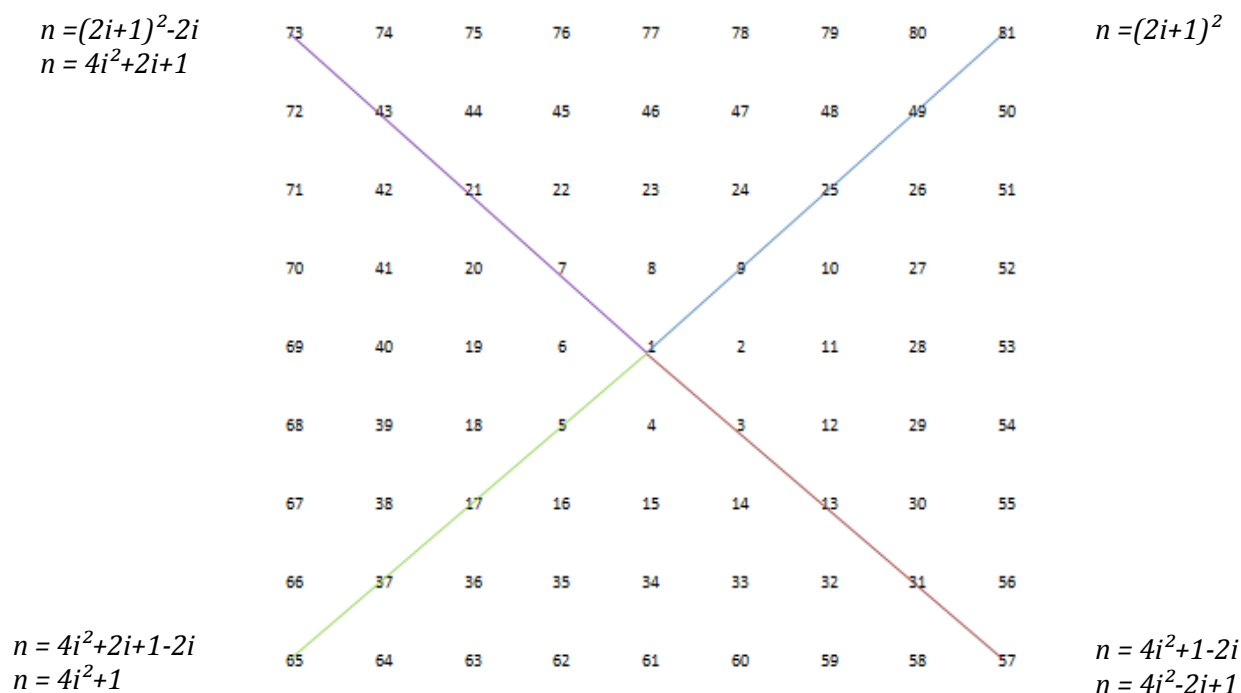


Figure 7 : Situation quadratique

Curiosité : la spirale d'origine 41



Figure 8 : La spirale d'origine 41

En modifiant l'origine de la spirale de 1 à 41, on observe une diagonale comportant beaucoup de nombres premiers, nous avons tenté de comprendre pourquoi.

Nous avons déterminé, à l'aide de la méthode précédente, les équations des diagonales $-i=j$ et $i=-j$.

Nous obtenons les équations suivantes : $n = 4i^2 + 2i + 41$ et $n = 4i^2 - 2i + 41$.

Par ailleurs, le polynôme d'Euler $P(n) = n^2 + n + 41$ donne exclusivement des nombres premiers pour n compris entre 0 et 40.

Et nous remarquons que $P(2i) = 4i^2 + 2i + 41$ et $P(2i-1) = P(-2i) = 4i^2 - 2i + 41$

Ces diagonales donnent donc les mêmes nombres premiers que le polynôme d'Euler !

