Le Solitaire : il n'en restera qu'un!

2013-2014

Nom, prénom et niveaux des élèves : Adrien JOSSSE (seconde), Hector LETELLIER (terminale)

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignants : Xavier GABILLY, Didier MISSENARD

Chercheurs : Vincent BRAULT, Nicolas BURQ, Denis JULLIOT

Table des matières

On considère un échiquier de taille illimitée sur lequel on dispose de n^2 jetons. Au début ces jetons sont mis dans un tableau $n \times n$. On met un jeton par case.
A chaque étape, on choisit un pion et on le fait sauter horizontalement ou verticalement au-dessus d'une case adjacente occupée par un jeton vers une case vide située immédiatement derrière. On enlève alors la pièce sautée.
Pour quelles valeurs de n peut-on espérer terminer le jeu avec un seul jeton sur l'échiquier ?
A n fixé, comment poser les pions sur l'échiquier pour pouvoir trouver une stratégie permettant de finir avec un seul pion ?

1 Le solitaire sur une droite

Définition. Soit n le nombre de pions, on nomme $\mathcal{E}$ l'ensemble n des pions de la droite et des cases entre deux pions et $E(n)$ son cardinal.
Chaque case, vide ou non, possède une abscisse entière qui correspond à sa position sur la droite. On prend comme case d'abscisse 0 celle contenant le pion le plus à gauche de $\mathcal{E}$. On considère comme une ligne un ensemble de pions et de cases vides tel que chaque extrémités de la ligne soit un pion nommé pion extrémité. On nomme $L_n(i,j)$ une ligne de n pions dont les pions extrémités ont pour abscisse i et j, avec $i \leqslant j$ et $i,j \in \mathbf{N}^2$. [1]

Dans tous nos schémas les pions sont représentés par des croix (X_i), avec pour indice leur position sur la droite, et les cases vides par des cercles (O).

Théorème 1. *Soit $L_n(i,j)$ une ligne de pions. Si on se déplace uniquement avec des pions de $L_n(i,j)$, alors il est impossible de placer un pion dans les cases d'abscisses inférieurs ou égales à $i-2$ et supérieurs ou égales à $\geqslant j+2$.*

Démonstration. Par récurrence sur n le nombre de pions.
P_n : Une ligne de n pions ne peut par ses propres moyens s'agrandir de plus d'une case depuis chaque extrémité.
Pour $n = 1$ il n'y a aucun mouvement possible, la propriété est vraie.
Pour $n = 2$ on ne peut faire qu'un seul mouvement. Par conséquent, on ne peut s'éloigner de plus d'une case. La propriété reste vraie.
Supposons la propriété vraie jusqu'à n pions. Montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$ pions.
Nous détaillons deux cas distincts :
-Si on bouge à l'intérieur de L_n, alors aucun pion n'est sorti de L_n et il n'y a plus que k pions. On retrouve l'hypothèse de récurrence.
-Si on décide de sortir un pion à droite (resp. à gauche) de $L_{n+1}(i,j)$ alors on obtient deux lignes de pions $L_{n-1}(i,j-2)$ et $L_1(j+1,j+1)$ (resp. $L_1(i-1,i-1)$ et $L_{n-1}(i+2,j)$). La ligne constituée d'un seul pion ne peut avoir de mouvements. D'après l'hypothèse de récurrence les pions de $L_1(j+1,j+1)$ (resp. $L_{n-1}(i+2,j)$) ne peuvent interagir avec l'autre ligne car deux cases vides les séparent.
Donc la propriété reste vraie avec $n+1$ si elle est avec n pions. La propriété est initialisée pour $n = 1$ et est héréditaire. Par conséquent elle vraie pour tout $n \geqslant 1$. □

1.1 Recherche des configurations perdantes

Dans la suite nous allons chercher les cas impossibles dans un solitaire en ligne gagnant. On dit que $\mathcal{E}$ est une configuration gagnante s'il est possible d'effectuer des mouvements jusqu'à n'avoir plus qu'un pion. [2]

