MATH EN JEANS 2014-2015

Chercheuse : Mme BACHOC
Université de Bordeaux

Accompagneurs :
- Lycée Michel Montaigne :
  M GRIHON
  Mme GRIMAUD
- Lycée Sud Médoc :
  Mme GRIHON
  M HAURE

Elèves de première et terminale scientifique :

- Lycée Michel Montaigne :
  RAZAFINDRAMBAO Mira 1ère S
  DUGUET Mélanie Tale S
  SOK Sophie Tale S
- Lycée Sud Médoc :
  CROSIO Gauthier 1ère S
  PELAGE Boubacar 1ère S

RENTRER CHEZ SOI

Présentation du sujet :

Dionysos habite dans une ville infinie, dont le plan des rues est une grille carrée. Sa maison se situe à un carrefour. Il sort de chez lui après avoir un peu bu et choisit une direction au hasard. À chaque carrefour, il choisit une rue au hasard parmi celles qui se présentent (y compris celle d'où il vient), et continue ainsi son chemin.

Quelles sont ses chances de retrouver un jour sa maison ? Au bout de combien de temps ? Pouvez-vous prédire de quelle distance il peut s'éloigner de chez lui ?

Résumé :

Dans un premier temps on étudiera le problème sur une droite ayant deux directions puis on reviendra au plan. On conjecture que la probabilité de rentrer chez soi avec un temps infini, soit un nombre de pas infini, tend vers 1, c'est-à-dire que Dionysos rentrera bien un jour chez lui.

On suppose que :

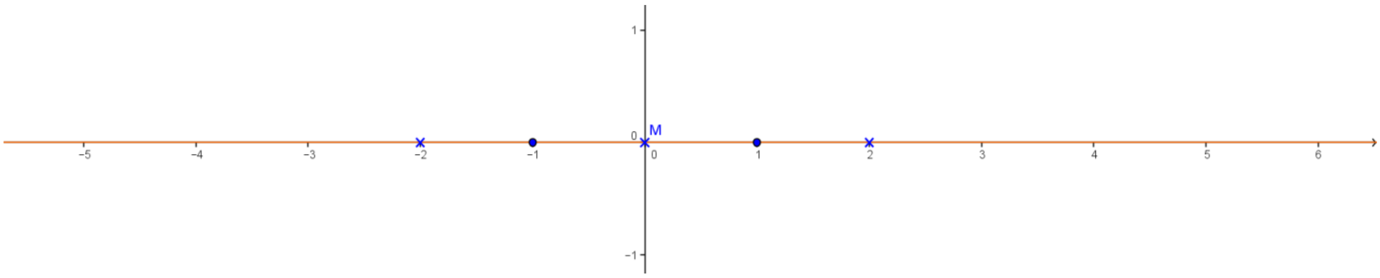
- À chaque intersection Dionysos a 4 voies possibles qui s'offrent à lui, Vers le Nord, Sud, Est et Ouest.
- 1 pas est la distance séparant deux carrefours les plus proches.

On constate que :

- Afin de rentrer chez soi, Dionysos devrait faire un nombre pair de pas.
  (Explication : Pour pouvoir rentrer chez lui il devrait faire autant de pas vers le Nord que vers le Sud et autant de pas vers l'Ouest que vers l'Est.)

I. **Travail sur une droite**

Nous avons simplifié le problème en réduisant le nombre de directions différentes possibles. Au lieu de 4 directions différentes, on n'en a plus que deux : droite et gauche. Cela ne change rien au fait que le nombre de pas doit être pair.



Ci-dessus le graphique représentant la marche de Dionysos quand il a fait 2 pas. Les points en forme de croix sont les différentes positions où Dionysos peut se retrouver au bout de 2 pas.

1. Nous avons commencé par faire un algorithme pour nous donner une idée de combien de fois il passe par le point M (maison) en 2*n* pas. (1)