IV- Etude expérimentale de la proportion de nombres premiers donnée par des polynômes du second degré

Pour déterminer la proportion de nombres premiers donnés par un polynôme du second degré [3], c'est-à-dire de la forme $ax^2 + bx + c$, on utilise le programme suivant :

▪ Programme 1

: L1 compte le nombre de premiers compris entre 0 et 1000

: L2 compte le nombre de nombres premiers de la forme $i^2 + bi + c$

: pour c allant de 0 à 120 :

: pour b allant de 0 à 120 :

: pour i allant de 0 à 1000 :

: si $f = i^2 + bi + c$ est premier :

: L2 = L2 + 1

: on fait le rapport L2 / L1

: on place un point de coordonnées $(b ; c)$, de taille et de couleur proportionnelles au rapport

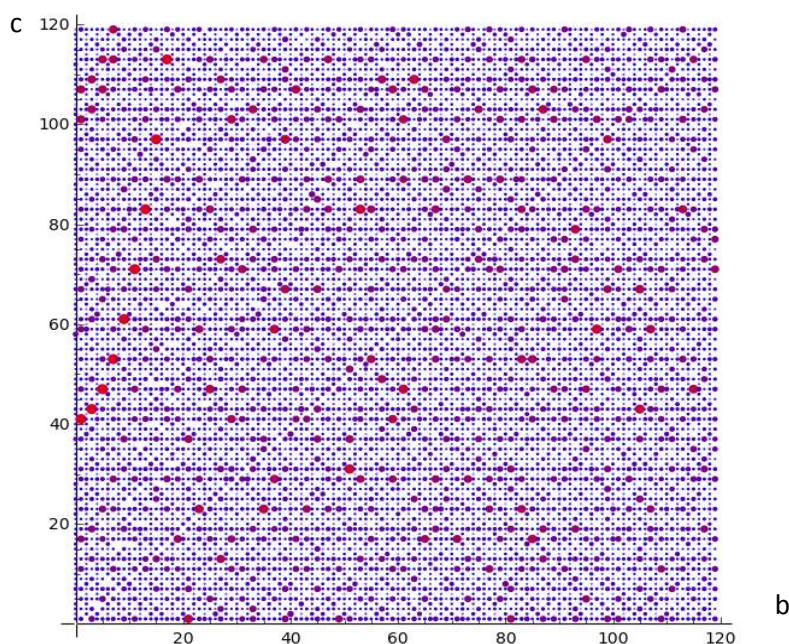


Figure 9 : Figure obtenue avec le programme 1

On observe que notre premier programme calcule les termes de tous les polynômes de la forme suivante :

- $ax^2 + bx + c$
- $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
- $a(x+2)^2 + b(x+2) + c$
- $a(x+\alpha)^2 + b(x+\alpha) + c$ ($\alpha \in \mathbb{N}$)

Or ces polynômes, à partir d'un certain rang donneront des termes similaires. Le point commun entre tous ces polynômes est leur discriminant [4]. On montre facilement qu'ils sont égaux.

▪ **Démonstration :**

Soient deux polynômes P_1 et P_2 tels que :

- $P_1 = ax^2 + bx + c$
- $P_2 = a(x+\beta)^2 + b(x+\beta) + c = xa^2 + 2ax\beta + a\beta^2 + bx + b\beta + c = ax^2 + (2a\beta + b)x + (b\beta + c + a\beta^2)$

On calcule les discriminants de P_1 et P_2 :

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (2a\beta + b)^2 - 4a(b\beta + c + a\beta^2) \\ &= 4a^2\beta^2 + 4a\beta b + b^2 - (4ab\beta + 4ac + 4a^2\beta^2) \\ &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

On a bien : $\Delta_1 = \Delta_2$ QED

Nous avons donc mis au point un nouveau programme.

▪ **Programme 2**

: L1 compte le nombre de premiers compris entre 0 et 1000

: on prend $b = 1$

: pour Δ allant de 0 à 400

: pour a allant de 1 à 100

: on calcule c à partir de Δ via la formule $c = \frac{b^2 - \Delta}{4a}$

: si c est un entier

: pour i allant de 0 à 1000 :

: $f = ai^2 + bi + c$

: si f est premier, $L2 = L2 + 1$

: on fait le rapport : $L2 / L1$

: on fait varier les tailles et couleurs des points en fonction du rapport et on les affiche aux coordonnées $(-\frac{\Delta}{4a}, \frac{\Delta}{4a})$

Remarque : On choisit de ne traiter que les discriminants négatifs pour éviter de tester des polynômes avec deux racines entières qui donneraient un nombre très limité de premiers.

