La ronde des jetons

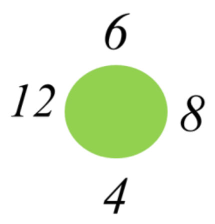
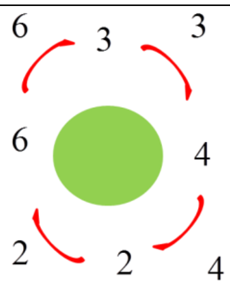
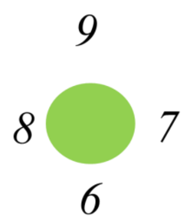
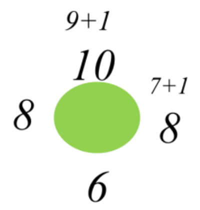
Elèves : Mattéo, Aubry, Damien, Benjamin, Nelly, Chloé, Laurie, Jade, Lilian, Marie Clotilde, Eloise, Gabin, Florian, Hugo, Maxence, Clément

Chercheur : Xavier Buff

Enseignants : Anaïs Dehez, Claire Flipo, Frédérique Fournier

1. Le problème

Xavier Buff, enseignant-chercheur de l'Université Paul Sabatier de Toulouse nous a présenté le jeu suivant suivi de la question …
Quatre joueurs autour d'une table…un meneur de jeu

Tour n°1			
Chaque joueur dispose d'un nombre pair de jetons	Chaque joueur fait passer à son voisin de gauche la moitié de ses jetons	Chaque joueur compte ses jetons	Si un joueur possède un nombre impair de jetons, le meneur de jeu lui en donne un de plus
			

La partie continue…
Que se passe-t-il au 2011ème tour ?? Et si on change le nombre de jetons au départ de la partie ?

2. La fin du jeu

Nous nous sommes tout de suite posés une première question : le jeu a-t-il une chance de s'arrêter ? si oui, à quelle condition ?
D'où la propriété que nous allons démontrer : ***le jeu s'arrête lorsque tous les joueurs ont le même nombre de jetons.***

Démonstration :
Supposons que chaque joueur dispose d'un nombre n pair de jetons.

Au tour suivant, chaque joueur fait passer $\frac{n}{2}$ jetons à son voisin de gauche et reçoit $\frac{n}{2}$ jetons.

Chaque joueur dispose donc de $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$ jetons soit n jetons !

Le jeu s'arrêtera donc dès que les joueurs ont le même nombre de jetons. Mais est-on sûr d'arriver à cette configuration à chaque fois ?

3. Les premiers pas

Nous avons donc joué, joué, joué …. Et noté, noté, noté tous les résultats …. Puis nous avons programmé sur tableur pour simuler des jeux …

A chaque fois, le jeu semblait s'arrêter, plus ou moins vite …même si on distribuait un grand nombre de jetons au départ ….

		JOUEURS			
		J1	J2	J3	J4
		500	100	1000	10000
tour n°	1	5250	300	550	5500
tour n°	2	5376	2776	426	3026
tour n°	3	4202	4076	1602	1726
tour n°	4	2964	4140	2840	1664
tour n°	5	2314	3552	3490	2252
tour n°	6	2284	2934	3522	2872
tour n°	7	2578	2610	3228	3198
tour n°	8	2888	2594	2920	3214
tour n°	9	3052	2742	2758	3068
tour n°	10	3060	2898	2750	2914
tour n°	11	2988	2980	2824	2832
tour n°	12	2910	2984	2902	2828
tour n°	13	2870	2948	2944	2866
tour n°	14	2868	2910	2946	2906
tour n°	15	2888	2890	2928	2926
tour n°	16	2908	2890	2910	2928
tour n°	17	2918	2900	2900	2920
tour n°	18	2920	2910	2900	2910
tour n°	19	2916	2916	2906	2906
tour n°	20	2912	2916	2912	2906
tour n°	21	2910	2914	2914	2910
tour n°	22	2910	2912	2914	2912
tour n°	23	2912	2912	2914	2914
tour n°	24	2914	2912	2914	2914
tour n°	25	2914	2914	2914	2914

