A SPECIAL SEQUENCE

Piola Ugo (Terminale)
Sava Andrei (VIII-ème)
Gheorghe Adrian (XI-ème)
Massif Damien (Seconde)

Établissements :

Lycée François Arago – Perpignan (France)

Le Collège "B.P. Hasdeu" – Buzau (Roumanie)

Responsables :

Mme Marie Diumenge
Mme Christelle Quéru
Mme Melania Nicolae

Chercheurs :

Mr Robert Brouzet
Mr Bogdan Enescu

Année: 2017-2018

Sujet :

Une suite de nombres entiers est définie par $a_1=2$ et $a_2=3$ et pour tout $n\geq 2$, on a soit $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$ soit $a_{n+1}=2\cdot a_{n-1}$ on se demande si les nombres 17, 21, 1536, 1600 et 2017 sont atteignables.

Notre recherche :

On commence par différencier les deux suites. On étudie chacune des suites, pour connaître la forme des termes de la suite. On peut donc conclure que les termes de la suite, s'expriment toujours sous la forme de la somme de 2 puissances de 2.

Sommaire :

I- Étude de la première suite

$(a_1=2 \;\; et \;\; a_2=3 \, , a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1} \, , n\geq 2)$

La première suite, exprimée sous la forme $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$ va être étudiée dans un premier temps.

I.1 Pour aucun changement

Tout d'abord, nous allons travailler sur cette suite en utilisant uniquement cette formule. On obtient alors $a_1=2$ et $a_2=3$ (donné dans l'énoncé) et ensuite, on obtient:

$$a_3=3\cdot a_2-2\cdot a_1=3\cdot 3-2\cdot 2=5$$

$$a_4=3\cdot a_3-2\cdot a_2=3\cdot 5-2\cdot 3=9$$

$$a_5=3\cdot a_4-2\cdot a_3=3\cdot 9-2\cdot 5=17 \, .$$

On a observé que $5=2^2+1$, $9=2^3+1$, $17=2^4+1$. Il semble alors que l'on puisse trouver une expression générale lorsqu'on utilise uniquement cette formule.

On émet ainsi une conjecture, $a_{n+1}=2^n+1 \, , n\in N$, que nous allons démontrer par récurrence.

Introduction:

Pour le rang 1 et au rang suivant $a_1=2$, $2^0+1=2$ et $a_2=3$, $2^1+1=3$; la propriété est donc vraie au rang 1 et au rang 2.

Hérédité :

Soit $n\in N$, n fixé, $n\geq 2$;

Supposons que la propriété est vraie aux rangs n et $n-1$:

$$a_n=2^{n-1}+1 \;\; et \; a_{n-1}=2^{n-2}+1 \, , n\geq 2$$

Démontrons que la propriété est vraie au rang suivant.

Hypothèse de récurrence:

$$a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}=3\cdot\left(2^{n-1}+1\right)-2\cdot(2^{n-2}+1)=3\cdot 2^{n-1}+3-2^{n-1}-2$$

$$\Rightarrow \qquad a_{n+1}=2^{n-1}\cdot 2+1=2^{n}+1$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et au rang 2 et elle est héréditaire, donc

$$a_{n+1}=2^{n}+1\ ,\ n\in N\Rightarrow a_{n+1}=2^{n}+2^{0}\ ,\ n\in N$$

On a donc montré que lorsqu'on n'effectuait aucun changement dans la manière de calculer les termes de la suite, on obtenait toujours un nombre écrit sous la forme de la somme d'une puissance de 2 plus 1 (soit la somme de deux puissances de deux) . Ainsi, dans ce cas, on ne peut obtenir que des nombres impairs, $n\in N^{*}$.