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR 0
  t PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE n
  n PREND_LA_VALEUR 2*n
  TANT_QUE (n>0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    d PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,2)
    SI (d==1) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        x PREND_LA_VALEUR x-1
        FIN_SINON
    n PREND_LA_VALEUR n-1
    SI (x==0) ALORS
      DEBUT_SI
      t PREND_LA_VALEUR t+1
      FIN_SI
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Dyonisos est repassé "
  AFFICHER t
  AFFICHER " fois chez lui. "
FIN_ALGORITHME
```

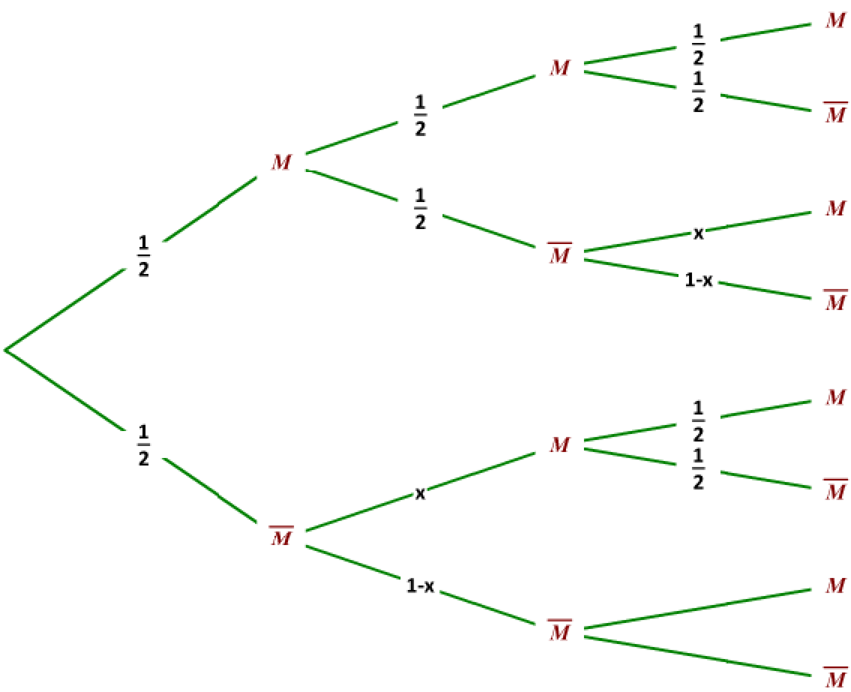
2. Nous avons d'abord utilisé la loi binomiale pour calculer la probabilité de l'évènement E_{2n} « **Dionysos rentre chez lui en 2*n* pas mais il peut déjà être passé par chez lui avant** ».

On a une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Dionysos va à droite ». La probabilité de ce succès est $\frac{1}{2}$. On répète cette épreuve de manière identique et indépendante $2n$ fois. Dionysos est rentré au bout de $2n$ pas s'il a fait autant de pas à gauche qu'à droite donc :

$$P(E_{2n}) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$$

3. Pour calculer la probabilité de l'évènement « **Dionysos rentre chez lui au bout du 2*n*ième pas seulement** », on a utilisé l'arbre de probabilité ci-dessous :

Chaque branche correspond à deux pas et *M* signifie que Dyonisos est à la maison.



Soit M_{2n} l'évènement « Dionysos rentre chez lui au bout du $2n^{\text{ième}}$ pas seulement ».

Calculons les probabilités des premières branches.

On sait que P(E_4) = $\frac{\binom{4}{2}}{2^4}$. Or, quand Dionysos rentre chez lui il a de nouveau les mêmes probabilités pour rentrer chez lui ou non.

On résout donc l'équation suivante :

$$\frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