	JOUEURS			
	J1	J2	J3	J4
	50	30	40	20
tour n° 1	36	40	36	30
tour n° 2	34	38	38	34
tour n° 3	34	36	38	36
tour n° 4	36	36	38	38
tour n° 5	38	36	38	38
tour n° 6	38	38	38	38

	JOUEURS			
	J1	J2	J3	J4
	10	12	14	16
tour n° 1	14	12	14	16
tour n° 2	16	14	14	16
tour n° 3	16	16	14	16
tour n° 4	16	16	16	16

	J1	J2	J3	J4
	10	100	10	50
tour n° 1	30	56	56	30
tour n° 2	30	44	56	44
tour n° 3	38	38	50	50
tour n° 4	44	38	44	50
tour n° 5	48	42	42	48
tour n° 6	48	46	42	46
tour n° 7	48	48	44	44
tour n° 8	46	48	46	44
tour n° 9	46	48	48	46
tour n° 10	46	48	48	48
tour n° 11	48	48	48	48

Nous avons donc exploré différentes pistes :
- que se passe-t-il à 2 joueurs ? à 3 joueurs ?

- le jeu s'arrête-t-il à 2 joueurs ? à 3 joueurs ?
- puis retour sur les expériences à 4 joueurs

4. Le jeu à 2 joueurs

Supposons que la partie se joue à deux joueurs

> Le joueur n°1 prend *a* jetons.
> Le joueur n°2 prend *b* jetons.

Avec *a* et *b* des nombres entiers pairs.

Premier tour :

Le joueur n°1 donne la moitié de ses jetons, soit $\frac{a}{2}$ jetons au joueur n°2. Il lui reste donc $\frac{a}{2}$ jetons.

Le joueur n°2 donne la moitié de ses jetons, soit $\frac{b}{2}$ jetons au joueur n°2. Il lui reste donc $\frac{b}{2}$ jetons.

Conclusion : Joueur n°1 : $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ jetons

Joueur n°2 : $\frac{b}{2}+\frac{a}{2}$ jetons

Les deux joueurs ont donc le même nombre de jetons à la fin du premier tour !

Conclusion : à deux joueurs, la partie prend fin à l'issue du 1er tour, chaque joueur dispose de la moyenne du nombre de jetons initialement distribués.

5. Le jeu à 3 joueurs

Tous nos essais nous ont conduits à des jeux qui se terminaient. Cela nous paraissait « logique » car petit à petit, l'écart entre le nombre de jetons de chaque joueur diminuait… pour arriver à zéro, et donc à la fin du jeu.

Nous nous sommes donc intéressés aux écarts du nombre de jetons entre les joueurs.

En voici un exemple : [1]

		JOUEURS			différence nombre jetons entre			total des différences	comparaison
		J1	J2	J3	J3 et J1	J1 et J2	J2 et J3		
	début	20	40	60	40	20	20	80	
tour n°	1	40	30	50	10	10	20	40	40
tour n°	2	46	36	40	6	10	4	20	20
tour n°	3	44	42	38	6	2	4	12	10
tour n°	4	42	44	40	2	2	4	8	6
tour n°	5	42	44	42	0	2	2	4	4
tour n°	6	42	44	44	2	2	0	4	2
tour n°	7	44	44	44	0	0	0	0	2

Nous avons alors émis cette conjecture : **la somme des différences diminue de moitié (à 2 près) d'un tour à l'autre.**
Et nous nous sommes attelés à sa démonstration.
Tout d'abord nous avons démontré le résultat suivant **: on rajoute au maximum 2 jetons à chaque tour.**
L'année dernière, dans le sujet étudié, nous avons démontré que :
- la somme de deux nombres de même parité est paire
- la somme de deux nombres de parité différente est impaire.