Proposition 2. *Si $\mathcal{E}$ est une configuration gagnante, alors il n'y a pas trois cases vides consécutives dans $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Soit $L_n(i, j-2)$ et $L_{n'}(j+2, k)$ deux lignes de pions séparées par trois cases vides. D'après le théorème précédent aucune des deux lignes ne peut placer un pion sur la case d'abscisse j. Par conséquent il y a toujours une case vide entre les deux lignes. Donc les deux lignes ne peuvent interagir, le nombre total de pions est nécessairement supérieur ou égal à deux. Donc le solitaire est perdant. □

Proposition 3. *Si une des extrémités de $\mathcal{E}$ est distante d'au moins deux cases vides consécutives du plus proche des autres pions de $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}$ est une configuration perdante.*

Démonstration. Dans les conditions données précédemment la ligne ne contenant qu'un seul pion est une des extrémités de $\mathcal{E}$. Un seul pion ne pouvant se déplacer, si le solitaire est gagnant, alors la seconde ligne doit interagir avec le pion extrémité. D'après le théorème une ligne ne peut s'agrandir de plus d'une case. Par conséquent il n'y a aucune interaction possible. $\mathcal{E}$ est une configuration perdante. □

Théorème 4. *Si $\mathcal{E}$ est une configuration gagnante, alors lors de tous mouvements victorieux les pions extrémités de $\mathcal{E}$ restent les extrémités.*

Démonstration. Par l'absurde :
Si un pion de $\mathcal{E}$ saute par dessus une des extrémités alors il se retrouve à l'extrémité et se situe à au moins deux cases vides consécutives du plus proche des autres pions. D'après la proposition précédente cette configuration est perdante. Donc les extrémités de $\mathcal{E}$ doivent rester les extrémités. □

Corollaire. *Les extrémités de $\mathcal{E}$ terminent le solitaire dans l'espace et dans le temps.*
Démonstration. Les extrémités restent les extrémités. Donc le dernier mouvement dans une configuration gagnante consiste à faire sauter l'une des extrémités au-dessus de l'autre. □

Corollaire. *Les extrémités (non confondues) de $\mathcal{E}$ ont des abscisses de parités différentes. Comme l'extrémité gauche a, par convention, pour abscisse 0, l'extrémité droite a une abscisse impaire.*

Proposition 5. *Si $\mathcal{E}$ ne contient aucune case vide et que $E(n \geqslant 3)$, alors c'est une configuration perdante.*

La démonstration se fait à partir de la proposition 2.

1.2 Recherche des configurations gagnantes

Nous avons démontré dans la partie précédente que trois cases vides consécutives dans $\mathcal{E}$ est une condition suffisante pour que la configuration soit perdante. Nous allons voir si une configuration où il y a deux cases vides consécutives peut être gagnante.

Soit deux lignes de pions $L_n(i, j-2)$ et $L_{n'}(j+1, k)$. Ces deux lignes sont séparées par les cases vides en $j-1$ et j. Si la configuration est gagnante, alors on doit faire interagir les deux lignes, c'est à dire que des pions de l'une sautent des pions de l'autre.
Il existe donc un instant t, pendant lequel les deux lignes se sont agrandies d'une case comme prouvé dans le théorème 1.
A l'instant t on obtient :

$$[L_{(n-m)}(i, j-4)] \; O \; O \; X_{j-1} \; X_j \; O \; O \; [L_{(n'-m')}(j+3, k)]$$

Nous avons maintenant deux situations comme celle que nous voulons résoudre. Cependant, comme nous n'avons que deux pions en $j-1$ et j, il n'y qu'un unique mouvement possible avec ces pions. Or si à un instant t', les deux pions du centre se rapprochent d'un des ensembles et même si chaque ligne s'est rapprochée, alors il y a au moins trois cases vides consécutives qui se créent.
On obtient à l'instant t' :

$$[L_{(n-m)}(i, j-3)] \; O \; O \; O \; X_{j+1} \; [L_{(n'-m')}(j+2, k)]$$

Donc la ligne à l'opposée du mouvement est forcément vide de pions si la configuration est gagnante.
Nous allons donc orienter nos recherches dans ce sens : Une ligne de pions peut-elle toujours se réduire à un seul pion en dehors des limites initiales ?