Donc $x = \frac{6}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et donc $P(M_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Cette technique est applicable à la main seulement sur un petit nombre de pas, sinon on se retrouve avec des opérations à rallonge et les calculs deviennent trop compliqués.

4. **On cherche la probabilité de l'événement C_{2n} « En 2*n* pas Dionysos est rentré au moins une fois chez lui »**

On rappelle les événements suivants :

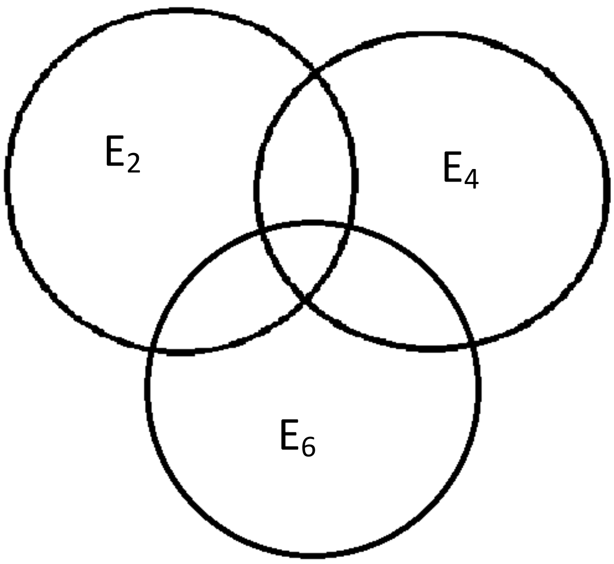
E_2 : « **Dionysos rentre chez lui en 2 pas mais il peut déjà être passé par chez lui avant** ».

E_4 : « **Dionysos rentre chez lui en 4 pas mais il peut déjà être passé par chez lui avant** ».

E_6 : « **Dionysos rentre chez lui en 6 pas mais il peut déjà être passé par chez lui avant** ».

E_{2n} : « **Dionysos rentre chez lui en 2*n* pas mais il peut déjà être passé par chez lui avant** ».

On a représenté sur ce diagramme en patates les différents événements :



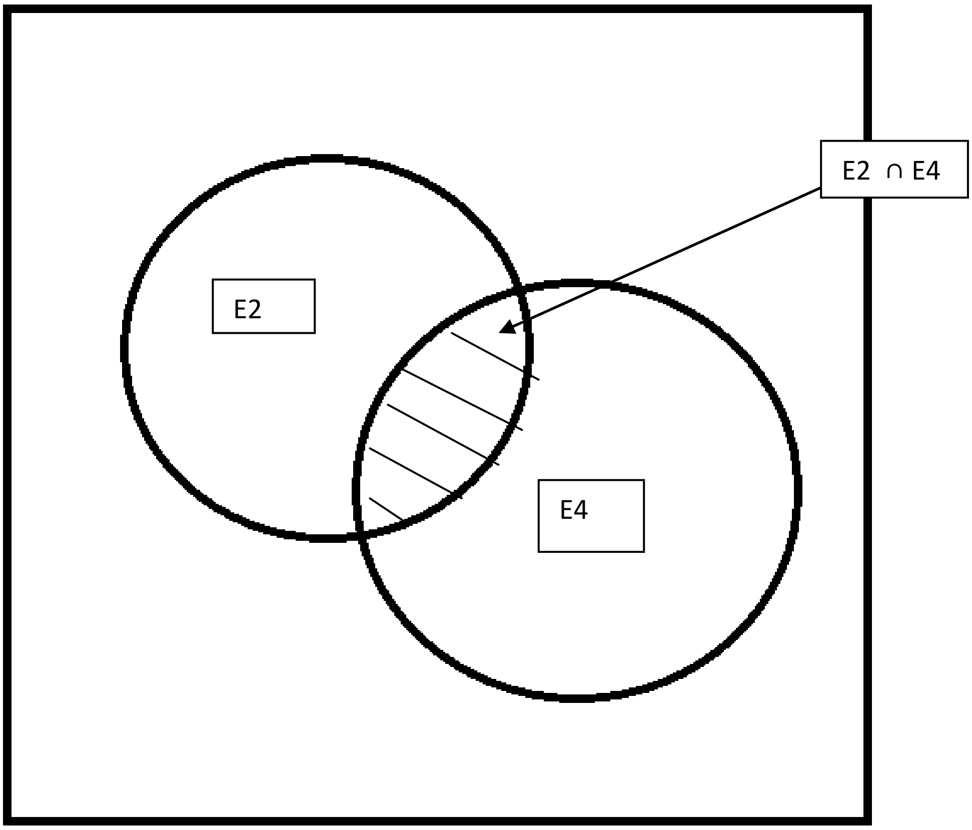
On sait que $p(E_{2n}) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

On remarque que $C_4=E_2 \cup E_4$

Par exemple pour 4 pas, on a :

$\boxed{p(E2 \cup E4)= p(E2) + p(E4)-p(E2 \cap E4)}$

Pour calculer p (E2 U E4) , il faut déterminer p (E2 ∩ E4) :



Sur l'arbre du paragraphe 3 (page 3) on voit que

$$p(E_2 \cap E_4) = \frac{1}{4}$$

Donc $P(C_4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

- **Pour 6 pas** , on définit sa probabilité par $E_2 \cup E_4 \cup E_6$

On sait que : $p(E2)=\frac{1}{2}$; $p(E4)=\frac{6}{16}$; $p(E6)= \frac{20}{64}$

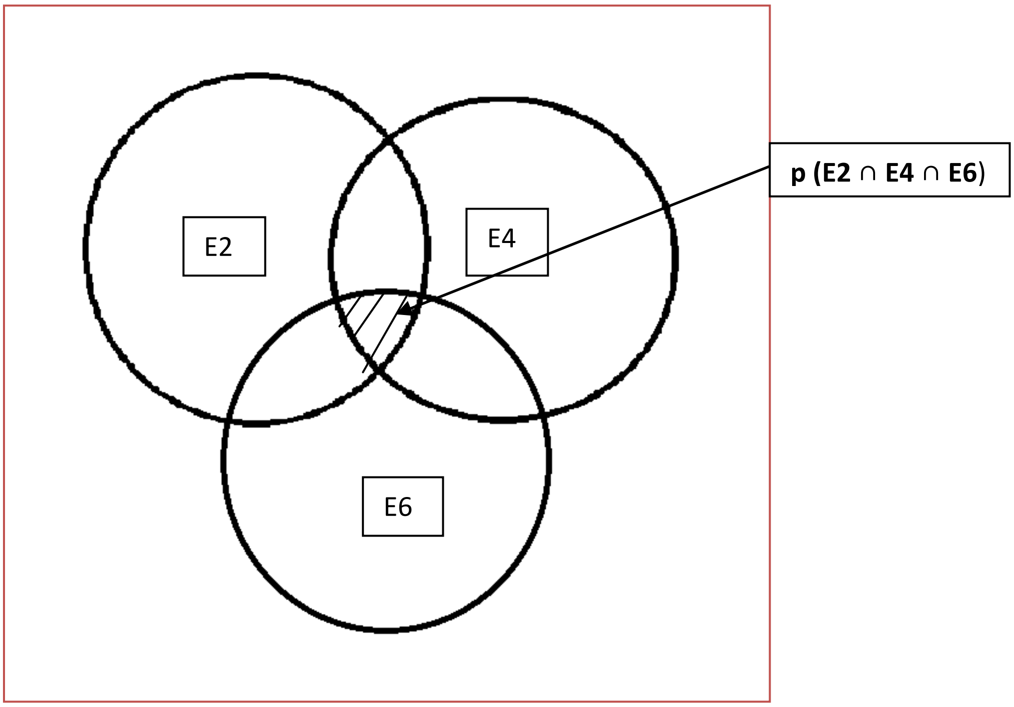
Sur l'arbre on voit que :

$P(E2 \cap E6)= p(E2) \times p(E4)= \frac{6}{32}$

P (E2 ∩ E4)= p(E2) x p(E2)=$\frac{1}{4}$

P (E4 ∩ E6)= p(E2) x p(E4)= $\frac{6}{32}$

P (E2 ∩ E4 ∩ E6) =$\frac{1}{8}$



Sur ce diagramme on voit que

$$P(E_2 \cup E_4 \cup E_6)$$
$$= P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) - P(E_2 \cap E_4) - P(E_2 \cap E_6) - P(E_4 \cap E_6) + P(E_2 \cap E_4 \cap E_6)$$

