POINT DE RENCONTRE

Année 2012

Elèves de 5ème:
DEBAR Marion, BLAIS Baptiste, JUAN Sophie.
Elèves de 4ème :
GUILLEMIN Fleur, HOSSEINI Julie, MISSENARD Nawell et MOLLER Pierre.
Etablissements :
Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91 402 Orsay Cedex.
Collège Charles Péguy à Palaiseau.

Enseignantes :
ASSELAIN-MISSENARD Claudie,
DAMONGEOT Cécile et FERRY Florence.
Chercheurs :
AGUILLON Nina et COULAUD Olivier.

Le sujet :
Trois personnes sont dans un grand champ plat sans obstacle et veulent se rejoindre le plus rapidement possible. Elles avancent toutes à la même vitesse.
A quel endroit doivent-elles se rejoindre ?
Que se passe-t-il s'il y a 4 personnes, 5, …, n personnes ?

Convention de notation: on notera Z le point de rencontre recherché.
Trois personnes sont assimilées à trois points A,B et C, la quatrième personne à un point D, etc…

I. Point de rencontre de deux personnes

A et B partent au même instant pour se rencontrer et se déplacent à la même vitesse.
A se déplace à la vitesse v_A sur une distance d_A, pendant une durée t_A. De même pour la personne B qui se déplace à la vitesse v_B sur une distance d_B, pendant une durée t_B.
On a :
$v_A = v_B$, $t_A = t_B$, $v_A = \dfrac{d_A}{t_A}$ et $v_B = \dfrac{d_B}{t_B}$.
Donc : $d_A = d_B$; Z se trouve donc à la même distance de A et B. De plus, nous voulons que cette distance soit minimale.
Le point de rencontre entre A et B est donc est le milieu de $[AB]$.

II. Point de rencontre de trois personnes

1. Etude de cas particuliers

a. Points alignés

fig1

Considérons A, B et C alignés dans cet ordre. Prenons I le milieu de $[AC]$ (le plus long segment formé). Pour les points A et C, les distances IA et IC sont minimales ; de plus donc B appartient à $[AC]$: $IB < IA$ et $IB < IC$.
B ne gênera pas la rencontre entre A et C. Le point Z est donc le point I.

Dans le cas où les trois personnes sont alignées, le point de rencontre est le milieu du segment formé par les deux personnes les plus éloignées.

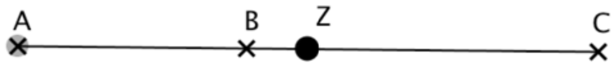

fig2

b. Triangles rectangles

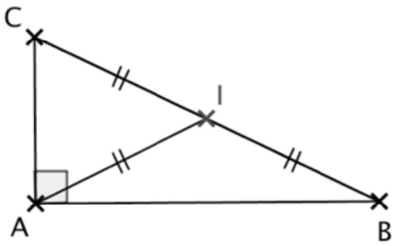

fig3

On sait que dans un triangle rectangle la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.
Donc ici : $AI= CI = BI$
Prenons un point M quelconque distinct de I, il sera alors plus éloigné soit de B ou de C (ou même de B et C). Donc I est meilleur que M.

Donc pour le cas du triangle rectangle le point de rencontre sera le milieu de l'hypoténuse.