Lemme. [3] *Si une configuration initiale est gagnante et si les mouvements effectués vont dans le sens de la victoire, alors tout $\mathcal{E}$ issu de cette configuration initiale est dans une configuration gagnante.*
De même, si une configuration est gagnante alors ses antécédents le sont également.
Conséquence : si pour un certains nombre de pions il n'existe qu'une seule configuration gagnante, λ, alors toutes configurations gagnantes contenant un nombre supérieur de pions devra lors de la résolution donner la configuration λ.

La seule ligne composée de deux pions et pouvant se réduire à un pion en dehors des limites initiales est la ligne formée de deux pions côte à côte, $L_2(i, i+1)$
Dans la suite de notre démarche nous chercherons toujours à déposer le pion restant à droite de la limite initiale. Pour ce qui est de sortir à gauche, il suffira de prendre le même raisonnement en changeant la direction des mouvements.
Soit $L_n(i, j)$ la ligne que nous souhaitons réduire. Comme nous voulons déposer un pion à droite, uniquement à partir de cette ligne, on considère que les cases d'abscisses $j+1$, $j+2$ et $j+3$ sont vides.
Nous savons que pour deux pions il existe une unique ligne répondant à nos critères qui est $L_2(j-1, j)$. Intéressons nous maintenant à (aux) l'antécédent(s) possible(s) de la ligne $L_2(j-1, j)$. Il est impossible qu'un des pions provienne d'un mouvement à gauche de la ligne. Donc ils sont issus de pions à droite de l'ensemble. Le pion en j ne peut provenir

d'un mouvement à droite car il n'y aurait pas de pion en $j-1$. Donc seul le pion en $j-1$ provient d'un mouvement dans une configuration précédente. Nous cherchons une ligne à deux pions pouvant déposer un pion à sa droite. Or il n'existe qu'une seule ligne de ce type.
On obtient donc une unique ligne de trois pions, $L_3(j-3, j)$ répondant aux différents critères que nous dessinons ci-dessous. Les carré symbolise la case vide où nous souhaitons terminer avec un seul pion.

$$X\ X\ O\ X\ \square$$

En appliquant la même démarche sur les différents antécédents on obtient une configuration dite bout de chaîne, car elle peut être ajoutée à chaque extrémité de $\mathcal{E}$ sans en changer l'issue. On note Ω l'ensemble des lignes bout de chaînes, dont voici l'aspect général :

$$X\ [X\ O]\ [X\ O]\ -----\ [X\ O]\ [X\ O]\ X\ \square$$

Le carré représente ici le pion extrémité de $\mathcal{E}$ que nous remplaçons par une ligne de Ω. Ceci sert de démonstration aux propositions qui suivent [4] :

Proposition 6. *Si une configuration de $\mathcal{E}$ est gagnante et contient deux cases vides consécutives alors une des lignes, lignes de part et d'autres des deux cases vides, appartient à Ω.*

Proposition 7. *Si un ensemble $\mathcal{E}$ contient plusieurs fois ($\geqslant 2$) deux cases vides consécutives, alors la configuration est perdante.*

Par conséquent, les extrémités d'un ensemble $\mathcal{E}$ peuvent être décrites selon des dispositions particulières. Si nous nous intéressons au trois dernières cases des ensembles $\mathcal{E}$, on trouve qu'il existe quatre possibilités de remplissage.

$$---\ X\ X\ X$$

$$---\ O\ X\ X$$

$$---\ X\ O\ X$$

$$---\ O\ O\ X$$

Nous pouvons déjà retirer la dernière configuration qui est perdante d'après la proposition 3. Si nous associons ces différentes fins avec des débuts du même type, on obtient les terminaisons possibles des ensembles $\mathcal{E}$ que nous espérons gagnants.

$$X\ X\ X\ ----\ X\ X\ X$$

$$X\ X\ X\ ----\ O\ X\ X$$

$$X\ X\ X\ ----\ X\ O\ X$$

$$X\ X\ O\ ----\ O\ X\ X$$
$$X\ X\ O\ ----\ X\ O\ X$$
$$X\ O\ X\ ----\ X\ O\ X$$

Nous pouvons là aussi retirer la dernière proposition qui n'est pas gagnante. En effet il est possible d'ajouter un bout de chaîne sans changer l'issu du solitaire. Or si l'on ajoute un bout de chaîne à chaque extrémités du dernier ensemble proposé, nous créons deux fois deux cases vides consécutives, le solitaire est perdant. S'il est perdant lorsqu'on ajoute les bouts de chaîne, c'est qu'il l'était auparavant. Donc la dernière configuration de $\mathcal{E}$ est toujours perdante.

