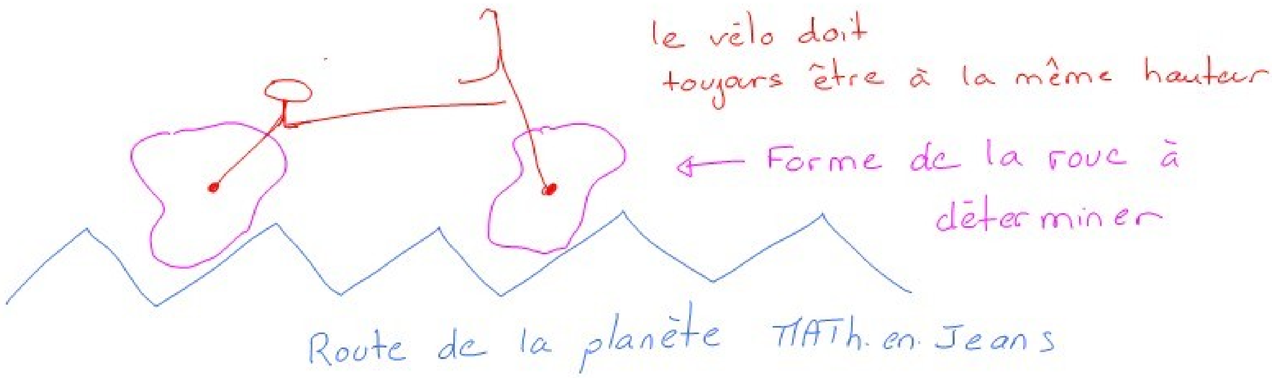
La roue de vélo
2014-2015

Par Daphné REGGIANI (2de) et Eloïse DOYARD (1°S) au lycée Jean Giono de Turin, Antonin ROSA-MARTIN, Sylvain JEANPIERRE, Anthony THEROUX et Benjamin CHOPARD élèves de première S au Lycée d'Altitude de Briançon et VODA Mircea (IX), HOREA Cristiana (X), PECICAN Senya (X), CIOBAN Iulia (XI), POP Lorena (XI) et TOPAN Andreea (XI) élèves du Colégiul National Emil Racovita de Cluj.

Enseignants : Nicolas SANS, Hubert PROAL, Mickaël LISSONDE, Valentina Vasilescu, Adrian-Vasile Andrea et Ariana-Stanca Vacaretu
Chercheurs : Julyan Arbel (Collegio Carlo Alberto-Turin), Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis) et Adela Lupescu (Universitatea Bades-Bolyai de Cluj-Napoca)

Présentation du sujet

Les routes de la planète *MATh.en.JEAN'S* sont en forme de dents de scie. Quelle forme doit-on donner aux roues des vélos de cette planète pour que le cycliste ne se rende pas compte de ce problème ?



Résultats obtenus

La compréhension qu'il y avait un problème dans leurs résultats. Ce sujet a été repris cette année par les élèves pour corriger leur problème. (1)

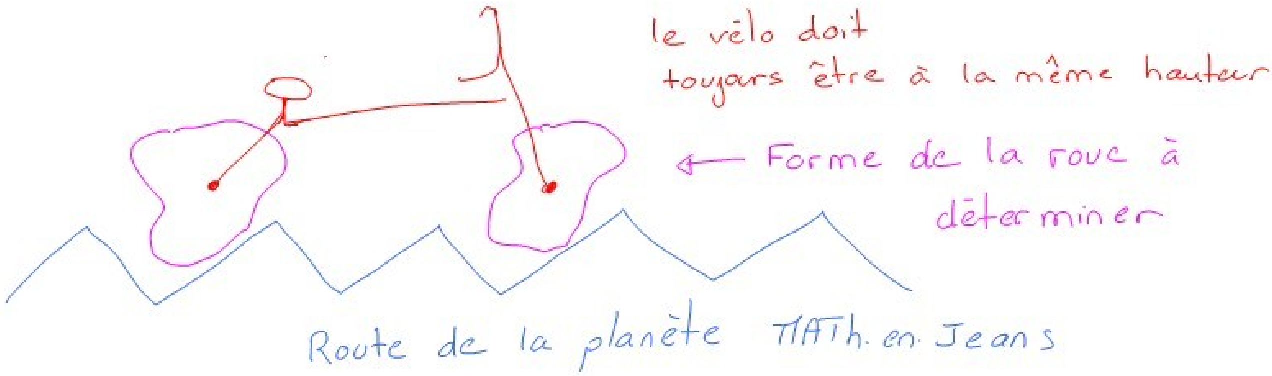
Valorisations des travaux

Présentations au Forum des mathématiques d'Aix-en-Provence (8 et 9 janvier 2015)
Présentations au Forum des mathématiques vivantes à Marseille (20 mars 2015)
Participation au congrès *MATh.en.JEANS* d'Avignon (26-27-28 mars 2015)
Participation au congrès *MATh.en.JEANS* de Vienne (12-13-14 mars 2015)
Présentations lors du « Forum of the math research projects » à Cluj-Napoca (mars 2015)
Présentations lors du « Math Youth Forum » à Cluj-Napoca (mai 2015)
Présentations lors du salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris et quatrième prix au concours André Parent (juin 2015)

Texte de l'article

Sujet :

Les routes de la planète *MATh.en.JEAN'S* sont en forme de dents de scie. Quelle forme doit-on donner aux roues des vélos de cette planète pour que le cycliste ne se rende pas compte de ce problème ?



I. Idée de Benjamin

Après quelques essais au tableau ou sur Geogebra, Benjamin a fait la remarque suivante qui nous a débloqués.

Quand l'axe de la roue va de B_1 à B_3, la roue aura fait un tour (2). Du coup quand l'axe est en B_2 (le milieu de $[B_1B_3]$) elle aura fait un demi tour. Nous avons ainsi deux rayons de la roue (celui à 0° et celui à 180°), voir illustration 1. (3)