I.2 Pour un changement

$$a_1=2\ ,\ \ a_2=3\ ,\quad a_3=3\cdot a_2-2\cdot a_1=3\cdot 3-2\cdot 2=5$$

$$a_4=2\ \cdot a_2=2^{1}\cdot 3=6$$

$$a_5=3\cdot a_4-2\cdot a_3=3\cdot 6-2\cdot 5=8=2^{2}+2^{2}=2^{3-1}+2^{2}$$

$$a_6=3\cdot a_5-2\cdot a_4=3\cdot 8-2\cdot 6=12=2^{2}+2^{3}=2^{3-1}+2^{3}$$

$$a_7=3\cdot a_6-2\cdot a_5=3\cdot 12-2\cdot 8=20=2^{2}+2^{4}=2^{3-1}+2^{4}$$

Dans cette nouvelle partie, nous allons voir comment évoluent les termes de la suite lorsqu'on utilise uniquement la première forme de calcul, puis on change une fois la manière de calculer les termes de la suite. On retourne ensuite à la première manière. Soit $n+1$ le rang auquel on effectue le changement. On aura ainsi : $a_{n-1}=2^{n-2}+1$ et $a_n=2^{n-1}+1\ ,\ n\geq 2$ et au rang du changement $a_{n+1}=2\cdot a_{n-1}=2\cdot\left(2^{n-2}+1\right)=\ 2^{n-1}+2\ ,\ n\geq 2$

Et maintenant, au rang suivant :

$$a_{n+2}=3\cdot a_{n+1}-2\cdot a_n=3\cdot\left(2^{n-1}+2\right)-2\cdot\left(2^{n-1}+1\right)=2^{n-1}+2^{2}$$

$$a_{n+3}=3\cdot a_{n+2}-2\cdot a_{n+1}=3\cdot\left(2^{n-1}+2^{2}\right)-2\cdot\left(2^{n-1}+2\right)=2^{n-1}+2^{3}$$

Alors, on peut essayer de démontrer une propriété, issue d'une conjecture que l'on peut faire après avoir étudié les résultats obtenus avec cette nouvelle manière de calculer les termes de la suite.

Propriété à prouver par récurrence :

$a_{k+p}=2^{k-1}+2^{p}\ ,$ avec $k+1$ rang du changement, $k\geq 2$ et $p\geq 0$:

Initialisation : Déjà exécutée dans le raisonnement qui a permis la conjecture (1)

Hérédité

Pour $p \geq 1$ et $k \geq 2$, on suppose que la propriété est vraie aux rangs $k+p$ et $k+p-1$:

$a_{k+p} = 2^{k-1} + 2^{p}$ et $a_{k+p-1} = 2^{k-1} + 2^{p-1}$

Démontrons que la propriété est vraie au rang suivant : $a_{k+p+1} = 2^{k-1} + 2^{p+1}$.

Hypothèse de récurrence:

$$a_{k+p+1} = 3 \cdot a_{k+p} - 2 \cdot a_{k+p-1} = 3 \cdot (2^{k-1} + 2^{p}) - 2 \cdot (2^{k-1} + 2^{p-1})$$

$$\Rightarrow \qquad a_{k+p+1} = 2^{k-1} + 4 \cdot 2^{p-1} = 2^{k-1} + 2^{p+1}$$

Conclusion : La propriété est vraie aux rang *s* $k+p$ et $k+p-1$ et elle est héréditaire, donc

$$a_{k+p} = 2^{k-1} + 2^{p},\ p \in N \ \textbf{et} \ k \geq 2$$

I.3 Pour deux changements

$$a_1 = 2,\ \ a_2 = 3,\quad a_3 = 3 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$$

$$a_4 = 2 \ \cdot a_2 = 2^{1} \cdot 3 = 6$$

$$a_5 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$a_6 = 3 \cdot a_5 - 2 \cdot a_4 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 18 = 2^{1} + 2^{4} = 2^{1} + 2^{5-1}$$

$$a_7 = 3 \cdot a_6 - 2 \cdot a_5 = 3 \cdot 18 - 2 \cdot 10 = 34 = 2^{1} + 2^{5} = 2^{1} + 2^{6-1}$$

Dans ce nouveau cas, on utilise la formule trouvée précédemment, lorsqu'on a déjà effectué un changement, puis, on change à nouveau de moyen pour calculer les termes de la suite, et enfin, on revient sur la première forme de calcul. Effectuons ce nouveau changement au rang $k+t+1$,

