Rigidité

par Philippe Chabert, Loïc Cohard, Sylvain Coste, Jean-Marc Lenormand (TC)
du
Lycée Emmanuel Mounier de Grenoble

enseignants : MM. Stéphane Chavaz et André Laur.

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

[NDLR
La rigidité “structurelle” est une des branches de la géométrie combinatoire où la théorie abstraite de la dépendance linéaire (Théorie des Matériels) joue un rôle important : ainsi la méthode de “réduction” proposée ici correspond à l'élagage progressif d'un arbre (= graphe connexe sans cycle). Un arbre n'est autre qu'un “indépendant” (= sans cycle) maximum (l'ajout d'une liaison supplémentaire crée un cycle).]

INTRODUCTION

On cherche à rigidifier une figure plane dans le plan ou un polyèdre dans l'espace. Nous nous intéressons ici à des figures composées de tiges rigides reliées entre elles par des articulations pouvant bouger dans tous les sens. On cherche aussi à trouver le nombre minimum de barres à rajouter pour que la figure (ou le polyèdre) soit rigide.

Exemple :

— On étudie le cas du triangle : il est rigide

— On étudie le cas d'un carré : pour le rigidifier, il faut rajouter une barre : il est ainsi formé de deux triangles.

Plus généralement, on pourra rigidifier d'autres figures : des polygones, des polyèdres et des “treillis”.

<u>Loi de Manuel 1</u>

Si N est n'importe quel nombre,

N + (2 x N) + (3 x N) + (4 x N) = 10 x N.

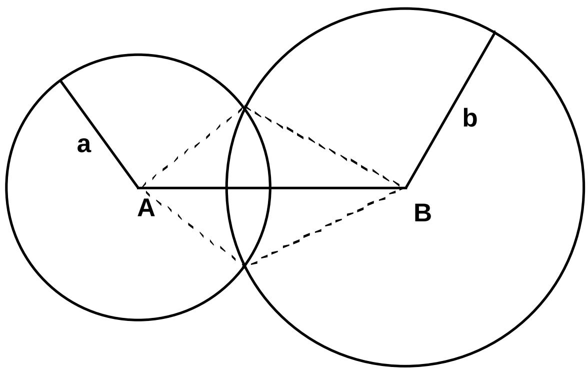
Exemple : 12 + 24 + 36 + 48 = 120

I.— Les Polygones.

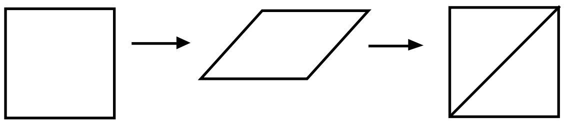
On cherche à rigidifier des figures planes et notamment des polygones dans le plan : chaque figure est considérée comme un assemblage de tiges reliées entre elles par des articulations, pouvant bouger dans le plan.

Etudions des cas simples :

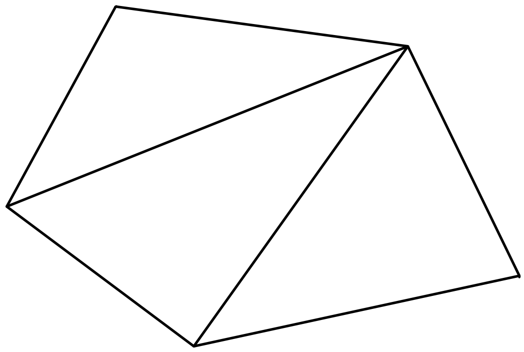
— Le **triangle** :
Il est inutile de rajouter des tiges pour le rigidifier. Considérons en effet un triangle constitué de 3 tiges de longueurs données a, b, c ; choisissons le côté de longueur c comme base : [AB] ; fixons à l'extrémité A la tige de longueur a ; l'autre extrémité se situe sur un cercle de centre A et de rayon a ; de même, fixons à l'extrémité B la tige de longueur b ; l'autre extrémité décrit un cercle de centre B et de rayon b ; les deux cercles se croisent en deux points symétriques par rapport à la base, il y a donc seulement deux points possibles pour rejoindre les deux extrémités libres et donc le triangle ainsi formé sera rigide car il est impossible de passer d'un point solution à un autre sans casser la figure.