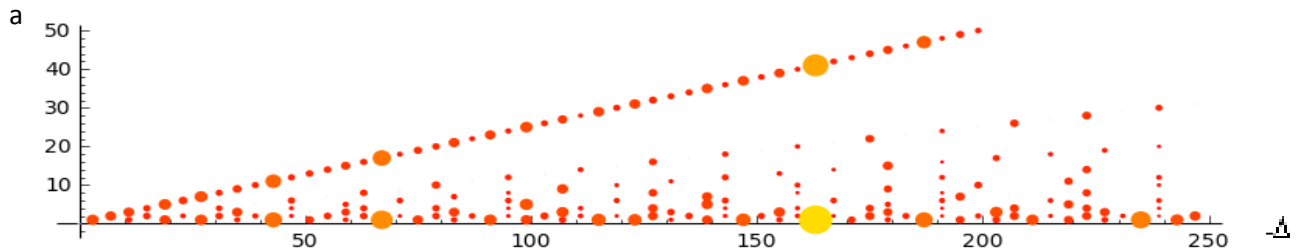


Figure 10 : Figure obtenue à partir du programme 2

On observe des points de tailles variables, preuve expérimentale qu'il existe bien des polynômes ayant l'étrange faculté de donner une proportion plus élevée de nombres premiers. Le gros point jaune sur l'axe des abscisses dont le discriminant vaut -163 correspond par exemple au fameux polynôme d'Euler rencontré précédemment.

Conclusion

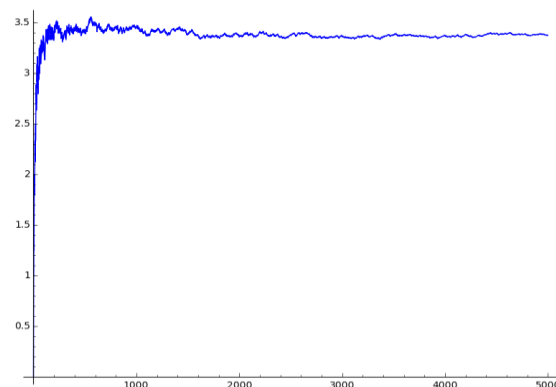


Figure 11 : Proportion de nombres premiers donnés par le polynôme d'Euler

Nous avons donc pu observer et expliquer les alignements des nombres premiers sur certaines diagonales de la spirale d'Ulam à partir d'une étude expérimentale de la proportion de nombres premiers donnés par un polynôme du second degré.

Nous avons observé que certains polynômes ont l'étrange faculté de donner une proportion impressionnante de nombres premiers !

Par exemple, le polynôme d'Euler va être à l'origine d'une diagonale très riche en nombres premiers, et pas seulement lors des premiers enroulements mais aussi par la suite. En effet, en observant la figure 11, on se rend compte que la proportion de nombre premiers donnés par le polynôme d'Euler n'est pas seulement forte au départ mais semble se stabiliser autour d'une valeur proche de 3.5.

Notes d'édition

(1) Ici, il faut sortir de la boucle lorsque $j=-i$, donc il faut une inégalité stricte. Pour les trois boucles suivantes, on part de $|i|=|j|$ et il faut s'arrêter lorsque cette égalité est retrouvée ; il suffit de remplacer les conditions successivement par *tant que $i>j$* , puis *tant que $-i>j$* , puis *tant que $i<j$* .

(2) On pourrait aussi remarquer que lorsqu'on place n_i on a rempli le carré de sommets $(\pm i, \pm i)$ avec les n_i premiers entiers naturels, et que ce carré comporte $2i+1$ points entiers sur un côté, donc en tout $(2i+1)^2$ points entiers.

(3) Il ne s'agira pas vraiment de la proportion de premiers donnés par le polynôme mais plutôt du rapport du nombre de premiers dans les N premières valeurs du polynôme au nombre de premiers entre 0 et N (avec $N=1000$, sauf pour le dernier exemple).

(4) Ces polynômes ont plus que leur discriminant en commun, puisqu'ils s'obtiennent l'un de l'autre par un simple décalage de la variable et donnent donc le même ensemble de valeurs, aux premiers et derniers termes près. On peut remarquer sur la figure 9, sur la gauche, l'arc de parabole de gros points rouges formé par la série issue du polynôme d'Euler.