$k \in N^{*}, t \geq 2$

On aura $a_{k+t-1} = 2^{k-1} + 2^{t-1}$, $a_{k+t} = 2^{k-1} + 2^{t}$ et au rang du changement

$$a_{k+t+1} = 2 \cdot a_{k+t-1} = 2 \cdot \left(2^{k-1} + 2^{t-1}\right) = 2^{k} + 2^{t}.$$

En calculant les termes suivants, on peut émettre la conjecture suivante :

$a_{k+t+p} = 2^{k} + 2^{t+p-1},\ t \geq 2\ ,\ p \geq 2, k \in N$.

Démontrons cette propriété par récurrence :

Initialisation : Déjà exécutée dans le raisonnement qui a permis la conjecture

Hérédité :

Pour $t \geq 2$, $p \geq 2$, $k \in N^*$, on suppose que $a_{k+t+p} = 2^k + 2^{t+p-1}$ et $a_{k+t+p-1} = 2^k + 2^{t+p-2}$

Démontrons que $a_{k+t+p+1} = 2^k + 2^{t+p}$

Hypothèse de récurrence:

$$a_{k+p+t+1} = 3 \cdot a_{k+p+t} - 2 \cdot a_{k+p+t-1} = 3 \cdot (2^k + 2^{t+p-1}) - 2 \cdot (2^k + 2^{p+t-2})$$

$$\Rightarrow \quad a_{k+p+t+1} = 2^k + 4 \cdot 2^{t+p-2} = 2^k + 2^{t+p}$$

Conclusion : La propriété est vraie aux rangs $k+t+p+1$ et $k+t+p$ et elle est héréditaire, donc

$a_{k+t+p} = 2^k + 2^{t+p-1}, t \geq 2, p \geq 2$ (2)

I.4 Aspect général

De manière plus générale, on s'aperçoit que si on commence à calculer les termes de la suite par la première formule, on obtiendra tout d'abord des nombres issus de la somme de puissances de 2 et de 1 et si on effectue ensuite des changements dans la manière de calculer les termes de la suite, mais que l'on revient immédiatement à la formule 1, on obtiendra toujours des termes de la suite exprimés sous la forme de la somme de deux puissances de deux (soit $2^k + 2^p$, $k, p \in N$).

II- Étude de la seconde suite ($a_{n+1} = 2 \cdot a_{n-1}, n \geq 2$)

La seconde manière d'exprimer la suite est particulière, car elle multiplie toujours des termes dont l'indice est de même parité que le terme qu'elle multiplie par 2 (Si on doit calculer un terme dont l'indice est pair, on va multiplier par 2 l'avant dernier terme, qui est donc lui aussi d'un indice pair). De ce fait, on peut distinguer les termes avec un indice pair des termes avec un indice impair. Commençons par le cas le plus simple, lorsqu'on utilise uniquement des termes avec un indice pair.

Un nombre avec un indice pair ($a_{2k}, k \in N^*$).

II.1 Indices pairs

II.1.1 Sans changement

$$a_1=2\,,\, a_2=3\,,\, a_4=2\cdot a_2=6=2^1\cdot 3\,,\, a_6=2\cdot a_4=2\cdot 6=12=2^2\cdot 3\,.$$

Si on s'intéresse uniquement aux termes de la suite dont les indices sont pairs, on peut s'apercevoir que les termes peuvent s'exprimer de manière générale : $a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3\,,\, k\in N^*$.

Démontrons cette propriété par récurrence,

Initialisation :Au rang 1, $a_{2\cdot 1}=3=2^{1-1}\cdot 3=2^0\cdot 3\Rightarrow$ la propriété est vraie si $k=1$.

