MATh en JEANS

Aix*Marseille université

Projet : reconstruction d'un circuit automobile

LYCÉE PASQUET
lycée général & technologique

PASQUET ECO MOTION

Projet réalisé dans le cadre de l'Accompagnement personnalisé : « Atelier Math. En .Jeans »

Par les élèves : Tom Daumas , Amandine Gayton , Jules Guidotti, Clément Rouhier.
Elèves de seconde au lycée Pasquet à Arles

Avec Sylvie Larras (professeur de mathématiques)
et Romain Raffin (Enseignant-chercheur, IUT Aix-Marseille, LSIS UMR 7296)

On cherche à entraîner un pilote sur un circuit :

- il nous faut le tracé du circuit pour l'intégrer dans une simulation, avec un point de départ et d'arrivée, une possibilité de calculer les vitesses, les rayons des virages.

- dans un cas hypothétique on pourrait pré-calculer une trajectoire idéale.

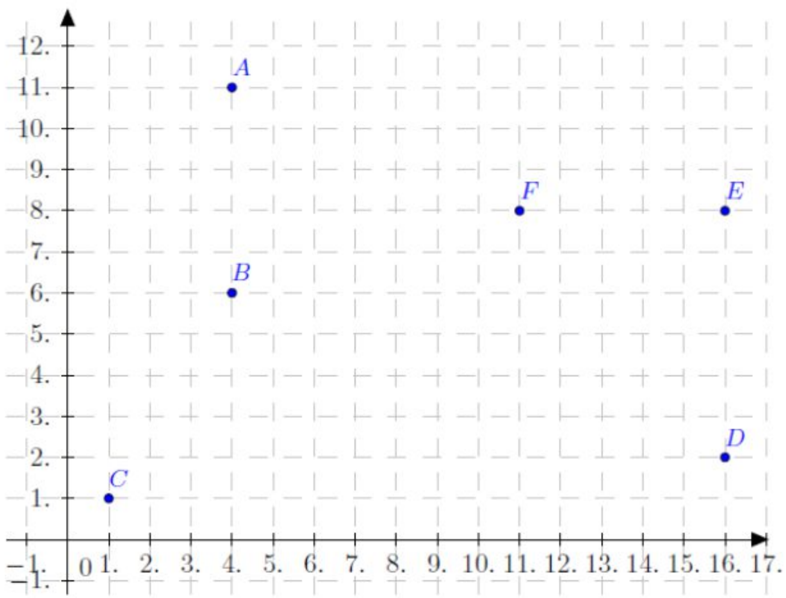
- il nous faut à tout instant pouvoir calculer une distance au point de départ ou d'arrivée, en fonction d'une durée pour calculer une consommation ou une vitesse moyenne.

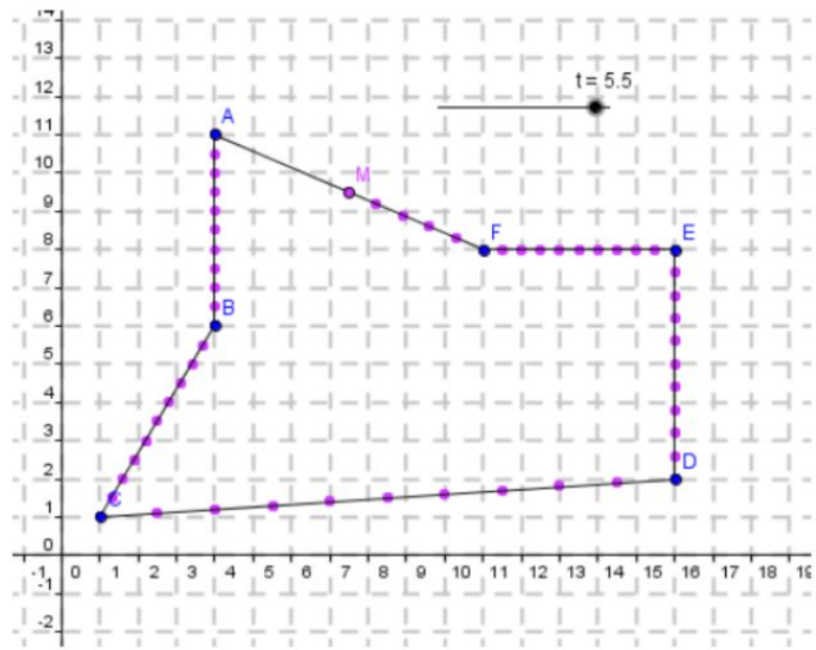
Pour ce faire on place des points sur la vue aérienne d'un circuit et on cherche une courbe « pratique » qui permette de relier ces points (on dit une courbe d'interpolation).

Cela permet de contraindre la courbe avec des critères (vitesse, accélération, zones de freinage, …) et donc de proposer la trajectoire « optimale » au conducteur.