<u>Application numérique</u>:

$$P(E_2 \cup E_4 \cup E_6) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} - \frac{1}{4} - \frac{6}{32} - \frac{6}{32} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16}$$

<u>Tableau des résultats :</u>

n	2	4	6
$P(C_{2n})$	0.5	0.625	0.6875

On peut en conclure que cette méthode n'est raisonnablement utilisable à la main que pour un petit nombre de pas inférieur à 8. D'après les résultats, on constate que, plus Dionysos fera de pas, plus la probabilité qu'il rentre chez lui au moins une fois augmente (2)

Étude dans un plan

Voici ci-dessous un algorithme qui modélise le déplacement du personnage dans un plan. Le nombre T affiché correspond au nombre de pas effectués avant que le personnage atteigne sa maison pour la première fois.

En faisant tourner l'algorithme un certain nombre de fois, on remarque une grande fréquence du nombre 2 (3)

(4)

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  T PREND_LA_VALEUR 1
  X PREND_LA_VALEUR 0
  Y PREND_LA_VALEUR 0
  TRACER_POINT (X,Y)
  A PREND_LA_VALEUR floor(4*random()+1)
  SI (A==1) ALORS
    DEBUT_SI
    Y PREND_LA_VALEUR Y+1
    FIN_SI
  SI (A==2) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR X+1
    FIN_SI
  SI (A==3) ALORS
    DEBUT_SI
    Y PREND_LA_VALEUR Y-1
    FIN_SI
  SI (A==4) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR X-1
    FIN_SI
  TANT_QUE (X!=0 OU Y!=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    TRACER_POINT (X,Y)
    T PREND_LA_VALEUR T+1
    A PREND_LA_VALEUR floor(4*random()+1)
    SI (A==1) ALORS
      DEBUT_SI
      Y PREND_LA_VALEUR Y+1
      FIN_SI
    SI (A==2) ALORS
      DEBUT_SI
      X PREND_LA_VALEUR X+1
      FIN_SI
    SI (A==3) ALORS
      DEBUT_SI
      Y PREND_LA_VALEUR Y-1
      FIN_SI
    SI (A==4) ALORS
      DEBUT_SI
      X PREND_LA_VALEUR X-1
      FIN_SI
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Nb de mouvement : "
  AFFICHER T
FIN_ALGORITHME
```