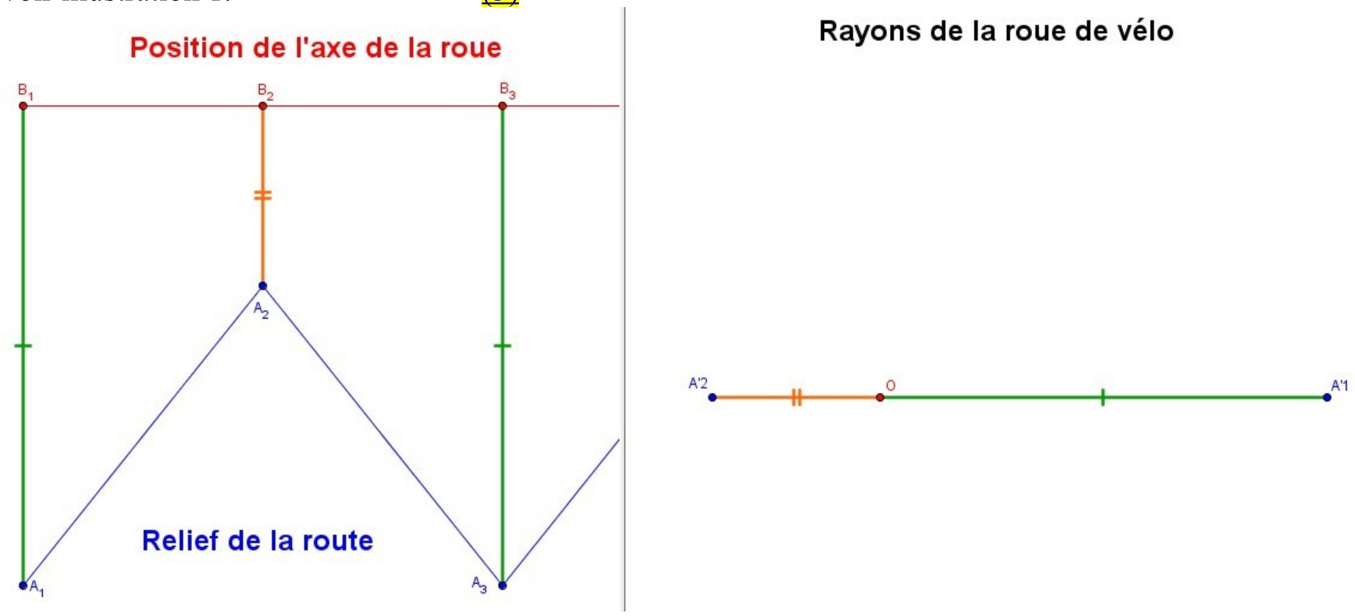


Illustration 1: trois positions de la roue et les rayons correspondants

Si nous poursuivons ce type de raisonnement, nous obtenons les rayons à 90° et à 270°, puis peu à peu la forme de la roue (illustrations 2 et 3).