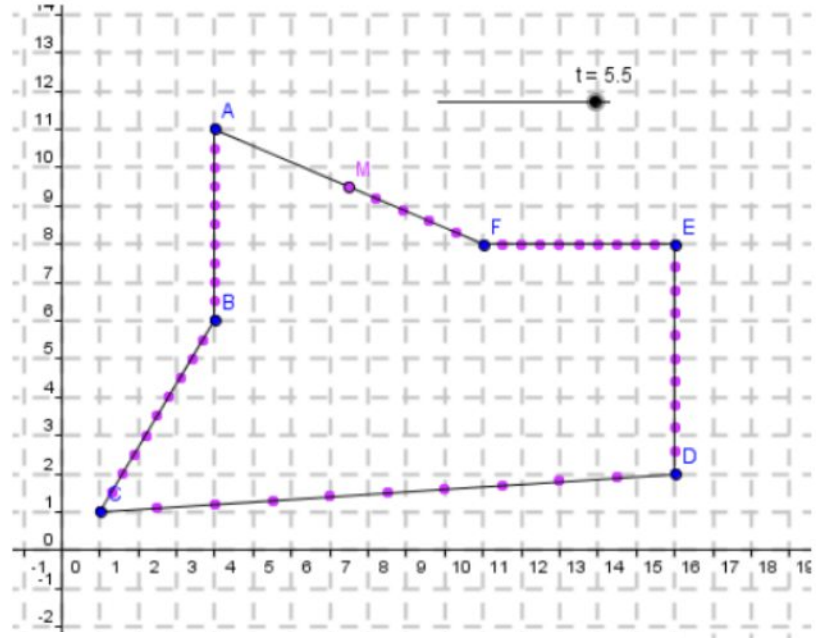
Première idée :

Vue aérienne du circuit de Lurcy-Lévis





<u>Première idée</u>: Relier les points par des segments et en chercher des équations.



[AB] a pour équation $x = 4$ avec $y \in [6; 11]$

[BC] a pour équation $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3}$

Par exemple :

- Le segment [AB] est parallèle à l'axe des ordonnées , A(4 ;11) et B(4 ;6) donc [AB] a pour équation $x = 4$ avec $y \in [6; 11]$
- $[BC]$ a une équation de la forme $y = ax + b$ avec $x \in [1; 4]$.

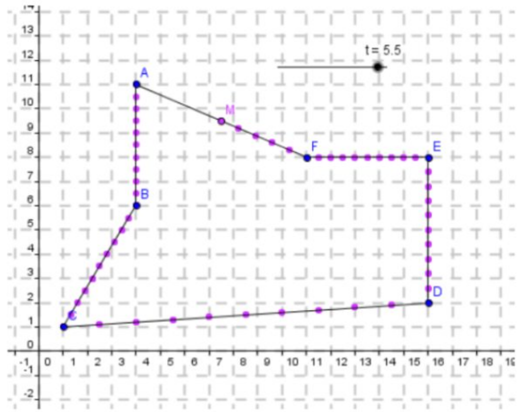
On peut associer f la fonction affine telle que $f(1) = 1$ et $f(4) = 6$.

On a alors : $a = \dfrac{6-1}{4-1} = \dfrac{5}{3}$ puis $f(x) = \dfrac{5}{3}x + b$

$f(1) = 1 \iff \dfrac{5}{3} \times 1 + b = 1 \iff b = -\dfrac{2}{3}$

Ainsi $f(x) = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3}$ et [BC] a pour équation $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3}$

Le problème des équations précédentes est qu'on ne peut pas savoir dans quel ordre sont parcourus les points.



On appelle t le temps en minutes écoulé depuis le départ.
Si A est le point de départ et d'arrivée, l'ordre des points est alors A pour t= 0, B pour t= 1 , C pour t= 2 etc...
Si M est un point mobile sur le circuit , il vérifie la relation: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0, 1]$

Cette relation permet d'exprimer les coordonnées du point M(x; y) en fonction du "paramètre" t qui représente le temps.

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t(x_B - x_A) \\ y - y_A = t(y_B - y_A) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5t + 11 \end{cases} \quad (t \in [0; 1])$$

On obtient une représentation paramétrique de chaque segment.