Hérédité : Pour $k\in N^*$, k fixé

Supposons la propriété vraie au rang $2k: a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3$ et démontrons que la propriété est vraie au rang suivant, $2k+2$:

$$a_{2k+2}=2^k\cdot 3$$

Hypothèse de récurrence:

$$a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3\Rightarrow a_{2k+2}=2\cdot a_{2k}=2\cdot(2^{k-1}\cdot 3)=2^k\cdot 3$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire, donc :

$$a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3\,,\, k\in N^* \quad \textbf{(1)}$$

II.1.2 Avec un changement

$$a_1=2\,,\, a_2=3\,,\, a_3=2\cdot a_1=2\cdot 2=4$$

$$a_4=3\cdot a_3-2\cdot a_2=3\cdot 4-2\cdot 3=6=3\cdot 2^1$$

$$a_6=2\cdot a_4=2\cdot 6=12=3\cdot 2^2\,.$$

Après avoir prouvé que les termes de cette suite, avec des indices pairs, s'expriment de manière générale, on étudie la suite en effectuant un changement de manière à calculer les termes de la suite à un rang pair, puis on revient à la seconde méthode.

On change au rang $2k+2$. On a donc $a_{2k}=3\cdot 2^{k-1}$, $a_{2k+1}=2^{k+1}$ (Ceci sera prouvé plus tard - voir la relation (2)) (3)

Enfin, $a_{2k+2}=3\cdot(a_{2k+1})-2\cdot(a_{2k})=3\cdot(2^{k+1})-2\cdot(3\cdot 2^{k-1})\Rightarrow$

$$a_{2k+2}=2^k\cdot 3\,,\, k\in N^*$$

Comme on peut le voir , effectuer un changement dans la manière de calculer les termes de la suite ne va pas avoir d'influence sur la formule générale des termes de la suite,

$$a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3\,,\, k\in N^*$$

II.1.3 Aspect général

Nous pouvons donc conclure que si on étudie seulement les termes d'indice pair, l'expression des termes de la suite avec la formule 2 est toujours identique (4)

$$a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3=2^{k-1}\cdot\left(2^1+2^0\right)=2^k+2^{k-1}\,.$$

II.2 Indices impairs

II.2.1 Avec aucun changement

$$a_1=2\,,\, a_2=3\,,\, a_3=2\cdot a_1=4=2^2$$

$$a_5=2\cdot a_3=2\cdot 4=8=2^3$$

$$a_7=2\cdot a_5=2\cdot 8=16=2^4.$$

De même que précédemment, nous allons chercher une formule générale pour les termes avec un indice impair lorsqu'on utilise uniquement la formule 2. Il semble que $a_{2k+1}=2^{k+1}$.

Prouvons le, à nouveau par récurrence :

Initialisation : Au rang 0, $a_1=2$ et $2^1=2$ la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Pour $k\in N^*$, k fixé supposons que la propriété est vraie au rang $2k+1$:

$$a_{2k+1}=2^{k+1}$$

Démontrons que la propriété est vraie au rang $2k+3$:

$$a_{2k+3}=2^{k+2}$$

Hypothèse de récurrence:

$$a_{2k+1}=2^{k+1}\Rightarrow a_{2k+3}=2\cdot a_{2k+1}=2\cdot\left(2^{k+1}\right)=2^{k+2}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire, donc :

$$a_{2k+1}=2^{k+1}\quad ,\, k\in N^*\ \textbf{(2)}$$

II.2.2 Avec un changement

$$a_1=2\,,\,a_2=3\,,\,a_3=2\cdot a_2=4$$

$$a_4=2^1\cdot 3=6$$

$$a_5=3\,a_4-2\,a_3=3\cdot 6-2\cdot 4=10=2^1+2^3$$

$$a_7=2\,a_5=20=2^2+2^4$$

Continuons à étudier ces nombres lorsqu'on change la manière de calculer les termes de la suite pour un terme d'indice impair. Pour un changement à un rang $2\,k+1\,,k\in N^*$ on sait que:

$$a_{2k-1}=2^k \text{ (2) et } a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3 \quad \text{(1).}$$