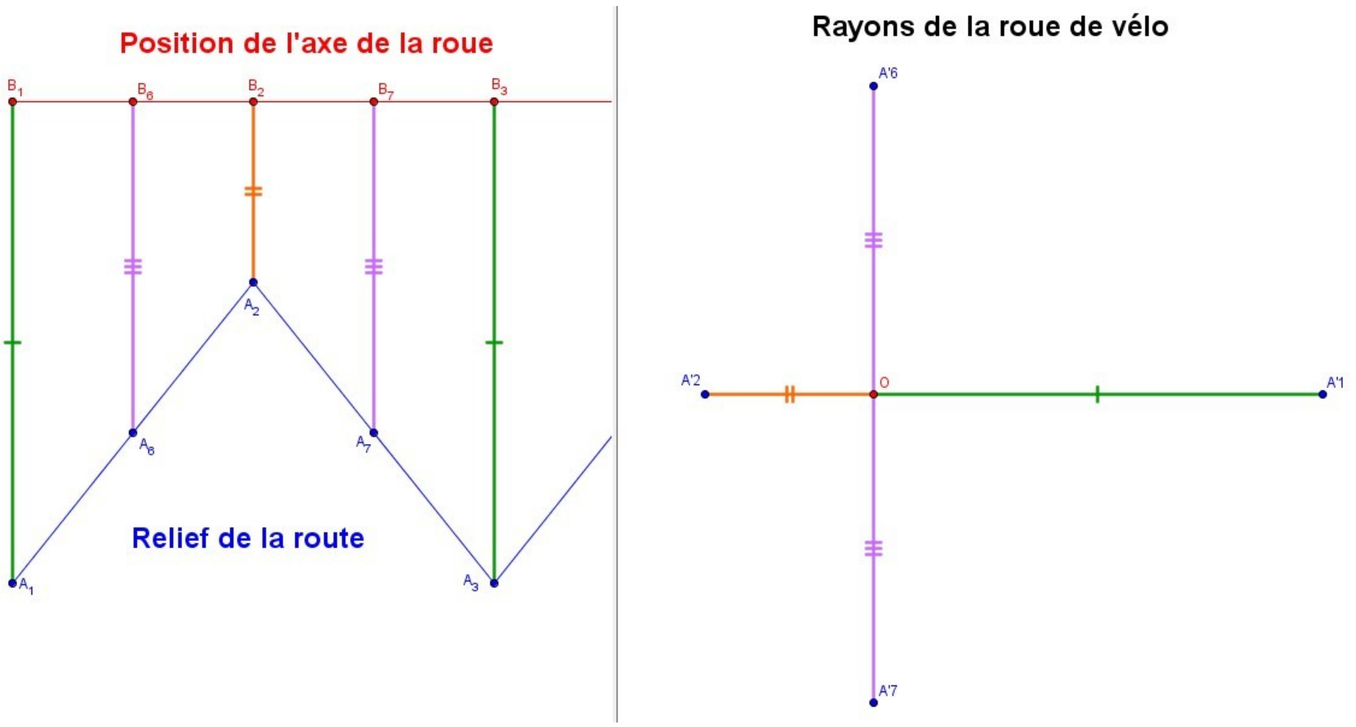


Illustration 2: cinq positions de la roue et les rayons correspondants

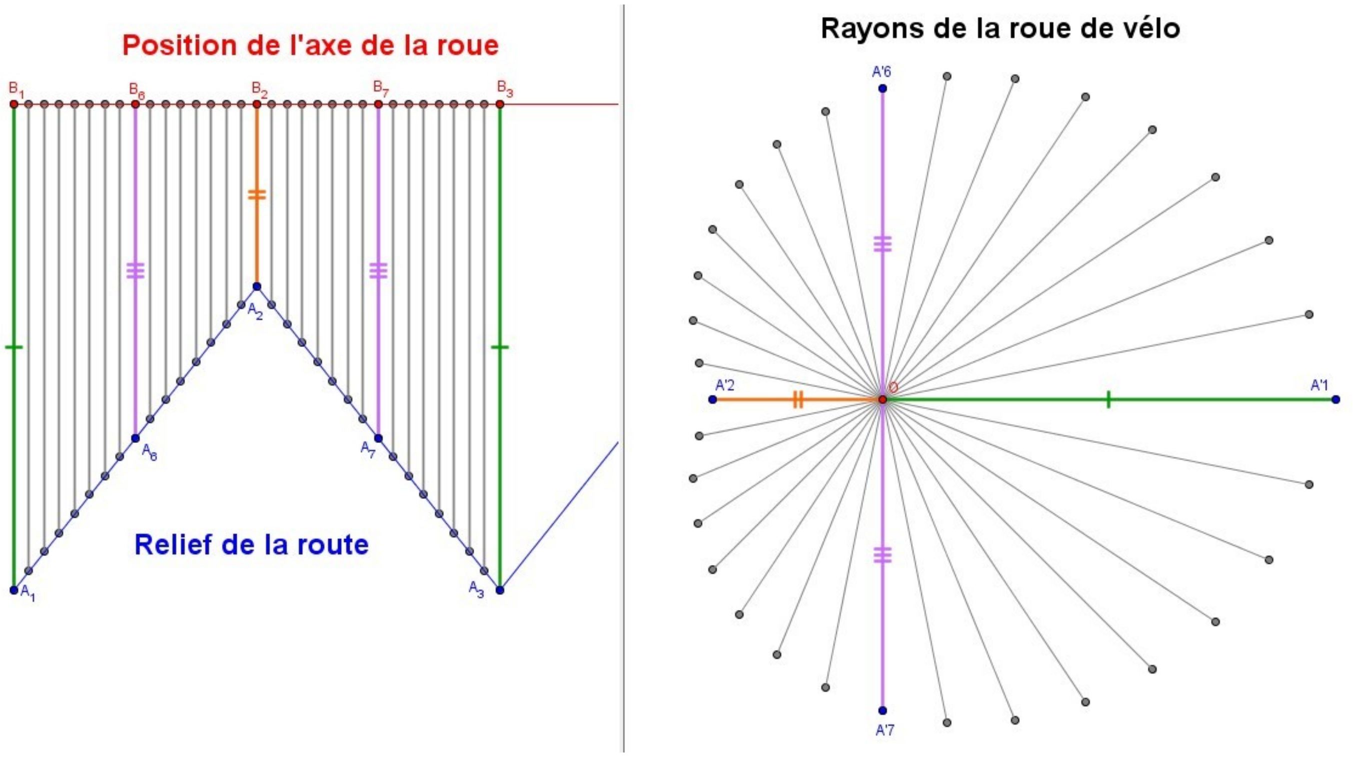


Illustration 3: plusieurs positions de la roue avec les rayons correspondants

II. Forme de roue et son équation

A partir de l'idée de Benjamin, nous avons exprimé le rayon de la roue en fonction de la position de son axe.

Pour $x \leqslant \pi$, $\mathrm{BA}=8-\frac{5}{\pi}x$ et pour $x>\pi$, $\mathrm{BA}=8-\left(\frac{-5}{\pi}x+10\right)=\frac{5}{\pi}x-2$ (illustration 4) (4)

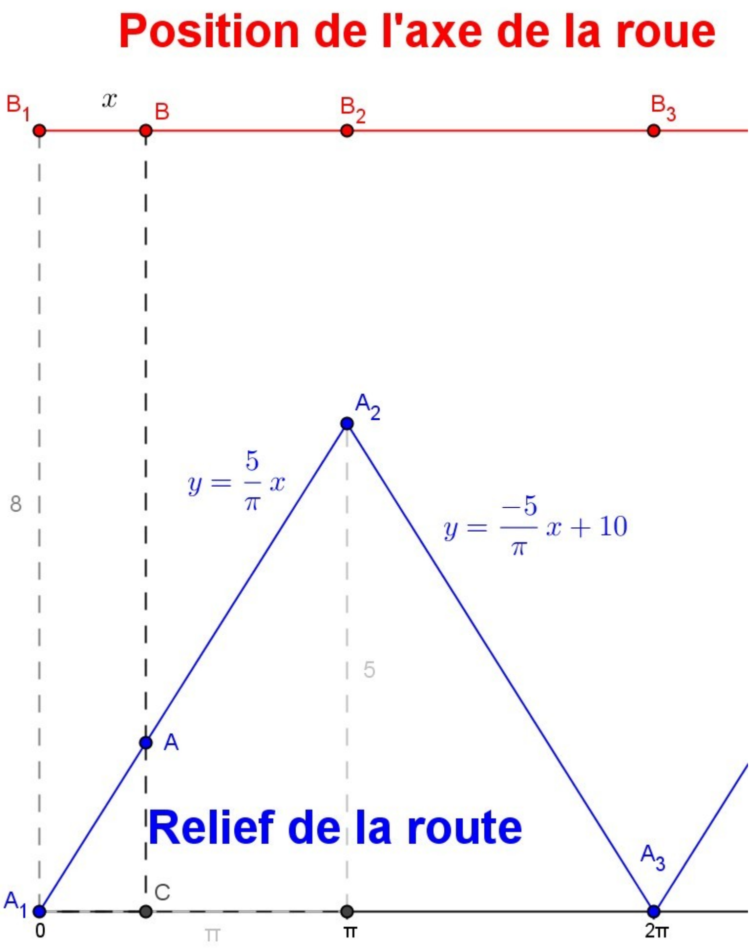


Illustration 4: détermination du rayon de la roue BA en fonction de x=BB₁

Il faut aussi savoir que quand B aura parcouru 2π, la roue aura fait un tour (2π), donc pour $x=\mathrm{B_1B}$ nous avons un angle de roue de x radian.

L'équation en polaire de la roue est $r(x)=8-\frac{5}{\pi}x$ si $x\leqslant\pi$ et $r(x)=\frac{5}{\pi}x-2$ si $x>\pi$ (illustration 5)