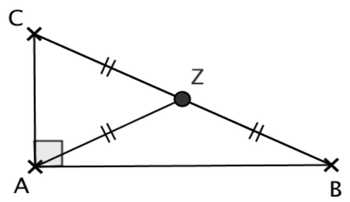

fig4

c. Triangles équilatéraux

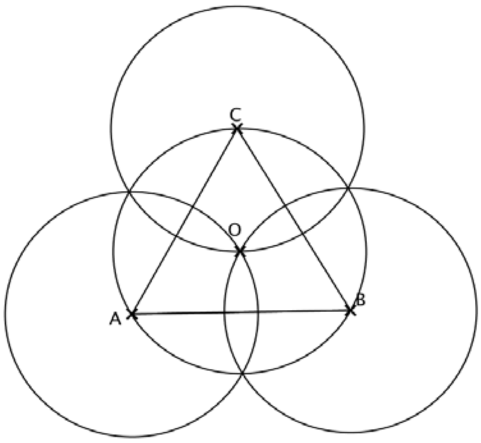

fig5

On considère le cercle circonscrit à *ABC* de centre *O* et de rayon *x*.
OA=*OB*=*OC*=*x*
Les cercles de centre *A*,*B* et *C*, de rayon *x* se coupent en *O*. Il n'y a pas d'autres points communs aux trois cercles tracés.
Plus précisément : appelons *S* le secteur, intersection entre le triangle, le disque de centre *B* de rayon *x* et le disque de centre *A* de rayon *x*.
Si *M* appartient à *S* alors : *MA*<*OA* et *MB*<*OB* mais *MC*>*OC* donc *O* est meilleur que *M*.
Prenons maintenant *T* le secteur du triangle, intersection du disque de centre *B* de rayon *x* avec l'extérieur des disques de centres *A* et *C* et de rayon *x*.
Si *M* appartient à *T* alors : *MB*<*OB* mais *MA*>*OB* et *MC*>*OB* donc *O* est encore meilleur que *M*.
En répétant cette opération dans tous les secteurs similaires, on prouve que *O* est le meilleur point de rendez-vous.

Donc pour le cas du triangle équilatéral le point de rencontre est le centre du cercle circonscrit au triangle.

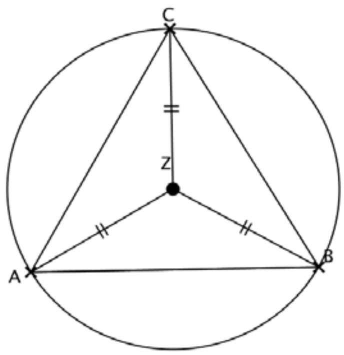

fig6

d. Triangles quelconques

Tout d'abord, voici trois propriétés que nous avons démontrées.

- Première propriété :
A,*B* et *C* sont 3 points non alignés ; si *A* est à l'extérieur du cercle de diamètre, [*BC*] alors soit (*AB*) soit (*AC*) coupe le cercle.

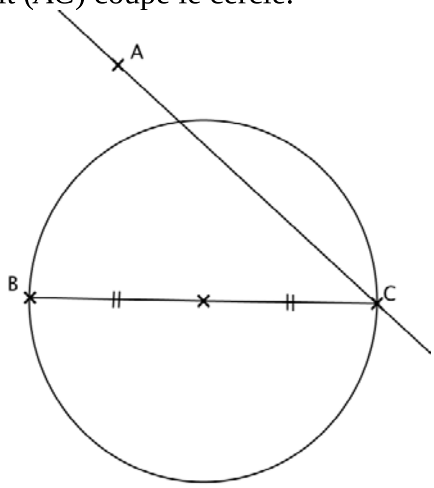

fig7

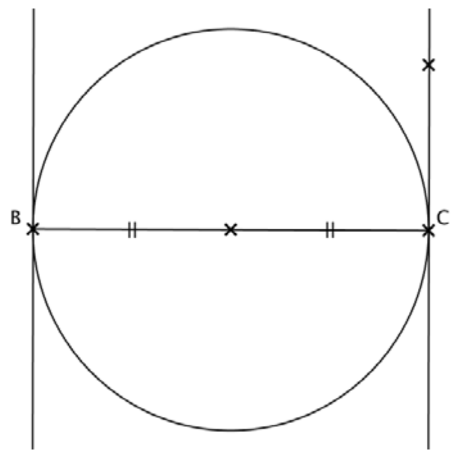

fig8

<u>Démonstration</u> : Supposons que (*AB*) et (*AC*) ne coupent pas le cercle, elles n'auraient alors qu'un seul point de contact avec le cercle, respectivement en *B* et en *C*. (*AB*) et (*AC*) seraient toutes deux tangentes au cercle en *B* et

en *C*. Comme [*BC*] est un diamètre, alors (*AB*) et (*AC*) seraient toutes les deux perpendiculaires à [*BC*], elles seraient donc parallèles. (*AB*) et (*AC*) seraient alors confondues ce qui est impossible.