Maintenant que nous avons retirer les configurations perdantes, nous retirons celles contenant un bout de chaîne, ce qui donne comme possibilité pour les terminaisons d'un $\mathcal{E}$ quelconque, que nous qualifierons de simple, les dispositions suivantes :

$$X\ X\ X\ ----\ X\ X\ X$$

$$X\ X\ X\ ----\ X\ O\ X$$

Nous nous intéressons maintenant, dans une configuration initialement avec deux cases vides consécutives, à la ligne à l'opposée de celle bout de chaîne. Pour simplifier nos recherches nous décidons de travailler uniquement avec des ensembles $\mathcal{E}$ sans bout de chaîne. Comme nous ne prenons pas en compte les bouts de chaine, nous pouvons considérer que nous sommes forcément dans la disposition suivante, (sinon l'autre ligne était elle même bout de chaine et le solitaire est gagnant) :

$$X\ O\ X\ ---\ X\ X\ X$$

Comme les extrémités de $\mathcal{E}$ sont sur des cases de parité différentes, la ligne de droite s'étale nécessairement sur un nombre pair de cases. Comme nous devons aller chercher le pion de droite pour pouvoir gagné nous devons déplacer les pions de la ligne de gauche vers la gauche, comme montré ci-dessous :

$$X\ O\ X\ X\ ---\ X\ X\ X$$

$$X\ X\ O\ O\ ---\ X\ X\ X$$

Comme par construction la partie droite n'est pas un bout de ligne il est impossible de déplacer le pion à l'extrémité droite vers la gauche. De plus il est impossible de faire un mouvement à l'intérieur de la ligne de gauche sans qu'il soit perdant car nous aurions deux trous consécutifs sans aucun bout de chaines. Comme la nouvelle ligne de gauche est un bout de chaine, on la réduit en un unique pion à droite et l'on se retrouve comme précédemment.

$$X\ O\ X\ X\ \ ---\ \ X\ X\ X$$

$$X\ X\ O\ O\ \ -\ -\ -\ \ X\ X\ X$$

$$O\ O\ X\ O\ X\ X\ \ ---\ \ X\ X\ X$$

Nous savons que le nombre de pions est pair dans la ligne de droite et que les pions sont forcément consécutifs d'après les arguments cités précédemment. Nous pouvons donc représenter la configuration gagnante comme ci-dessous :

$$X\ O\ [X\ X]\ ---\ [X\ X]$$

En itérant les mouvements précédents on trouve que cette configuration est bel et bien gagnante et est l'unique solution.

Proposition 8. *Si on néglige les bouts de chaine, alors on peut dire qu'il n'existe que des espaces d'une case vide entre tous les pions d'un ensemble $\mathcal{E}$ quelconque.*

Proposition 9. *Dans un ensemble $\mathcal{E}$ gagnant il y a au plus une case vide.*

Supposons qu'un ensemble $\mathcal{E}$ contienne deux cases vides séparées et aucun bout de chaine. Le seul mouvement peut-être gagnant consiste à combler une case vide. Nous avons alors deux cases vides consécutives mais par construction cet ensemble $\mathcal{E}$ ne correspond à celui gagnant décrit précédemment. Donc un ensemble $\mathcal{E}$ contenant deux cases vides séparées ou plus est forcément perdant.
Donc un ensemble $\mathcal{E}$ gagnant sans bout de chaine comporte au plus :
- soit un ou deux pions consécutifs et aucune case vide,
- soit deux lignes comportant un nombre de pions consécutifs de parité différente séparés par une case vide.