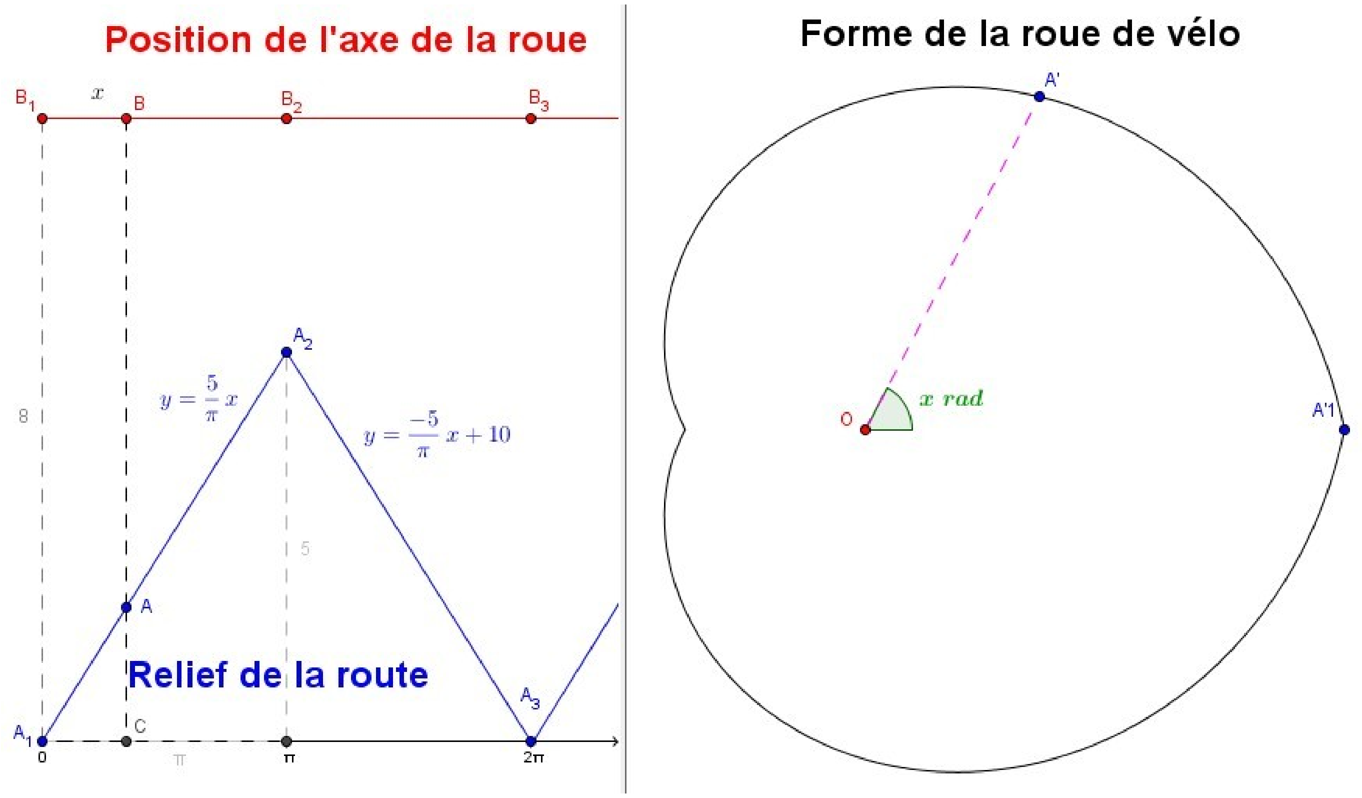


Illustration 5: relief et forme de la roue correspondante

III. Autres formes de roues

Plus la dent de scie est petite, plus la roue ressemble à un cercle. Normal car alors la route est presque plate (illustration 6).

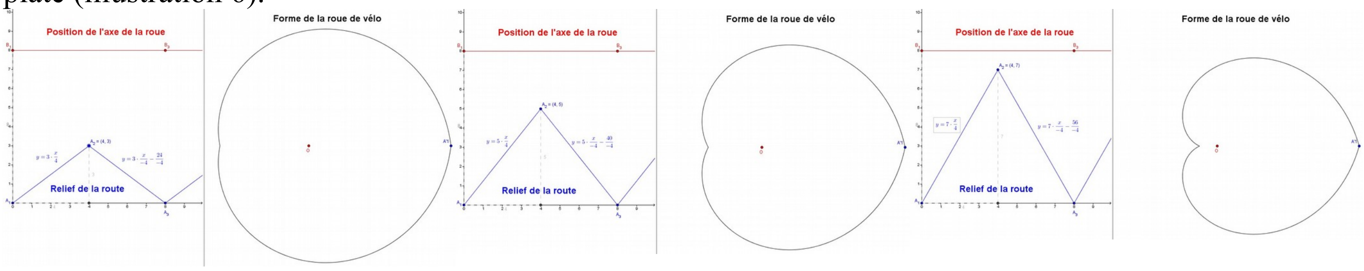


Illustration 6 : évolution de la forme de la roue en fonction de la hauteur de la dent

Quand nous modifions l'abscisse de la pointe de la dent, nous obtenons les roues suivantes (illustration 7) :

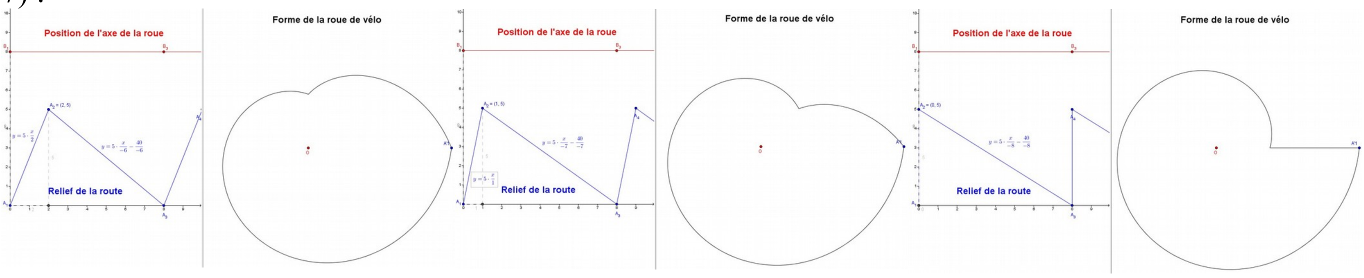


Illustration 7 : évolution de la forme de la roue en fonction de l'abscisse du sommet de la dent

IV. Problème de Turin

Lors de notre séminaire à Turin, nos collègues du lycée Jean Giono nous ont fait remarquer que nos roues roulaient AVEC GLISSEMENT. C'est-à-dire que le périmètre d'une roue était supérieur à la longueur de la route.

Par exemple, si on reprend la situation de l'illustration 5.
La longueur de la route (sur une période) est $2\sqrt{\pi^2+25} \simeq 11{,}81$
La périmètre de la roue est 36,07 (calculé avec l'aide du logiciel Geogebra)

Nous ne pouvons que jouer sur la position de l'axe de la roue. Comment faire pour que les deux valeurs correspondent ?
Comment calculer le périmètre d'une roue ?

Après discussion avec nos enseignants, ils nous ont proposés une manière de calculer le périmètre de la roue (voir annexe 1).

Nous avons le périmètre de la roue $P(h,l)=2\times\pi\times h-\pi\times l$ et la longueur de la route (sur une période) $\mathrm{L}(1)=2\times\sqrt{\pi^2+1^2}$ (5)
Pour résoudre le problème de Turin, il faut trouver *h* et *l* pour que les deux formules soient égales.
Nous allons trouver *h* en fonction de *l*.

$$P(h,l)=L(l) \Leftrightarrow 2\pi h-\pi l=2\sqrt{\pi^2+l^2} \Leftrightarrow 2\pi h=2\sqrt{\pi^2+l^2}+\pi l \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{\pi^2+l^2}}{\pi}+\frac{l}{2}$$

Exemple pour *l*=1, il faudra prendre $h=\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\pi}+\frac{1}{2}$

En faisant fonctionner notre précédent modèle sur geogebra ou sur les maquettes, nous nous sommes rendus compte d'un deuxième problème.