– **Deuxième propriété :**

Si *A* est à l'intérieur du disque de diamètre [*BC*], alors l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

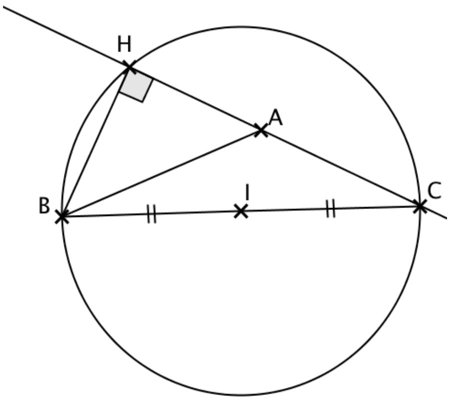

fig9

<u>Démonstration</u> :

Soit *H*, le point d'intersection du cercle avec (*AC*) ; *H* appartient au cercle de diamètre [*BC*] donc le triangle *HBC* est rectangle en *H*, *BAH* donc rectangle en *H et* $\widehat{BAH}$ et $\widehat{HBA}$ sont complémentaires donc inférieurs à 90° :

$\widehat{BAH} < 90°$ donc $\widehat{BAC} > 90°$.

– **Troisième propriété:**

Si *A* est à l'extérieur du disque de diamètre [*BC*], alors l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

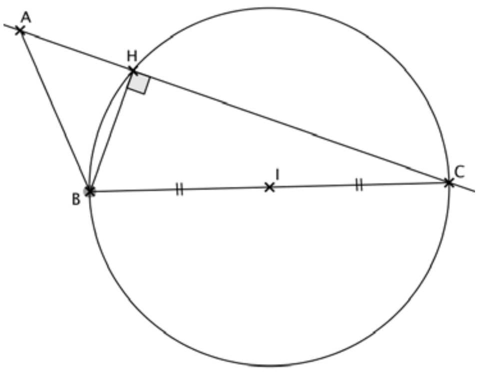

fig10

<u>Démonstration:</u>

Soit *H* le point d'intersection de (*AC*) et du cercle de diamètre [BC].

L'angle $\widehat{BHA}$ est un angle droit et dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires:

$\widehat{BAH} < 90°$ et $\widehat{BAH} = \widehat{BAC}$

- Conséquences:

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu alors le point *A* est à l' extérieur du cercle de diamètre [*BC*].

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus alors le point *A* est à l'intérieur du cercle de diamètre [*BC*].

Nous séparons donc notre étude des triangles en deux parties.

a) Triangle avec un angle obtus

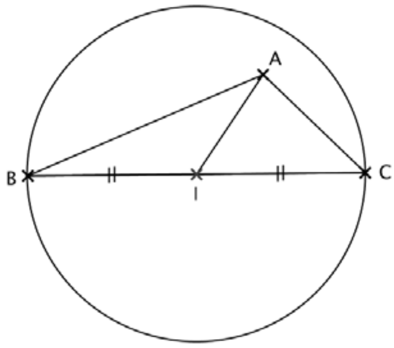

fig11

Soit *ABC tel que* $\widehat{BAC}$ soit obtus ; on a alors *A* est à l'intérieur du cercle de diamètre [*BC*]. Soit I le milieu de [*BC*], centre du cercle.

On a : *AI<BI* et *AI<CI*. Donc le point de rencontre Z de *A*,*B* et *C* est le point de rencontre de *B* et *C* (*A* ne retarde pas leur rencontre), c'est le point *I*.