A- Calcul à la main de la probabilité de rentrer à la maison

On a calculé la probabilité de rentrer chez lui au bout de N pas (N, nombre entier naturel pair), préalablement choisi, sans prendre en compte le nombre de fois où il est passé chez lui.

- Pour N = 2

→ de la maison Dionysos, il existe 4 chemins lui permettant de rentrer chez lui sur 4^2 chemins possibles.

$$P(M_2) = \frac{4}{4^2}$$

-Pour N = 4

→ il existe 36 chemins permettant à Dionysos de rentrer chez lui sur 4^4 chemins possibles

$$P(M_4) = \frac{36}{4^4}$$

-Pour N = 6

→ 400 chemins sur 4^6 chemins possibles permettent à Dionysos de rentrer chez lui

$$P(M_6) = \frac{400}{4^6}$$

Le nombre au dénominateur correspond au nombre total de chemins possibles.

Le nombre au numérateur est calculé à l'aide des coefficients binomiaux, on établit les schémas possibles de rentrer chez lui en fonction du nombre de pas N :

Pour deux pas, s'il fait 0 ou 1 pas vers le nord le nombre de pas vers le sud est défini puisqu'il fait autant de pas vers le nord que le sud et on en déduit de même pour le nombre de pas vers l'ouest et vers l'est.

$$\text{Pour deux pas :}\quad \begin{array}{lccc} Nord & 0 & 1 & 2 \\ Sud & 0 & 1 & \\ Est & 1 & 0 & \\ Ouest & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2 * 2 = 4$$

On constate que si le nombre de pas vers le nord est de deux il devra faire de même vers le sud or

2 + 2 = 4 > 2

On fait de même pour chaque « N pas » choisi :

$$\text{Pour quatre pas :}\quad \begin{array}{lccccc} Nord & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Sud & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Est & 2 & 1 & 0 & & \\ Ouest & 2 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{1} * \binom{3}{1} * \binom{2}{1} + \binom{4}{2} = 6 + 4 * 3 * 2 + 6 = 36$$

Le premier terme de la somme correspond aux chemins qui ont 2 pas vers le Nord (et donc 2 pas vers le Sud), le second aux chemins qui ont 1 pas vers le Nord, un pas vers le Sud , un pas vers l'Ouest (et donc un pas vers l'Est) et le troisième à deux pas vers l'Ouest (et donc deux pas vers l'Est).

2 pas : 4 chemins possibles sur 4^2

4 pas : 36 chemins possibles sur 4^3

6 pas : 400 chemins possibles sur 4^6

8 pas : 4900 chemins possibles sur 4^8

10 pas : 63 504 chemins possibles sur 4^{10} (5)

B- Avec Pascal

Pour avoir une idée plus globale des déplacements sur le plan de Dionysos, nous avons rempli les champs d'un tableur avec le nombre de pas nécessaires pour arriver sur la case et, entre parenthèses, le nombre de chemins possibles pour y parvenir. On observe la présence de triangles de Pascal sur chaque diagonale de la figure, mais aussi à l'intérieur où le nombre de possibilités est la multiplication des possibilités des côtés perpendiculaires. (6)