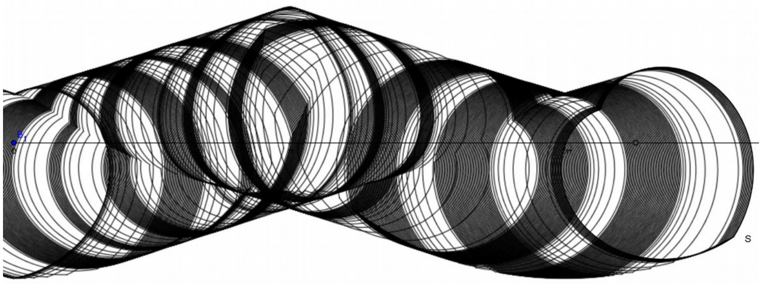


Illustration 8: trace du roulement de la cardioïde

Si l'on regarde la trace du point le plus bas, nous obtenons bien la dent de scie mais ce point n'est pas forcément le point de contact de la roue avec la route (illustrations 8 et 9)

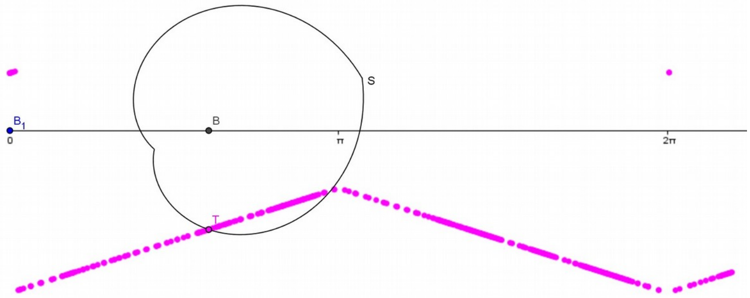


Illustration 9: trace du point à l'aplomb de l'axe

Actuellement nous n'avons pas trop d'idées pour résoudre ce nouveau problème. Toutefois en faisant tourner la roue d'un tour sur plusieurs dents il semblerait que ce problème anguleux soit atténué.

Les élèves de Turin signalent aussi que la fonction $h(l)=\frac{\sqrt{\pi^2+l^2}}{\pi}+\frac{l}{2}$ a du sens que si *h*>*l*.

$$h>l\Leftrightarrow\frac{\sqrt{\pi^2+l^2}}{\pi}>\frac{l}{2}\Leftrightarrow\pi^2+l^2>\frac{l^2\pi^2}{4}\Leftrightarrow l^2(\pi-4)<4\pi^2\Leftrightarrow l<\sqrt{\frac{4\pi^2}{\pi^2-4}}\approx 2{,}59$$

Vérification graphiquement (illustration 10)

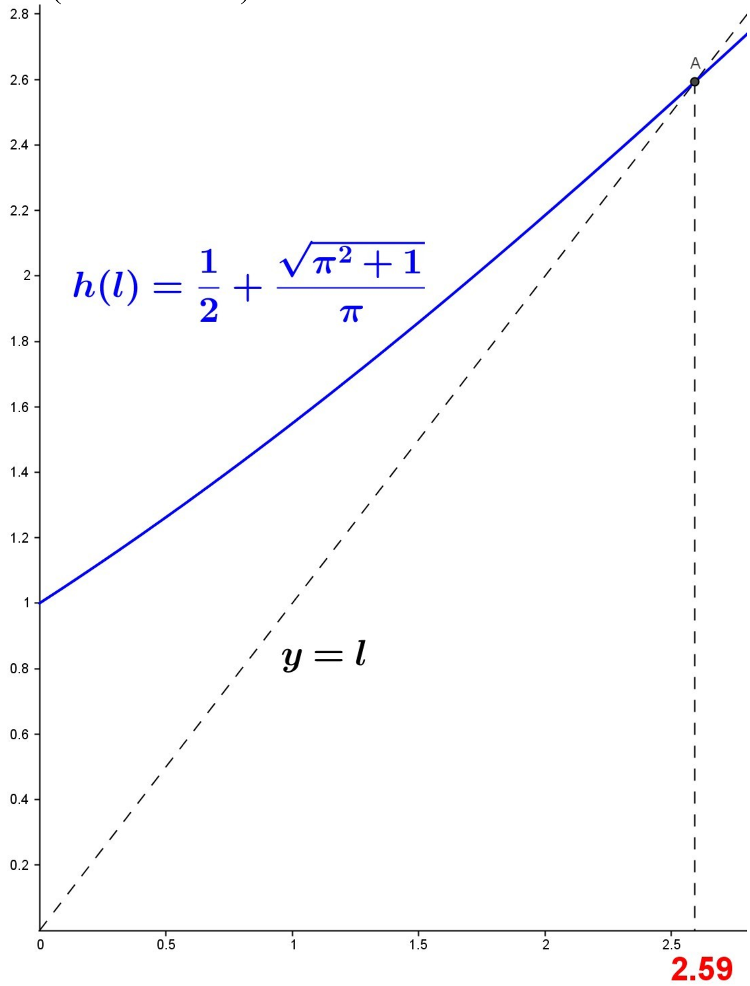


Illustration 10: graphique de h en fonction de l

V. Les roues sur plusieurs dents.

Lors du congrès *MATh.en.JEANS* à Avignon, un de nos chercheurs nous a montrés la forme d'une roue pour 4 dents et il semblerait qu'augmenter le nombre de dents sur une période de roue atténue de nombreux problèmes.
Justement les turinoises ont eu des idées sur des roues à plusieurs dents.

La roue a différentes formes selon le nombre de dents que l'on mettra entre 0 et 2π (illustration 11). Le problème que la roue « mord » la route semble se résoudre sur nos premiers travaux (illustration 12), mais comme nos collègues de Briançon, il faut déterminer *h* en fonction de *l*, pour que le périmètre de la roue corresponde à la longueur de la route.

Ce problème est dur à se mettre sous la dent mais nous espérons pouvoir vous présenter notre solution à Paris.