Le point de rencontre de 3 personnes formant un triangle avec un angle obtus est le milieu du segment formé par les 2 personnes les plus éloignées ; ce segment est le côté du triangle opposé à l'angle obtus.

b) Triangle avec un angle aigu

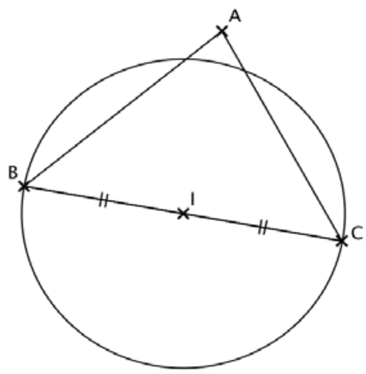

fig12

Soit *ABC* tel que $\widehat{BAC}$ soit aigu ; on a alors *A* à l'extérieur du cercle de diamètre [*BC*]. Soit I le milieu de [*BC*], centre du cercle.
On a : $AI>BI$ et $AI>CI$. Donc *Z* n'est plus le point de rencontre de *B* et *C*.
Le cercle recherché n'est plus le cercle de diamètre [*BC*].
On cherche alors le plus petit cercle contenant les points *A*, *B* et *C*. Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle *ABC* et donc le point de rendez-vous est son centre.
Le point de rencontre de 3 personnes formant un triangle n'ayant que des angles aigus est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Dans ce cas le point de rencontre est à égale distance de toutes les personnes.

III . Les quadrilatères

1. Etude de cas particuliers

a. Les carrés

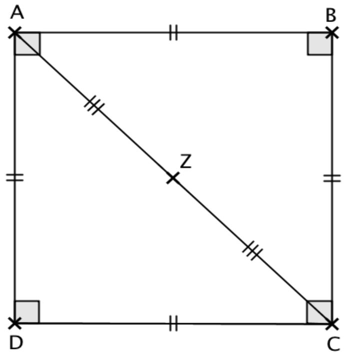

fig13

Soit *ABCD* un carré, il est formé de deux triangles rectangles (*ABC* et *ACD*).

Dans le cas du triangle rectangle, le point de rendez-vous est le milieu de l'hypoténuse ; ici, les deux triangles *ABC* et *ACD* ont la même hypoténuse. **Le point de rencontre est donc le milieu des diagonales.**

b.Les rectangles

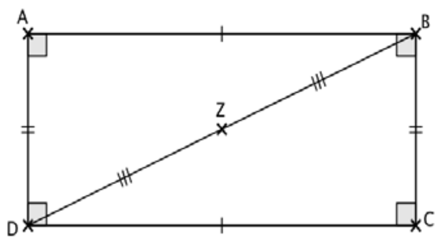

fig14

Soit *ABCD* un rectangle.
On applique le même raisonnement que pour le carré.
Le point de rencontre est le milieu des diagonales.

c. Les parallélogrammes

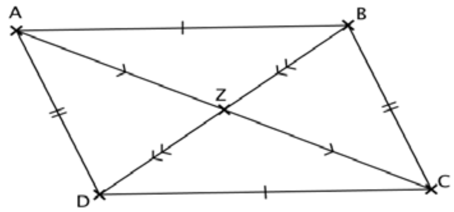

fig15

Dans un parallélogrammes les angles consécutifs sont supplémentaires, il y a donc une paire d'angles opposés obtus. Dans notre cas ici, ce sera les angles de sommets *B* et *D*. Le meilleur point de rencontre de *A*,*B* et *C* est donc le milieu de [*AC*] et le meilleur point de rencontre de *C*,*D* et A est aussi le milieu de [*AC*]. Ce point est donc le point *Z*.

Dans un parallélogramme, le point de rencontre est le point d'intersection des diagonales.

d. Quadrilatère avec un angle rentrant

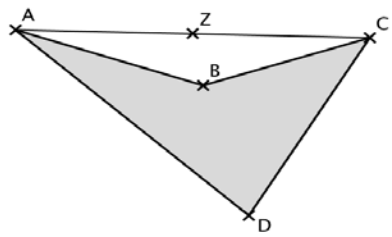

fig16

Si les quatre personnes forment un quadrilatère avec un angle rentrant, on revient au cas du triangle. En effet, on enlève la personne qui est le sommet de l'angle rentrant puisqu'elle ne retardera pas la rencontre des trois autres.
Alors, il y a deux cas possibles:

- le triangle restant a un angle obtus.
On revient alors au cas du triangle avec un angle obtus : *Z* est le milieu des deux points les plus éloignés.