— Le **carré** :
On remarque qu'en rajoutant une diagonale, le carré est rigide : il est alors formé de deux triangles joints l'un à l'autre par un côté. L'ensemble est donc rigide.

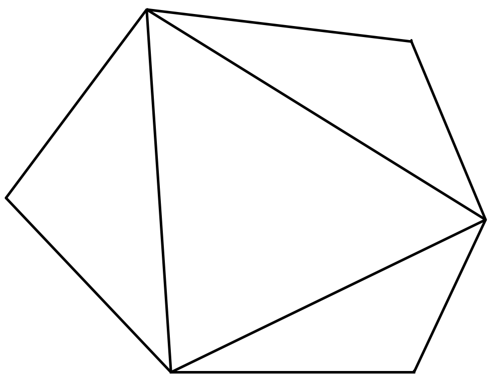


— Le **pentagone** :
De la même manière que le carré, on l'a rigidifié en le divisant en triangles.



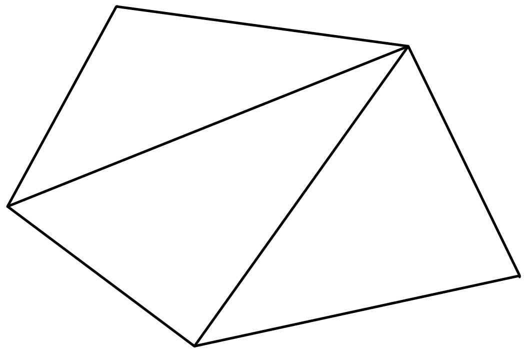
D'où une première méthode pour rigidifier les polygones : il suffit de diviser chaque polygone en triangles.

On remarque que pour rigidifier un carré de cette manière il faut une barre, que pour rigidifier un pentagone il faut deux barres. Est-ce qu'il suffit de trois barres pour rigidifier un hexagone ?

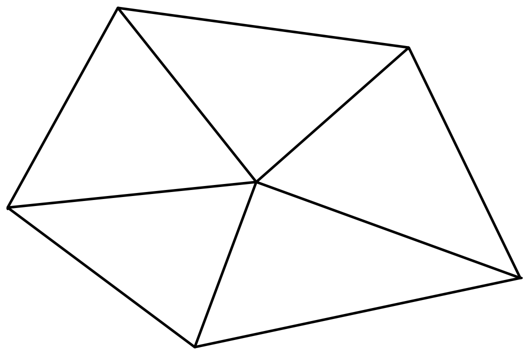


L'hexagone est alors divisé en triangles. D'où l'énoncé du ***théorème*** suivant :
Soit n le nombre initial de barres du polygone, soit U_n le nombre de barres à rajouter, on a alors $U_n = n - 3$.
Ce théorème qu'on peut démontrer par récurrence a été vérifié pour n assez grand.

Attention, il faut attacher les tiges lorsque l'on rajoute une articulation à celles déjà en place, c'est à dire aux sommets du polygone. La création d'un nouveau point au centre de la figure nous forcerait à rajouter plus de barres pour rigidifier une même figure.



deux barres



cinq barres

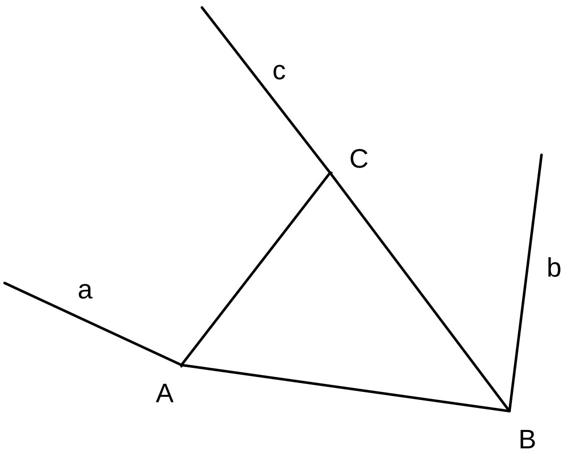
II.— Les Polyèdres.