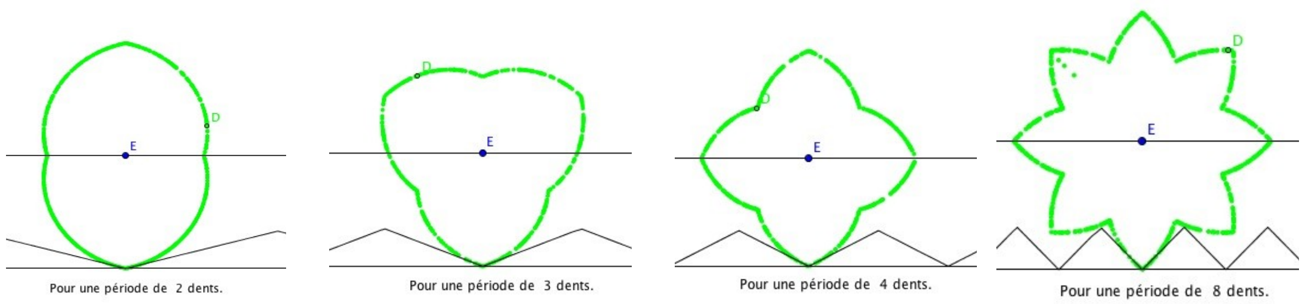


Illustration 11 : formes des roues en fonctions du nombre de dents

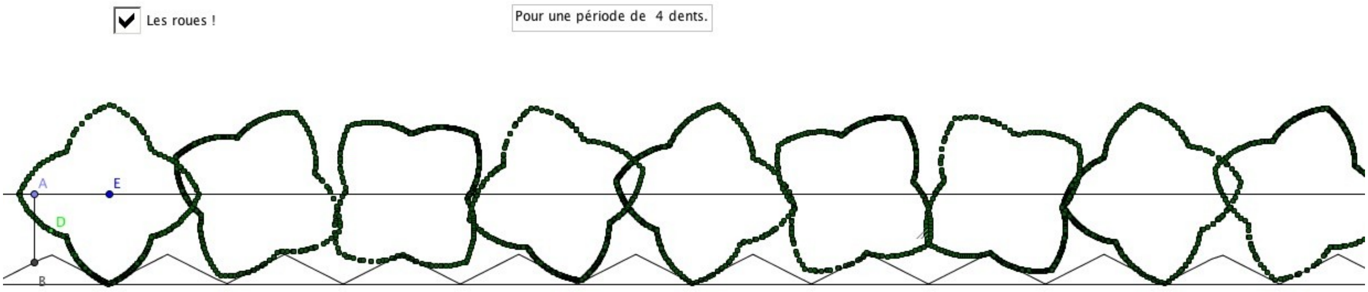


Illustration 12 : roue à 4 dents qui semble rouler sans mordre la route

Voici donc notre problème :
Sur une longueur de 2π nous avons n dents identiques de hauteur l. (6)

VI. Etude des élèves roumains.

Les élèves de Cluj sont d'abord partis sur une autre idée. Si on prend une roue circulaire, on constate que son centre varie très peu. Plus le rayon est grand, moins il y aura de variations (illustration 13).

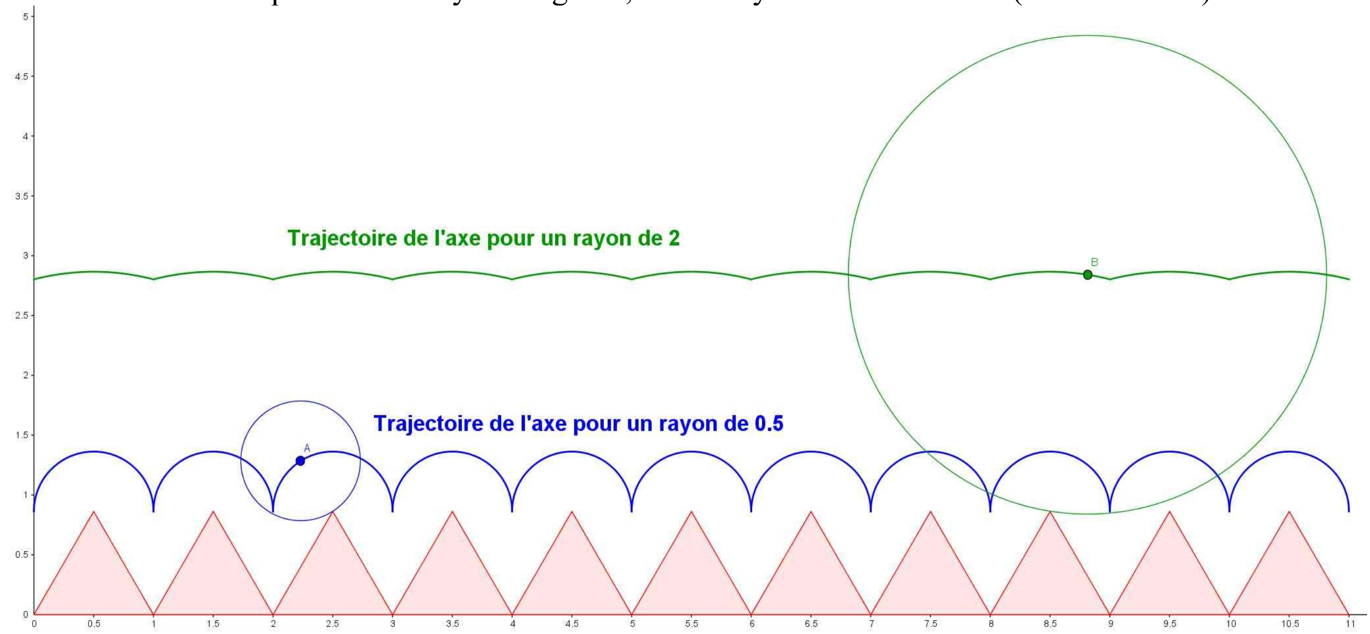


Illustration 13: trajectoires de l'axe d'une roue circulaire pour deux rayons

Puis nous sommes parti sur l'idée de roue dentée (engrenage). Nos premiers essais, à 6 dents, nous ont conduit au même type de trajectoire de l'axe (illustration 14).