Ces résultats nous permettent de prouver pourquoi, on rajoute au maximum 2 jetons à chaque tour.
Il suffit d'envisager chaque configuration, et la parité de la moitié du nombre de jetons de chaque joueur :

- première configuration : même parité

Joueur	J 1	J 2	J 3	Pas de jeton à rajouter
Parité de la moitié du nombre de jetons	P	P	P	
Parité du nombre de jetons après tour suivant	p + p = pair	p+p = pair	p + p = pair	

Joueur	J 1	J 2	J 3	Pas de jeton à rajouter
Parité de la moitié du nombre de jetons	i	i	i	
Parité du nombre de jetons après tour suivant	i + i = pair	i+i = pair	i + i = pair	

- deuxième configuration : parité différente (2 pairs, 1 impair ou 1 pair et 2 impairs)

Joueur	J 1	J 2	J 3	2 jetons à rajouter
Parité de la moitié du nombre de jetons	i	p	p	
Parité du nombre de jetons après tour suivant	i + p = impair	i +p = impair	p + p = pair	

Joueur	J 1	J 2	J 3	2 jetons à rajouter
Parité de la moitié du nombre de jetons	i	i	p	
Parité du nombre de jetons après tour suivant	i + p = impair	i + i = pair	p + i = impair	

Conclusion : on rajoute 0 ou 2 jetons d'un tour à l'autre.

Retour à la somme des différences qui diminuerait de moitié (à 2 près) d'un tour à l'autre :

Supposons que nous ayons 3 joueurs, chacun disposant de a, b et c jetons (a,b,c pairs)
On présente un raisonnement pour $a<b<c$, mais il reste valable si a,b et c sont rangés différemment.

a<b<c				Différence entre nombre jetons			Somme des différences
	J 1	J 2	J 3	J 1 et J 3	J 1 et J 2	J 2 et J 3	
Jetons	a	b	c	c-a	b-a	c-b	2c-2a
Jetons tour suivant avant ajustement	$\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{c-b}{2}$	$\frac{c-a}{2}$	$\frac{2c-2a}{2}=c-a$
Ajustement si besoin +2							c – a c-a+2 c-a-2

En résumé : la somme des différences est de 2c-2a, et devient c-a, ou c-a+2 ou c-a-2 au tour suivant, c'est-à-dire sa moitié à 2 près.

La fin du jeu !

Se repose alors la question : le jeu se termine-t-il à chaque fois ? d'après ce que l'on vient d'expliquer, le jeu ne s'arrête pas si on est dans la configuration où la somme des différences reste bloquée à 4 : [2]

Somme des différences
4
4 (4 :2 +2)
4 (4 :2+2)
….

Est-ce possible ?

Revenons en arrière :

Si la somme des différences est 4, cela signifie que deux joueurs ont le même nombre de jetons, et qu'un joueur a 2 jetons de plus ou de moins.

Prenons par exemple le cas où deux joueurs ont a jetons, et le troisième joueur en a a+2.

				Différence entre nombre jetons			Somme des différences
	J 1	J 2	J 3	J 1 et J 3	J 1 et J 2	J 2 et J 3	
Jetons	a	a+2	a	0	2	2	4
Jetons tour suivant avant ajustement	a	a+1	a+1				
Ajustement si besoin +2	a	a+2	a+2	2	2	0	4
Jetons tour suivant	a+1	a+1	a+2				
	a+2	a+2	a+2	0	0	0	0

On retrouve dans ce tableau, le cas où deux joueurs ont le même nombre de jetons, et le dernier en a 2 de moins ligne a,a+2, a+2).

Conclusion : lorsqu'on arrive à une somme des différences de 4, le jeu s'arrête au bout de deux tours au maximum.