Comme nous avons cherché à rigidifier les figures planes dans le plan, nous nous intéressons dans cette partie aux figures dites tridimensionnelles formées initialement de tiges rigides de longueurs données reliées entre elles par des rotules libres de tout mouvement.

Dans le plan, le triangle est une figure rigide en elle-même : dans l'espace, ***le trétraèdre est rigide et de plus formé uniquement de triangles.***

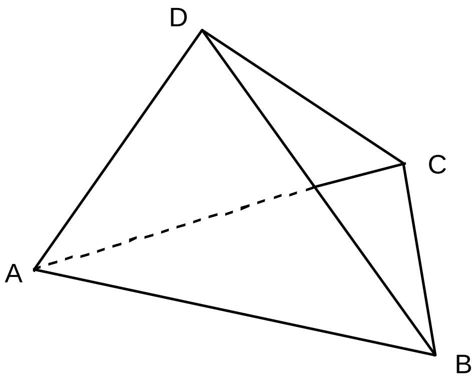
Démonstration : Soit un triangle de base ABC auquel on fixe trois tiges de longueurs données a, b, c en ses sommets A, B, C.

Chacune des trois tiges peut bouger autour du sommet auquel elle est fixée ; pour celle fixée



en A, par exemple, l'autre extrémité se situe sur une sphère de centre A et de rayon a ; il en est de même pour les deux autres tiges. Si les tiges sont suffisamment longues, les trois sphères se coupent en deux points symétriques par rapport au plan ABC.

Si l'on fixe ces trois tiges en un de ces deux points, on ne pourra pas passer à l'autre point sans détacher les tiges ; en effet l'ensemble des points possibles pour fixer les trois tiges en un point n'est pas continu : il est constitué de deux points distincts symétriques par rapport au plan ABC.



D'où notre ***théorème : Le tétraèdre étant une figure rigide, toute figure composée de tétraèdres, avec la condition que deux tétraèdres consécutifs aient une face en commun, sera rigide.***

Nous cherchons donc à faire apparaître un assemblage de tétraèdres dans les figures que nous voulons rigidifier. Cependant, il se peut qu'on puisse rigidifier une figure sans faire apparaître de tétraèdre mais nous ne nous intéressons pas à ce problème.

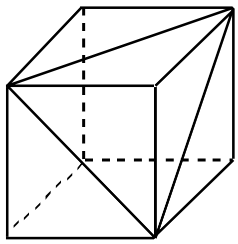
<u>Loi de Bastien 2</u>

pour lire le tableau : **horizontalement**, le chiffre que l'on multiplie ; verticalement, combien de fois on le multiplie par lui-même. A l'intérieur des cases, on trouve le dernier chiffre du résultat.

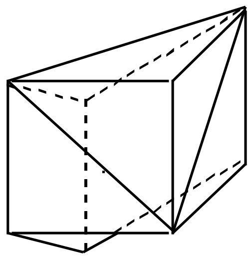
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
2	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
3	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
5	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
6	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
7	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
9	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

III.— Le Cube.

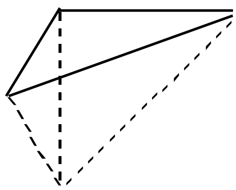
Trois barres à rajouter est le nombre minimum pour faire apparaître un tétraèdre, mais alors le cube n'est pas rigide.

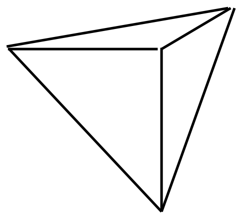


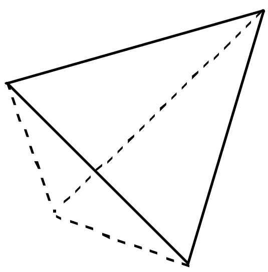
on peut alors le déformer :



De même avec 4 et 5 barres (3 tétraèdres), le cube est toujours déformable. Pour qu'il soit rigide il faut rajouter 6 barres au cube ; dans la figure qui suit, on montre qu'il est alors décomposé en 5 tétraèdres.







(voir aussi page suivante)