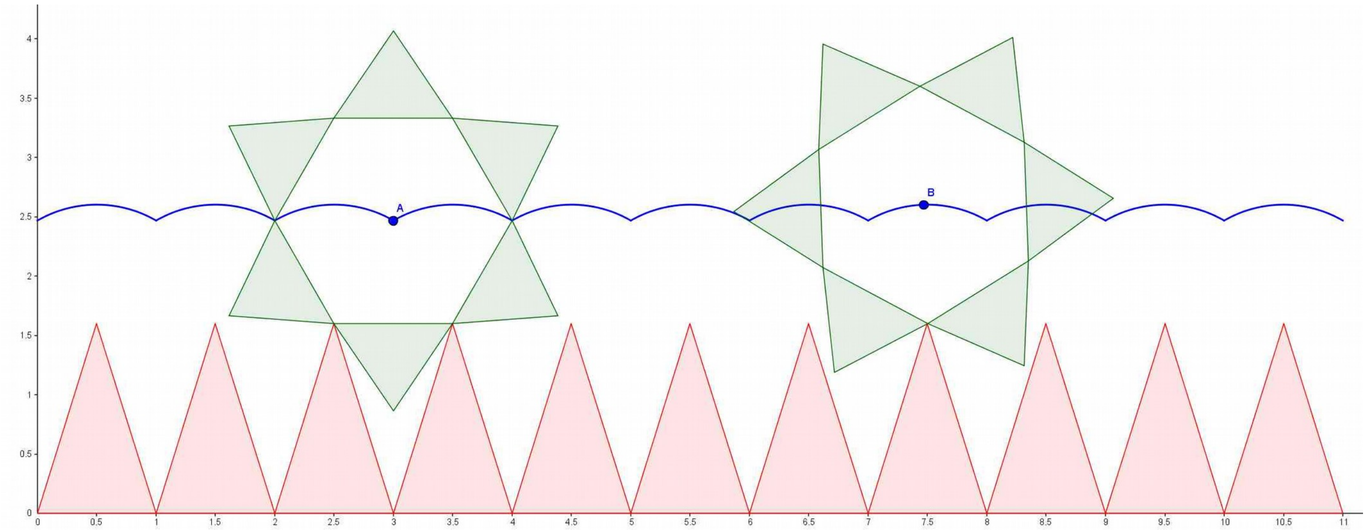
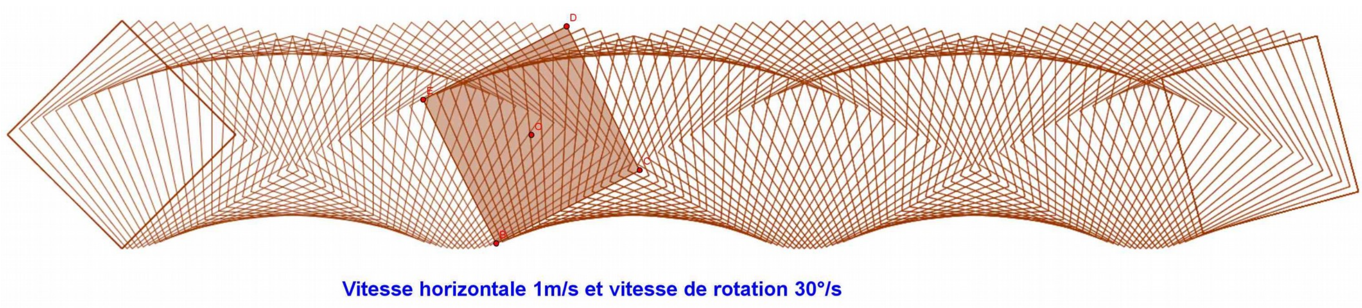
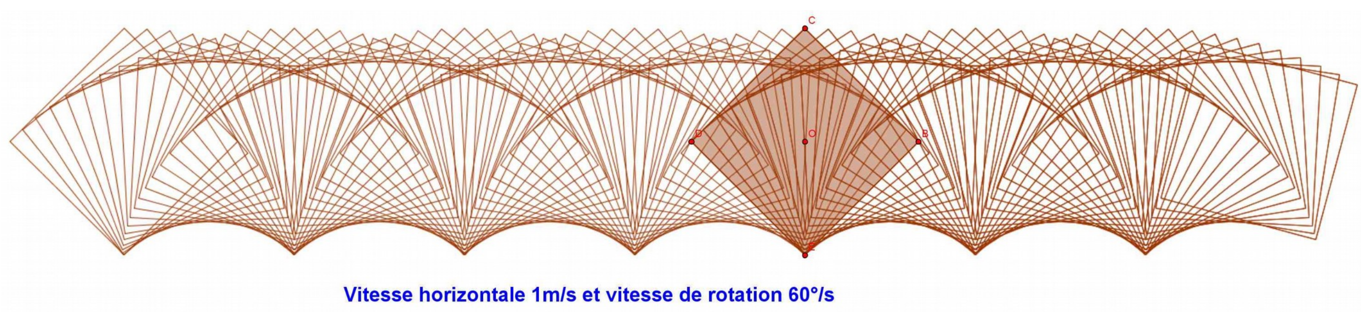
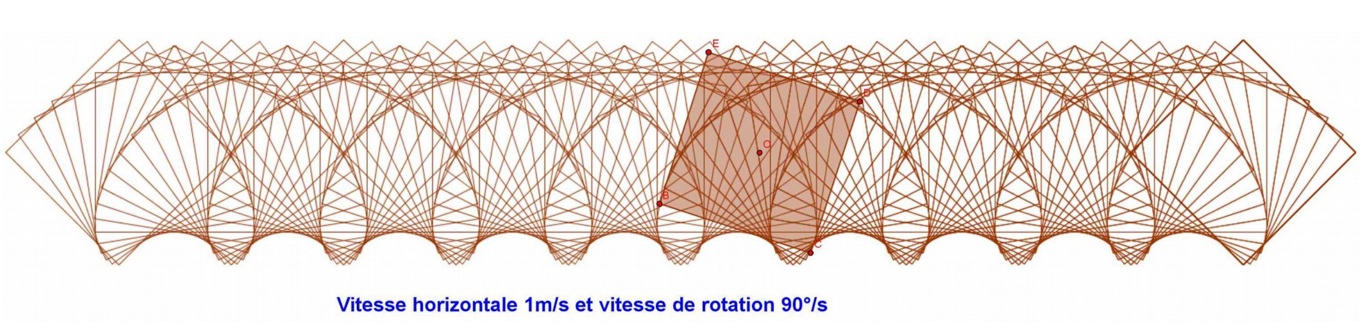


Illustration 14: trajectoire de l'axe d'une roue à 6 dents

Nous avons pris le problème dans l'autre sens en faisant rouler une roue carrée par exemple et en regardant la forme de la route que nous obtenions.
Quand on fait rouler un carré il y a deux vitesses à tenir compte. La vitesse de déplacement de son centre et sa vitesse de rotation. Selon comment est l'une par rapport à l'autre , la roue va patiner ou glisser.







Dans tous les cas, nous n'arrivons pas à obtenir des routes en dents de scie.

Annexe I.
La roue de vélo
Calcul du périmètre de la roue

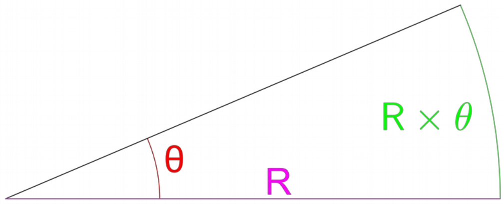


Figure A-1 : longueur d'un arc de cercle

Il faut savoir que la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle θ (en radian) est Rθ (figure A-1)
L'équation polaire de la demi roue est $r(x)=h-\frac{l\,x}{\pi}$ si $x\leqslant\pi$ (figure A-2)

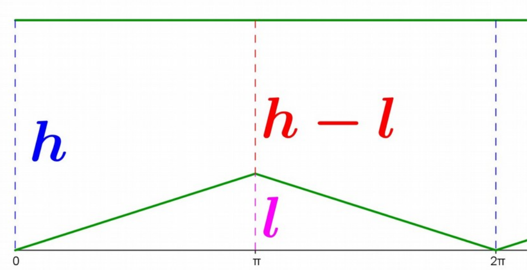


Figure A-2 : schéma pour expliquer les paramètres h et l

Nous divisons l'angle π en n angles identiques à $\frac{\pi}{n}$ (on prendra n grand par la suite).
Nous pouvons considérer que l'arc de roue d'angle π/n est proche de l'arc de cercle (figure A-3) (7)