Pour connaitre la construction générale des ensembles décrits deuxièmement on cherche où placer la case vide tel que lors du seul déplacement possible, tout en restant gagnant, une des deux nouvelles lignes créées soit un bout de lignes. On obtient alors deux constructions possibles :

$$X\ O\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (1)$$

$$X\ X\ X\ X\ O\ X\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (2)$$

Le premier est d'après les études différentes un ensemble gagnant.
On propose maintenant la solution pour résoudre la deuxième ligne

$$X\ X\ X\ X\ O\ X\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (2)$$

$$X\ X\ O\ O\ X\ X\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (2)$$

$$O\ O\ X\ O\ X\ X\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (2) = (1)$$

Finalement on voit qu'on se ramène à la première solution.

Donc tous les ensemble $\mathcal{E}$ gagnant sans bout de chaine sont les ensembles des types suivants :

$$X\ X\ O \qquad (1)$$

$$X\ O\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (2)$$

$$X\ X\ X\ X\ O\ X\ [X\ X]\ ---\ [X\ X] \qquad (3)$$

2 Le solitaire dans le plan

2.1 Résolution

Nous allons utiliser pour cela une combinaison de trois coups, qui permet de supprimer trois pions (puisque chaque coup supprime un pion) alignés, du moment qu'il y a un pion sur le côté et une case vide de l'autre :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline O & & \\ \hline \mathbf{X} & X & X \\ \hline \mathbf{X} & & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline X & & \\ \hline O & \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \hline O & & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{X} & & \\ \hline \mathbf{X} & O & O \\ \hline O & & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline O & & \\ \hline O & O & O \\ \hline X & & \\ \hline\end{array}$$

Avec cela nous pouvons résoudre tous les carrés de côté non multiples de trois :
On supprime les lignes de trois de manière à garder toujours un ensemble de pions compact, c' est à dire que chaque pion en touche un autre par le côté. Ainsi on arrive soit au pion seul tant désiré, soit à deux pions côte à côte, soit au carré 2×2 dont voici la résolution :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & O \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{X} & O \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{X} & O \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline O & O & \mathbf{X} \\ \hline O & O & \mathbf{X} \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & X \\ \hline O & O & O \\ \hline O & O & O \\ \hline\end{array}$$

Démonstration. [5] La dimension du côté du carré de pions n'étant pas multiple de trois, le nombre de pions ne l'est pas, donc en supprimant les pions par paquets de trois, ce qui est possible puisqu'il y aura toujours un pion à côté d'une ligne de trois puisque le carré est une configuration compacte et que notre jeu conserve cette compacité et qu'il y aura des cases vides à côté vu que l'extérieur en est plein, on finira avec un ou deux pions(et l'un sera ravi de manger l'autre)(le carré 2×2 est une autre manière de finir pour ceux qui finiraient avec le pion seul). □

Cela marche aussi pour les rectangles et certaines configurations compactes, pour le reste cela dépend des cas, il faut ramener les pions côte à côte pour qu'ils puissent interagir (après avoir vérifié si gagner était possible).

2.2 Peut-on être sûr de perdre ?

Pour démontrer que certaines configurations ne sont pas résolubles, nous allons utiliser un coloriage.
Nous colorions les cases en trois couleurs, que nous appellerons A, B et C, selon un cycle :

A	B	C	A
C	A	B	C
B	C	A	B
A	B	C	A

Remarque :
Deux manières de colorier, symétriques mais non équivalentes, existent. Avant de conclure, il faut tester les deux.

Ce sont bien les cases qui sont coloriées, mais, sur nos schémas, nous noterons A les pions sur les cases de couleur A, B les pions sur les cases de couleur B, C les pions sur les cases de couleur C et O les cases vides.

$\boxed{\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}\,|\,\mathrm{O}} \rightarrow \boxed{\mathrm{O}\,|\,\mathrm{O}\,|\,\mathbf{C}}$

L'intérêt de ce coloriage est que tout pion sur une case d'une couleur donnée sautera toujours par-dessus un pion sur une case d'une autre couleur et atterrira toujours sur une case de la troisième couleur.
On considère le nombre de pions sur chaque couleur de case.
Puisque le nombre de pions sur chacune des couleurs augmente ou diminue de 1 à chaque mouvement (en effet il est retiré un pion dans chacune des couleurs des cases du pion sautant et sauté et rajouté un dans la couleur d'arrivée),
LA PARITE DU NOMBRE DE PIONS SUR CHAQUE COULEUR CHANGE A CHAQUE MOUVEMENT.