Ensuite :

$$a_{2k+1}=3\cdot a_{2k}-2\cdot a_{2k-1}=3\cdot\left(3\cdot 2^{k-1}\right)-2\cdot 2^k=9\cdot 2^{k-1}-4\cdot 2^{k-1}=5\cdot 2^{k-1}$$

$$\Rightarrow a_{2k+1}=(\,2^2+1\,)\cdot 2^{k-1}\Rightarrow$$

$$a_{2k+1}=2^{k+1}+2^{k-1}\,,k\in N^* \quad \textbf{(3)}$$

Contrairement au cas des nombres d'indice pair, le changement de séquence pour les nombres d'indice impair a une influence sur les autres termes d'indice impair. Mais, on peut constater que les termes de la suite sont toujours écrits sous la forme de la somme de deux puissances de 2 (5)

II.2.3 Avec deux changements :

II.2.3.a Un rang pair

$$a_1=2\,,\,a_2=3\,,\,a_3=2\cdot 2=4$$

$$a_4=2\cdot 3=6$$

$$a_5=3\,a_4-2\,a_3=3\cdot 6-2\cdot 4=10=2^1+2^3$$

$$a_6=3\cdot a_5-2\cdot a_4=3\cdot 10-2\cdot 6=18=2^4+2^1$$

$$a_7=2\,a_5=20=2^2+2^4$$

$$a_8=2\,a_6=36=2^2+2^5$$

Maintenant qu'on a effectué un changement à un rang impair et que celui ci a une influence sur les autres termes de la suite, étudions le comportement des termes d'indice pair lorsqu'on effectue un changement (6) à un rang pair (étant donné que l'expression pour un rang impair a changé) Pour un changement à un rang $(2\,k+2)$:

$a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3$ (1), $a_{2k+1}=2^{k+1}+2^{k-1}$ (3), on a donc :

$$a_{2k+2}=3\cdot a_{2k+1}-2\cdot a_{2k}=3\cdot(2^{k+1}+2^{k-1})-2\cdot(2^{k-1}\cdot 3)=3\cdot 2^{k+1}+3\cdot 2^{k-1}-6\cdot 2^{k-1}$$

$$\Rightarrow a_{2k+2}=3\cdot 2^{k+1}-2^{k-1}\cdot 3=9\cdot 2^{k-1}=\left(2^3+2^0\right)\cdot 2^{k-1}\Rightarrow$$

$$a_{2k+2}=2^{k+2}+2^{k-1},\ k\in N^*$$

On peut constater que cela a une influence sur les termes d'indice pair, mais leur forme reste identique. En effet, ils s'écrivent toujours sous la forme d'une somme de deux puissances de 2.

II.2.3.b Un rang impair (7)

$$a_1=2\ ,\ a_2=3\ ,\ a_3=2\cdot 2=4$$

$$a_4=2\cdot 3=6$$

$$a_5=3\,a_4-2\,a_3=3\cdot 6-2\cdot 4=10=2^1+2^3$$

$$a_6=2\,a_4=12$$

$$a_7=3\cdot a_6-2\cdot a_5=3\cdot 12-2\cdot 10=16=2^4$$

$$a_8=2\,a_6=24$$

$$a_9=2\,a_7=2^5$$

Imaginons maintenant le cas suivant :

On a déjà effectué un changement à un rang impair, mais on n'a pas changé pour un rang pair. Nous allons voir ce que cela change si on change à nouveau, mais pour un rang impair $2k+1$.

On a : $a_{2k}=2^{k-1}\cdot 3$ (1), $a_{2k-1}=2^k+2^{k-2}$ (3). Ensuite :

$$a_{2k+1}=3\cdot a_{2k}-2\cdot a_{2k-1}=3\cdot 2^{k-1}\cdot 3-2\cdot(2^k+2^{k-2})=9\cdot 2^{k-1}-2^{k+1}-2^{k-1}$$

$$\Rightarrow a_{2k+1}=8\cdot 2^{k-1}-2^{k+1}=4\cdot 2^{k-1}=2^{k+1}\Rightarrow$$

$$a_{2k+1}=2^{k+1},\ k\in N^*$$

Or, ce cas précis permet de revenir à la situation d'origine, comme si l'on n'avait jamais changé la manière de calculer les termes de la suite.