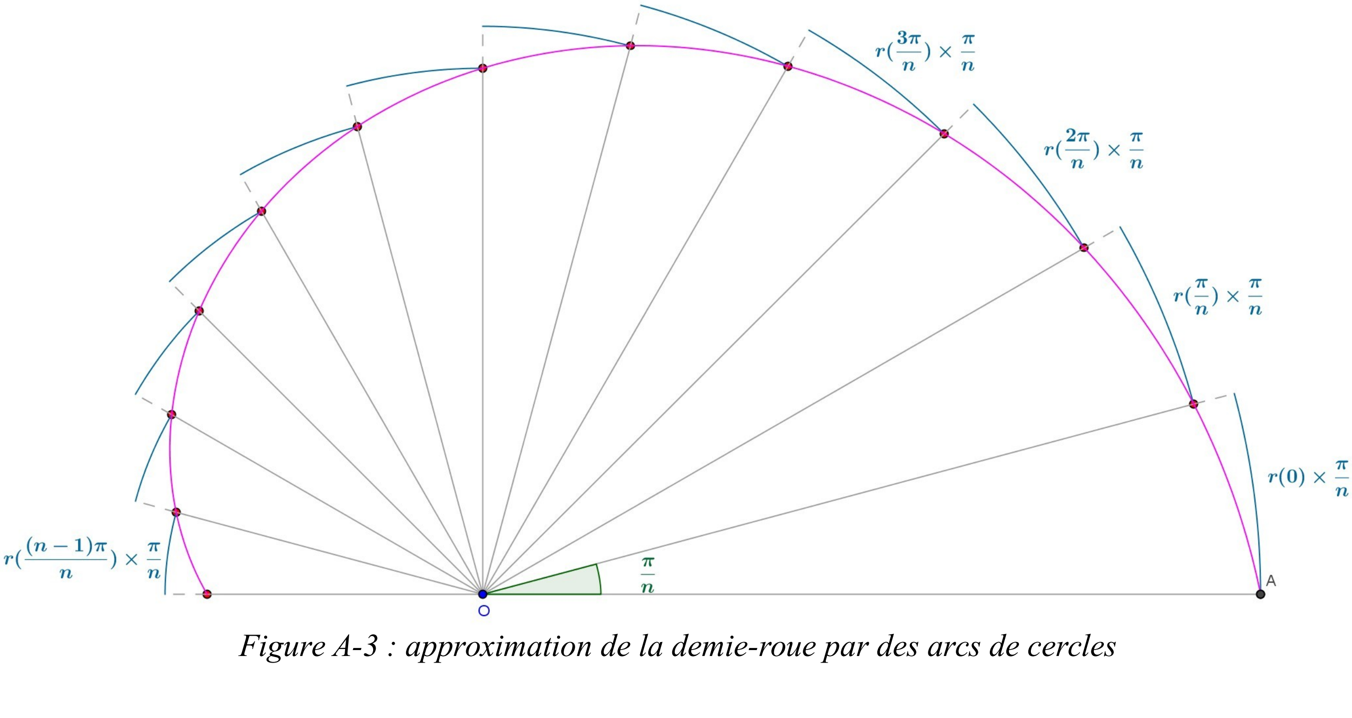


Figure A-3 : approximation de la demie-roue par des arcs de cercles

Si nous faisons la somme de ces n arcs de cercles, nous obtenons :

$$r(0)\times\frac{\pi}{n}+r\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\frac{\pi}{n}+r\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\frac{\pi}{n}+...+r\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\times\frac{\pi}{n}=\left(r(0)+r\left(\frac{\pi}{n}\right)+r\left(\frac{2\pi}{n}\right)+...+r\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)\times\frac{\pi}{n}$$

Ce qui donne $\left(h+h-\frac{l\pi}{n\pi}+h-\frac{2\pi l}{n\pi}+\ldots+h-\frac{(n-1)\pi l}{n\pi}\right)\times\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\left(nh-\frac{l}{n}-\frac{21}{n}-\frac{31}{h}+......+\frac{(n-1)l}{n}\right)$

$$\frac{\pi}{n}\left(nh-\frac{l}{n}(1+2+3+\ldots+(n-1))\right)=\frac{\pi}{n}\left(nh-\frac{l}{n}\left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{n}\left(nh-\frac{(n-1)l}{2}\right)=\pi h-\frac{\pi(n-1)l}{2n}$$

Puis on multiplie par 2 pour avoir une approximation de la totalité du périmètre de la roue

$2\pi h-\frac{\pi(n-1)l}{n}$ Quand n est grand alors $\frac{\pi(n-1)l}{n}$ est proche de πl.

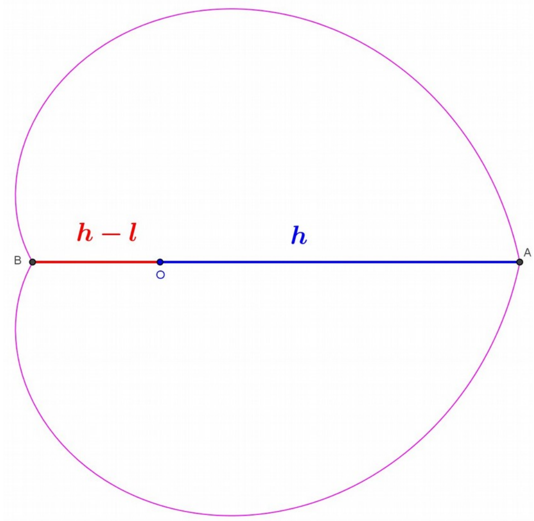


Figure A-4 : valeurs caractéristiques de la cardioïde

Conclusion : le périmètre de la roue (cardioïde) est $2\pi h$-πl (figure A-4)

Notes d'édition

(1) Les élèves se sont rendus compte d'une erreur dans leurs résultats après avoir rédigé cet article. Cependant, certains résultats restent justes et les problèmes rencontrés sont en eux même des résultats, nous avons donc décidé de publier cet article. Ainsi, les élèves ont étudié plusieurs formes de roues et montré que les roues circulaires ne fonctionnent pas mais si l'on augmente le rayon la perturbation diminue. De plus, si l'on souhaite que le point de la roue en contact avec la route soit à la verticale du centre de la roue, que la roue fasse un tour par période de la route et que le glissement ne soit pas autorisé, alors il y a contradiction, cela ne fonctionne pas.

(2) Ce n'est pas toujours vrai (voir par exemple les roues de la figure 11). Il aurait peut-être été plus judicieux d'en faire une hypothèse :

"Si quand l'axe de la roue va de B1 à B3, la roue fait un tour complet, alors..."

(3) Cette construction n'est pas juste, comme expliqué dans la partie 4. L'une des raisons est que le centre de la roue n'est pas toujours situé à la verticale du point de contact, comme supposé ici.

(4) Les variables utilisées mériteraient d'être définies. Ici x désigne l'abscisse de l'axe de la roue, BA le rayon de la roue (qui sera plus loin désigné par r(x)) et A1A3 la distance entre deux points les plus bas sur la route consécutifs. A1A3 est fixé à 2π.

(5) On a le même problème que précédemment, h et l ne sont définis que dans la figure A-2 en annexe. Si on considère que les points les plus bas de la route sont d'ordonnée 0 alors h désigne l'ordonnée du centre de la roue et l l'ordonnée des points les plus hauts de la route. De plus la formule donnée est fausse (voir la note 7 ci-dessous).

(6) Ce qui est décrit ne semble pas être un problème (aucune question n'est posée, aucune réponse demandée) mais plutôt une nouvelle configuration, un nouveau modèle.

(7) L'arc de la roue n'est pas suffisamment bien approchée par l'arc de cercle. La formule obtenue n'est donc pas la bonne. Pour les curieux, la roue semble être une spirale d'Archimède.