Proposition 10. *Si la configuration est gagnante, alors le nombre de pions sur la couleur sur laquelle le solitaire se terminera est d'une parité différente de celles des nombres de pions sur les autres couleurs.*

Démonstration. Pour tout solitaire gagnant, la parité du nombre de pions sur la couleur d'arrivée est différente de celles des autres couleurs (puisque sur cette première un pion reste et sur les autres aucun). Les parités changeant toutes à chaque fois, cette différence de parité est conservée. □

Remarque :
Il suffit que les parités soient égales dans l'un des coloriages pour que la configuration soit perdante.

Ce coloriage reste utilisable pour toutes les dimensions. Le reste des démonstrations d' irrésolubilité pour les dimensions strictement supérieures à un tient au fait que les pions aient un "potentiel de déplacement" limité et ne puissent parfois pas se rencontrer pour interagir. Cela reste à approfondir.
Un exemple :

Le carré 5×5 : $\begin{array}{ccccccc} o & o & o & o & o & o & o \\ o & A & b & c & A & b & o \\ o & c & A & b & c & A & o \\ o & b & c & A & b & c & o \\ o & A & b & c & A & b & o \\ o & c & A & b & c & A & o \\ \hline \end{array}$ avec $\begin{array}{c} 9A \\ 8b \\ 8c \end{array}$ est-il gagnant ? oui !

Regardez

.	**B**	.	.	.	.	.
.	.	b	c	A	b	.
.	.	A	b	c	A	.
.	b	c	A	b	c	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

puis

.	**B**	.	.	.	.	.
.	**A**	.	.	A	b	.
.	.	A	b	c	A	.
.	b	c	A	b	c	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

puis

.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	A	b	.
.	**C**	**A**	**b**	c	A	.
.	b	c	A	b	c	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

et les trois pions CAb en gras disparaissent exactement comme les Abc au dessus

→

.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	**A**	**b**	.
.	.	.	.	c	A	.
.	b	c	A	b	c	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.
.	.	.	.	.	.	.

→

.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	**C**
.	.	.	.	c	**A**	.
.	b	c	A	b	**c**	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

→

.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	**B**	**C**
.	.	.	c	.	.
b	c	A	b	.	.
A	b	c	A	b	.
c	A	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	.	.	.	.
.	.	.	**A**	.
.	.	.	c	.
b	c	**A**	**b**	.
A	b	c	A	b
c	A	b	c	A

to

.	.	.	.	.	.
.	.	.	**A**	.	.
.	.	.	**c**	.	.
b	c	.	.	**C**	.
A	b	c	A	b	.
c	A	b	c	A	.

$\mapsto$

.	.	.	.	.	.	
.	b	c	.	**B**	**C**	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	.	.	.	.	.	.
.	b	c	**A**	.	.	.
.	A	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

etc

.	**C**	.	.	.	.	.
.	.	**c**	**A**	.	.	.
.	.	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	**C**	.	.	.	.	.
.	**B**	.	..	.	.	.
.	.	b	c	A	b	.
.	c	A	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	**A**	b	c	A	b	.
.	**c**	A	b	c	A	.

la ligne bcA est partie

B	.	.	.	.	.
.	**B**	c	A	b	.
.	**A**	b	c	A	.

$\rightarrow$

B	**C**	.	.	.	.
.	.	c	A	b	.
.	.	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	.	**A.**	.	.	.
.	.	c	A	b	.
.	.	b	c	A	.

$\rightarrow$

.	.	A	.	.	.
.	.	c	A	b	.
.	.	b	c	A	.

Notes d'édition :

- [1] La notation $L_n(i,j)$ laisse penser que la ligne est entièrement déterminée par les paramètres n, i, j, ce qui n'est pas le cas.
- [2] Dans cette partie, on cherche des conditions suffisantes permettant d'affirmer qu'une situation n'est pas gagnante.
- [3] Ce résultat ne semble pas vraiment utile ; de plus, il n'est pas spécifique au jeu du solitaire.
- [4] Le relecteur ne comprend pas cette affirmation.
- [5] Démonstration de quel énoncé ?