				4(1)				
			4(4)	3(1)	4(4)			
		4(6)	3(3)	2(1) 4(16)	3(3)	4(6)		
	4(4)	3(3)	2(2) 4(24)	1(1) 3(9)	2(2) 4(24)	3(3)	4(4)	
4(1)	3(1)	2(1) 4(16)	1(1) 3(9)	0 2(4) 4(36)	1(1) 3(9)	**2(1)** **4(16)**	3(1)	4(1)
	4(4)	3(3)	2(2) 4(24)	1(1) 3(9)	2(2) 4(24)	3(3)	4(4)	
		4(6)	3(3)	2(1) 4(16)	3(3)	4(6)		
			4(4)	3(1)	4(4)			
				4(1)				

Seule l'origine du repère (la maison) nous intéresse. On observe que le nombre de possibilités pour rentrer à la maison est le nombre situé au milieu de la dernière ligne du triangle de Pascal, élevé au carré. (7)

Nous avons cherché à démontrer cette conjecture en appliquant la même méthode que pour les cas particuliers :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

/* Expression de la somme des coefficients binomiaux comme précédemment. *

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\times\frac{(2k)!}{k!k!}\times\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!^2\,(n-k)!^2}$$

$$= \frac{(2n\times(2n-1)\times\ldots\times(n+1))}{n!}\times\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!^2}{k!^2\,(n-k)!^2}\right)$$

$$= \frac{(2n\times(2n-1)\times\ldots\times(n+1))}{n!}\times\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2$$

$$= \frac{(2n\times(2n-1)\times\ldots\times(n+1))}{n!}\times\frac{n!}{n!}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

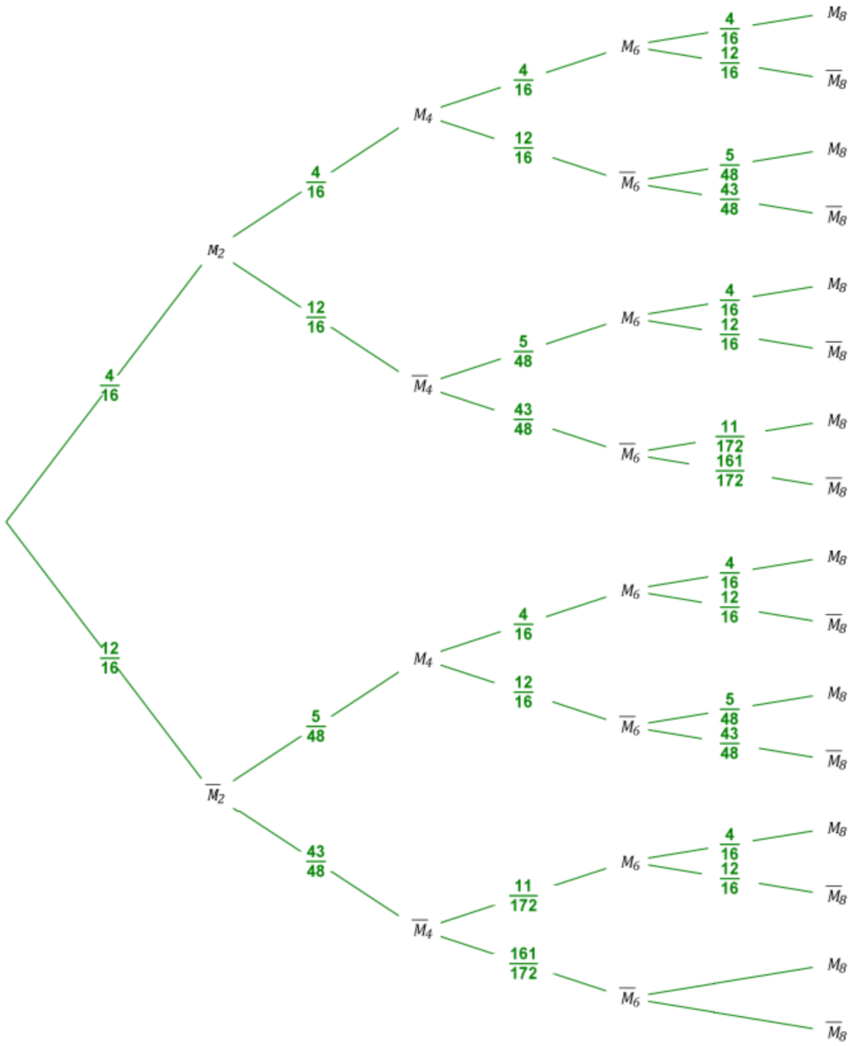
$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!^2}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Une fois cette propriété démontrée, nous pouvons dire que la probabilité d'être à la maison au bout de 2n pas est de $\frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}$.