III. Conclusion sur la suite - Réponse au problème

III.1 Conclusion sur cette suite

De manière générale, on peut voir que les termes de la suite, s'expriment toujours sous la forme d' une puissance de deux ou de la somme de deux puissances de deux. (8)

III.2 Réponse au problème

Voici les premières puissances de deux :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048

La consigne était de savoir si avec les deux expressions de la suite, on peut obtenir différents nombres. Tout d'abord, on nous proposait 17.

$17 = 2^4 + 2^0$. Ce nombre convient aux conditions, et il est possible d'obtenir ce nombre avec cette séquence (I.1).

Pour 21, il est impossible d'écrire sous la forme de deux puissances de deux, donc il n'est pas atteignable avec cette suite parce que :

$$2^4 + 2^2 < 21 < 2^4 + 2^3 \Leftrightarrow 20 < 21 < 24$$

2017 ne s'écrit pas sous la forme de deux puissances de 2 parce que :

$$2^9 + 2^{10} < 2017 < 2^{10} + 2^{10} \Leftrightarrow 1536 < 2017 < 2048$$

De même, 1600 ne peut pas s'écrire sous la forme de la somme de deux puissances de deux parce que: $2^9 + 2^{10} < 1600 < 2^{10} + 2^{10} \Leftrightarrow 1536 < 1600 < 2048$

IV. Algorithmes

Après avoir résolu ce problème, nous avons décidé de créer deux algorithmes : Le premier permet de déterminer si un nombre, choisi au hasard, s'écrit sous la forme de la somme de deux puissances de deux. (9)

```
i=0
n=int(input())
j=0
ok=0
while ok==0 :
    x=n-2**i
    copie=x
    j=0
    while copie%2 == 0 :
        copie=copie/2
        j=j+1
    if copie > 1 :
        i=i+1
```

```
    else:
        if 2**i+2**j == n :
            print("2^" , i ,"+" , "2^", j)
            ok=1
        else :
            print ("This can't be a term of this sequence")
            ok=1
```

Le second permet de calculer tous les nombres qui peuvent être des termes de la suite, ainsi que le pourcentage de nombres qui sont des termes de la suite.

```
k=int(input())
liste=[]
for n in range(2, k+1) :
    ok=0
    i=0
    while ok==0 :
        x=n-2**i
        copie=x
        j=0
        while copie%2 == 0 :
            copie=copie/2
            j=j+1
        if copie > 1 :
                i=i+1
        else :
            if 2**i+2**j == n :
                liste.append(n)
                ok=1
            else:
                ok=1
print (liste)
print (len(liste))
print (len(liste)/k*100)
```

Notes d'édition

(1) La récurrence se fait sur p, à k fixé, et l'initialisation demande de connaître les termes a_k et a_{k+1} calculés dans le raisonnement précédent avec n au lieu de k.

(2) Cette formule est inexacte. Dans le raisonnement précédant la conjecture, on ne calcule que les termes $a_{k+t} = 2^{k-1} + 2^t$ et $a_{k+t+1} = 2^k + 2^t$ pour p = 0 et p = 1 et la formule n'est pas vérifiée pour p = 0. La formule exacte est : $a_{k+t+p} = 2^{k+p-1} + 2^t$

(3) On a besoin d'un terme d'indice impair d'où l'utilisation de cette formule démontrée au paragraphe II.2.1.

(4) Il s'agit de la formule 1.

(5) Il faudrait dire que les formules (1) et (3) sont valables non seulement au rang du changement mais aussi aux rangs suivants (tant qu'il n'y a pas d'autre changement).

(6) Il s'agit d'un second changement . Il est effectué à un rang 2*k* + 2 pair, supérieur à celui du premier changement mais non nécessairement consécutif (le calcul reste le même, voir note 5).

(7) Le deuxième changement a lieu ici à un rang impair.

(8) Ce n'est pas démontré dans le cas général.

(9) On peut regretter que ces algorithmes ne soient pas plus expliqués et justifiés.