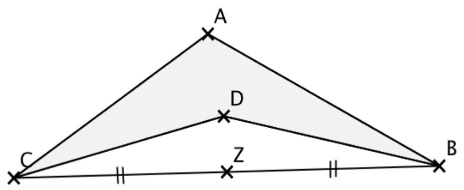

fig17

- le triangle restant n'a que des angles aigus.
On revient alors au cas du triangle avec que des angles aigus : *Z* est le centre du cercle circonscrit.

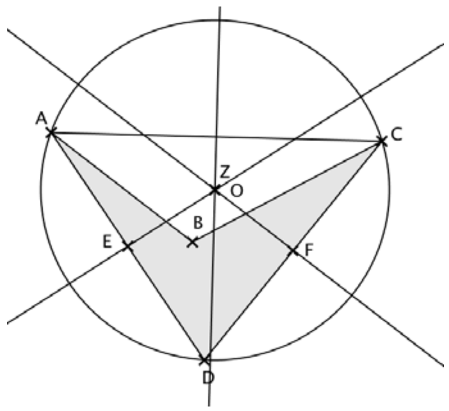

fig18

e. Exploration avec des quadrilatères quelconques

Nous avons commencé par chercher s'il y avait une règle pour tous les quadrilatères. Nous avons tout d'abord pensé que si l'on enlevait le sommet le plus proche du point d'intersection des diagonales, on obtenait un triangle qui nous donnait le point de rencontre cherché. Au bout de plusieurs essais, nous avons trouvé un contre-exemple ; il nous fallait donc être plus précis dans nos recherches.

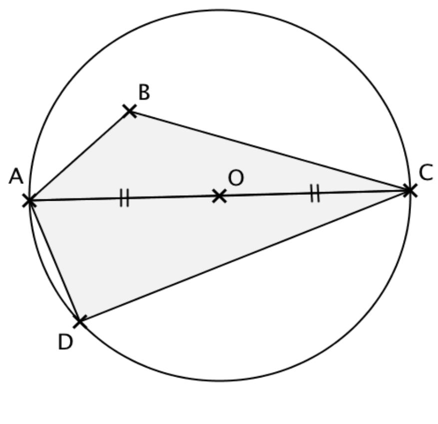

fig19

On considère un quadrilatère *ABCD* dont [*AC*] est la plus grande diagonale.

- Si les angles aux sommets *B* et *D* sont obtus.
On peut distinguer deux triangles, *ABC* et *ADC* dont les angles opposés au plus long côté sont obtus. Si on se réfère aux cas des triangles avec un angle obtus, le point de rendez- vous de chaque triangle est le milieu du côté opposé à l'angle obtus. **Donc le point de rencontre est le milieu de [*AC*].**

- Si l'angle au sommet *D* est droit et l'angle au sommet *B* est obtus.
On peut distinguer deux triangles: *ABC* et *ACD*; l'un est un triangle avec un angle obtus et l'autre un triangle rectangle.
Si on se réfère aux cas de ces deux triangles, le point de rendez-vous est le milieu du plus long côté. **Donc le point de rencontre est le milieu de [*AC*].**
Même raisonnement si les angles aux sommets *B* et *D* sont droits.

- Considérons maintenant *ABCD* un quadrilatère quelconque. On essaie de se ramener aux cas des triangles.
On divise ce quadrilatère en 4 triangles. Pour chacun de ces triangles, on peut trouver le point Z_i correspondant.

On choisit un triangle et on mesure deux distances :
1- La distance du point de rencontre du triangle au quatrième sommet ne faisant pas partie du triangle.
2- La plus longue distance entre le point de rencontre du triangle et un de ses sommets.
On compare ensuite ces deux distances et on obtient deux cas de figure :
a- La distance « 1 » est la plus courte, on a trouvé le point de rencontre, c'est celui du triangle choisi au départ puisque le quatrième sommet ne retarde pas la rencontre.
b- La distance « 1 » est la plus longue, le point de rencontre du triangle considéré ne convient pas, il faut refaire l'opération avec un autre triangle.