Pour conclure : le jeu se termine, quel que soit le nombre de jetons distribués au départ.
On peut à peu près déterminer au bout de combien de tours il se termine : il suffit de calculer la somme des différences de jetons entre chaque joueur, d'effectuer des divisions par 2 et de voir au bout de combien de tours le jeu se terminera, en sachant qu'il peut y avoir un décalage entre notre prédiction et la réalité à cause des « 4 ».

6. Le jeu à 4 joueurs

A quatre joueur, les choses se compliquent très vite … Tout d'abord l'ordre dans lequel on distribue les jetons influe sur le nombre de tours : [3]

		JOUEURS			
		J1	J2	J3	J4
	début	10	20	30	40
tour n°	1	26	16	26	36
tour n°	2	32	22	22	32
tour n°	3	32	28	22	28
tour n°	4	30	30	26	26
tour n°	5	28	30	28	26
tour n°	6	28	30	30	28
tour n°	7	28	30	30	30
tour n°	8	30	30	30	30

		JOUEURS			
		J1	J2	J3	J4
	début	10	30	20	40
tour n°	1	26	20	26	30
tour n°	2	28	24	24	28
tour n°	3	28	26	24	26
tour n°	4	28	28	26	26
tour n°	5	28	28	28	26
tour n°	6	28	28	28	28

En essayant de raisonner comme dans le jeu à 3 joueurs, il semble qu'il y ait des sauts de 2 en 2, mais nous ne sommes pas parvenus à le démontrer :

	JOUEURS				différence nombre jetons entre				total des
	J1	J2	J3	J4	J4 et J1	J1 et J2	J2 et J3	J3 et J4	différences
début	100	50	10	40	60	50	40	30	180
tour n° 1	70	76	30	26	44	6	46	4	100
tour n° 2	48	74	54	28	20	26	20	26	92
tour n° 3	38	62	64	42	4	24	2	22	52
tour n° 4	40	50	64	54	14	10	14	10	48
tour n° 5	48	46	58	60	12	2	12	2	28
tour n° 6	54	48	52	60	6	6	4	8	24
tour n° 7	58	52	50	56	2	6	2	6	16
tour n° 8	58	56	52	54	4	2	4	2	12
tour n° 9	56	58	54	54	2	2	4	0	8
tour n° 10	56	58	56	54	2	2	2	2	8
tour n° 11	56	58	58	56	0	2	0	2	4
tour n° 12	56	58	58	58	2	2	0	0	4
tour n° 13	58	58	58	58	0	0	0	0	0

Nous avons fait de nombreuses expériences avec le tableur et mis en évidence des résultats, mais n'avons rien réussi à prouver… [4]

Voici nos résultats :
Dans les observations suivantes, on appelle ordre des jetons « quand on part du joueur qui a le moins de jetons et que l'on va vers le joueur de droite ».

1) Quand on prend 4 nombres qui ont un écart respectif de 2, le nombre de tours et le nombre final de jetons dépendent de l'ordre des nombres:

-> Si les nombres sont dans l'ordre croissant ou décroissant, le nombre de tours sera 4 et le nombre final de jetons sera le plus grand des nombres choisis.

2 ; 4 ; 6 ; 8 On obtient 8 jetons au bout de 4 tours
18 ; 16 ; 14 ; 12 On obtient 18 jetons au bout de 4 tours
14 ; 16 ; 10 ; 12 On obtient 16 jetons au bout

-> Si les nombres sont par paires de deux qui se suivent, le nombre de tours sera 5 et le nombre final de jetons sera le plus grand des nombres choisis.

2 ; 6 ; 8 ; 4 On obtient 8 jetons au bout de 5 tours
14 ; 18 ; 16 ; 12 On obtient 18 jetons au bout de 5 tours
16 ; 14 ; 10 ; 12 On obtient 16 jetons au bout de 5 tours
10 ; 14 ; 16 ; 12 On obtient 16 jetons au bout de 5 tours

-> Si les nombres sont dans le désordre sans se suivre, le nombre de tours sera 2 et le nombre final de jetons sera le nombre juste avant le plus grand.