C- Etude du comportement pour un n pair de plus en plus grand

Cependant, pour étudier le comportement quand on choisit un nombre de pas de plus en plus grand, il nous faut connaître la probabilité de rentrer en exactement n coups, sans repasser avant par le départ.

Appelons $P(M_n)$ la probabilité d'être à la maison en n pas, $P(M_n) = \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{4^n}$ (8)

Appelons $P(\widetilde{M}_n)$ la probabilité de rentrer pour la première fois en n coup exactement,

$$P(\widetilde{M}_n) = P(\overline{M_2} \cap \overline{M_4} \cap \ldots \cap \overline{M_{n-2}} \cap M_n)$$

A la vue de l'arbre de probabilité, on peut en déduire la formule suivante :

$$P(\tilde{M}_n) = P(M_n) \times P(\tilde{M}_{n-n}) - P(M_{n-2}) \times P(\tilde{M}_{n-(n-2)}) - ... - P(M_2) \times P(\tilde{M}_{n-2})$$

$\mathrm{P}(\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{n}}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}_{\mathrm{n}}) - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{P}\big(\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{n-2k)}}\big) \times \mathrm{P}(\mathrm{M}_{2\mathrm{k}})$ /* *n* est toujours pair. */

Malgré nos efforts, nous ne sommes pas parvenus à simplifier cette relation de récurrence.

Soit $\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{n}}$ l'événement : « Dionysos rentre pour la première fois en strictement n coups ».

La probabilité d'un $\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{n}}$ne peut pas être nulle car elle est la multiplication de nombres non nuls. Il y a toujours une chance de rentrer strictement en n coups. La probabilité de rentrer au moins une fois en n coups, étant l'addition de tous les $\tilde{\mathrm{M}}_k$ antérieurs, est croissante et augmente donc lorsque n augmente. Nous conjecturons que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}\big(\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{k}}\big) = 1$$

Cela signifie que la somme des probabilités de rentrer en n coups ou moins se rapproche de 1 lorsque n tend vers l'infini, ou autrement dit que Dionysos est sûr de rentrer en un nombre, certes indéterminé mais fini, de coups.

À la demande de nos professeurs, nous avons ensuite fait un algorithme similaire au premier, mais en répétant l'expérience un nombre fini de coups : le but étant de connaître une moyenne empirique du nombre de pas de Dionysos nécessaire pour rentrer. Nous avons constaté que la moyenne était différente à chaque fois. (9)

Notes de l'édition

(1) On regrette de ne pas disposer des conclusions résultant des simulations faites à partir de cet algorithme.
(2) Cachée dans les paragraphes précédents, on trouve la justification mathématique de cette affirmation (qui n'est donc plus seulement une remarque à l'appui des premiers résultats empiriques obtenus): l'événement C2n est l'union disjointe de C2(n-1) et M2n, tous les deux ayant une probabilité strictement positive. Ainsi, la suite des probabilités de C2n est strictement croissante.
(3) La probabilité de premier retour en deux coups est calculée plus loin dans le texte et vaut ¼, ce qui explique le phénomène observé.
(4) Dommage de ne pas disposer des conclusions résultant des simulations faites à partir de cet algorithme.
(5) Dans le cas de la formule pour 2 pas: pour que la formule coïncide avec l'explication fournie et la formule générale trouvée plus tard ce devrait être une somme à la place d'un produit.
Dans le cas de la formule pour 4 pas: les flèches et le groupement de termes ne sont pas à la bonne place. On remarque un décalage des symboles faisant le lien entre le tableau et la formule dans cette image.
(6) Les triangles de Pascal observés par les auteurs se devinent dans chaque quart de la figure : 1$^{\text{ère}}$ ligne 1,1 2$^{\text{ème}}$ ligne 1,2,1 3$^{\text{ème}}$ ligne 1,3,3,1 4$^{\text{ème}}$ et dernière ligne 1,4,6,4,1
(7) Il s'agit sans doute de l'observation : dans la case centrale, 36 , le nombre de possibilités est le carré du nombre 6 qui apparait dans la dernière ligne du triangle de Pascal (voir note 6)
(8) Cette notation n'est pas cohérente avec la notation utilisée dans l'étude de la droite.
(9) Dommage de ne pas disposer de données plus précises.