Par exemple ici, notons:
ABC---------------->*Z1*
ABD---------------->*Z2*
ACD---------------->*Z3*
BCD---------------->*Z4*

Prenons ABC. Supposons que Z_1 soit le point de rencontre de A, B et C:

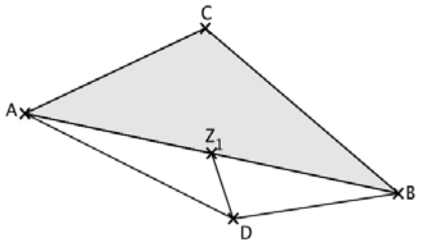

fig20

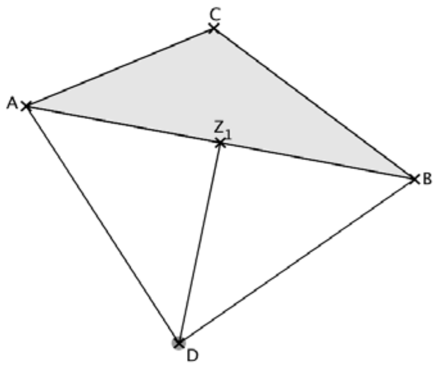

fig21

On compare : DZ_1 avec AZ_1.
Si $DZ_1 < AZ_1$, alors Z_1 est notre point de rendez-vous puisque D ne retarde pas la rencontre des trois autres.
Si $DZ_1 > AZ_1$, alors on passe à un autre triangle, et on répète l'opération.

Nous ne l'avons pas démontré mais nous avons fait de nombreux essais (notamment avec Géogébra) et nous pensons qu'avec cette méthode nous arrivons à trouver le point de rendez-vous des quatre personnes.

IV . <u>Avec cinq personnes</u>

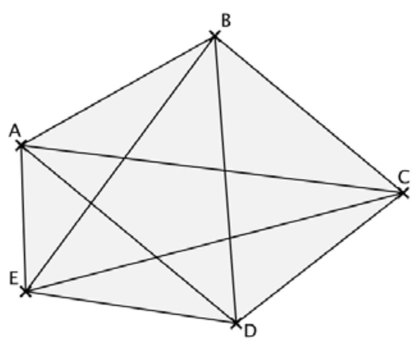

fig22

Pour trouver le point de rencontre d'un pentagone, il faut d'abord trouver les cinq points de rendez-vous des cinq quadrilatères avec la méthode indiquée ci-dessus. Puis on mesure deux distances :

1- La distance du point de rencontre d'un des quadrilatères au cinquième sommet ne faisant pas partie du quadrilatère.

2- La plus longue distance entre le point de rencontre de ce quadrilatère et un de ses sommets.

On compare ensuite ces deux distances et on obtient deux cas de figure :

a- La distance « 1 » est la plus courte, on a trouvé le point de rencontre, c'est celui du quadrilatère puisque le cinquième sommet ne retarde pas la rencontre.

b- La distance « 1 » est la plus longue, le point de rencontre du quadrilatère considéré n'est pas celui recherché, il faut refaire l'opération avec un autre quadrilatère.

IV . <u>Généralisation à n personnes</u>

Soit n un entier supérieur à 4. Dans le polygone P à n côtés, on peut former n polygones P_i à n–1 côtés qui nous donneront chacun n–1 points Z_i.
Il faudra relier ce point avec le *nième* sommet : cette distance sera comparée avec la plus grande distance entre Z_i et l'un des n–1 sommets du polygone P_i. Si la distance de Z_i au *nième* sommet est la plus courte alors Z_i est notre point de rencontre ; sinon on répète l'opération avec un autre polygone P_i.

Cette méthode peut s'avérer très longue et le problème reste à savoir si les essais successifs ont une fin et si l'on trouve enfin le point de rendez-vous. Nos recherches se sont limitées à 4 et 5 personnes et nous pensons que cette méthode nous permet de trouver le point de rendez-vous.