4 ; 8 ; 2 ; 6 On obtient 6 jetons au bout de 2 tours
4 ; 6 ; 2 ; 8 On obtient 6 jetons au bout de 2 tours
10 ; 14 ; 12 ; 16 On obtient 14 jetons au bout de 2 tours

2) Quand on prend 4 nombres qui ont un écart respectif de 4, le nombre de tours et le résultat dépendent de l'ordre des nombres:

- Si les nombres sont dans l'ordre croissant ou décroissant, le nombre de tours sera 6 et le nombre final de jetons sera le nombre juste avant le plus grand.

10 ; 14 ; 18 ; 22   On obtient 18 jetons au bout de 6 tours
18 ; 14 ; 10 ; 22   On obtient 18 jetons au bout de 6 tours

- Si les nombres sont par paires de deux qui se suivent, le nombre de tours sera 7 et le nombre final de jetons sera le plus grand des nombres choisis moins 2.

22 ; 18 ; 10 ; 14   On obtient 20 jetons au bout de 7 tours

- Si les nombres sont dans le désordre sans se suivre, le nombre de tours sera 4 et le nombre final de jetons sera le nombre juste avant le plus grand.

22 ; 10 ; 18 ; 14   On obtient 18 jetons au bout de 4 tours

3) Quand on prend 4 nombres qui ont un écart respectif de 6, le nombre de tours et le résultat dépendent de l'ordre des nombres:

-> Si les nombres sont dans l'ordre croissant ou décroissant ou si les nombres sont par paires de deux qui se suivent, le nombre de tours sera 8 et le nombre final de jetons sera la différence entre le plus grand des nombres choisis et 4.

10 ; 16 ; 22 ; 28   On obtient 24 jetons au bout de 8 tours
28 ; 22 ; 16 ; 10   On obtient 24 jetons au bout de 8 tours
28 ; 22 ; 10 ; 16   On obtient 24 jetons au bout de 8 tours
72 ; 78 ; 84 ; 90   On obtient 86 jetons au bout de 8 tours
90 ; 84 ; 78 ; 72   On obtient 86 jetons au bout de 8 tours
84 ; 90 ; 72 ; 78   On obtient 86 jetons au bout de 8 tours
78 ; 90 ; 84 ; 72   On obtient 86 jetons au bout de 8 tours

-> Si les nombres sont dans le désordre sans se suivre, le nombre de tours sera 6 et le nombre final de jetons sera le nombre juste avant le plus grand.

90 ; 72 ; 84 ; 78   On obtient 84 jetons au bout de 6 tours
90 ; 78 ; 84 ; 72   On obtient 84 jetons au bout de 6 tours
10 ; 22 ; 16 ; 28   On obtient 22 jetons au bout de 6 tours
28 ; 16 ; 22 ; 10   On obtient 22 jetons au bout de 6 tours

7. Une conclusion et des pistes

Pour répondre au problème initial, on peut affirmer qu'au 2011ème tour, chaque joueur aura en sa possession 10 jetons et en fera passer 5 à son voisin ….

		JOUEURS			
		J1	J2	J3	J4
		12	6	8	4
tour n°	1	8	10	8	6
tour n°	2	8	10	10	8
tour n°	3	8	10	10	10
tour n°	4	10	10	10	10

Pour un jeu à 2 ou 3 joueurs, nous sommes arrivés à démontrer que le jeu se terminait. A quatre joueur, il semble bien que le jeu s'arrête, mais rien n'a été prouvé, nos nombreuses observations mériteraient d'être approfondies…

Notes d'édition :

[1] Dans l'avant-dernière colonne, il s'agit de la somme des valeurs absolues des différences. Le relecteur ne comprend pas la signification de la dernière colonne.

[2] En effet, 4 est l'unique solution de l'équation $x = x/2 + 2$.

[3] Et donc aussi sur la valeur finale.

[4] Ces différentes observations sont intéressantes. Voilà des pistes ouvertes pour des successeurs !