Seul, un paramètre "global" et non autant de paramètres que de segments permet de déplacer un point M sur le circuit en faisant varier t de 0 à 6

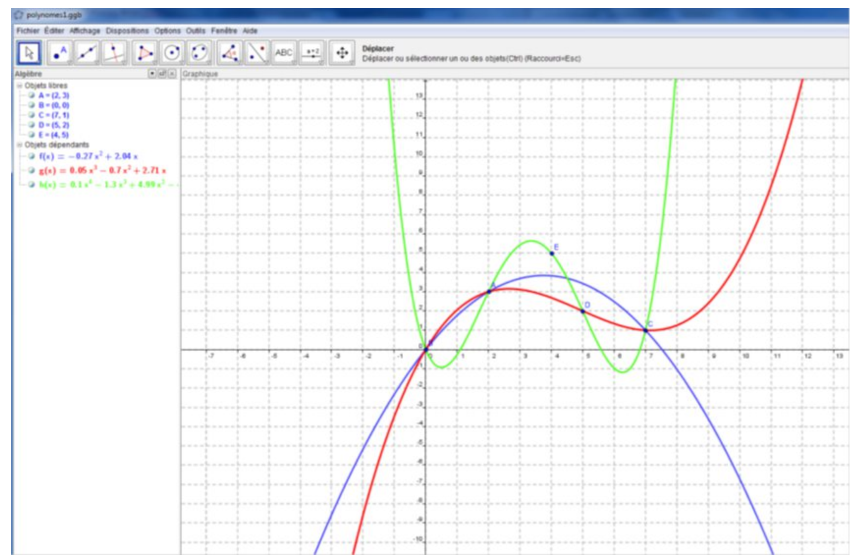
Si[t < 1, (4, -5 t + 11), Si[t < 2, (-3 t + 7, -5 t + 11), Si[t < 3, (15t - 29, t - 1), Si[t < 4, (16, 6t - 16), Si[t < 5, (-5 t + 36, 8), (-7 t + 46, 3t - 7)]]]]]

Bilan 1 : le problème de cette première idée est que les virages posent souci : les passages en C , D risquent de mal se passer pour une voiture car il y a une "rupture " de la courbure en ces points.

Deuxième idée :

Vue aérienne du circuit de Fontange

Vue aérienne du circuit de Charade



Deuxième idée : essayer de reconstruire le circuit avec d'autres courbes.

Utilisation de polynômes pour interpoler.

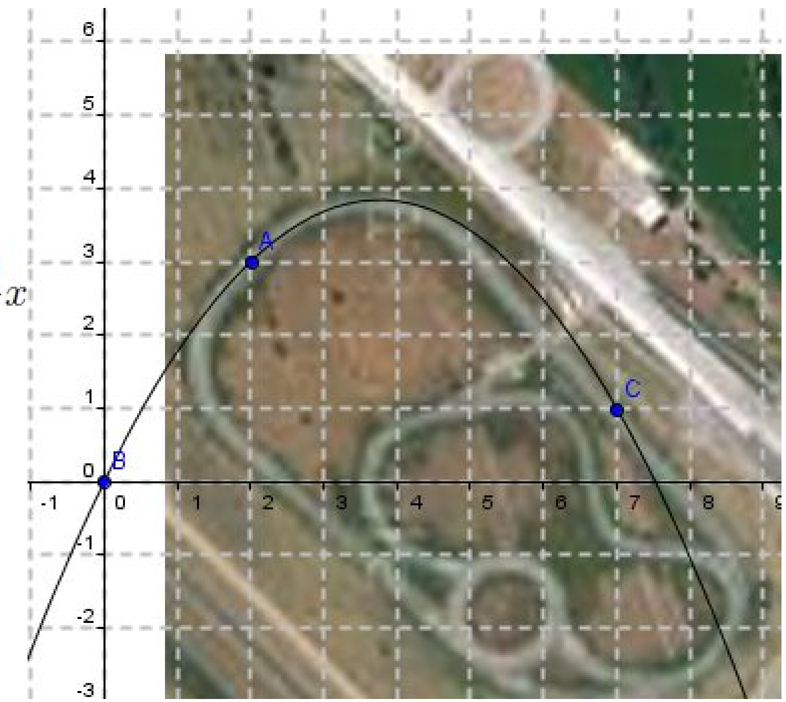
Polynômes de degré 2 : On connaît trois points A, B, C et on cherche une fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b, et c trois réels et $a \neq 0$) et telle que sa représentation graphique passe par les trois points A(2 ;3),B(0 ;0) et C(7 ;1). On obtient ainsi un système de trois équations à trois inconnues a,b, c à résoudre.

Pour que la courbe passe par les points A,B,C la fonction f doit être telle que : $f(2) = 3$, $f(0) = 0$, et $f(7) = 1$.

On obtient ainsi le système à résoudre : $\begin{cases} 2^2 \times a + 2 \times b + c = 3 \\ 0^2 \times a + 0 \times b + c = 0 \\ 7^2 \times a + 7 \times b + c = 1 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $a = -\frac{19}{70}, b = \frac{143}{70}, c = 0$.

On obtient ainsi la fonction f qui s'exprime : $f(x) = -\frac{19}{70}x^2 + \frac{143}{70}x$



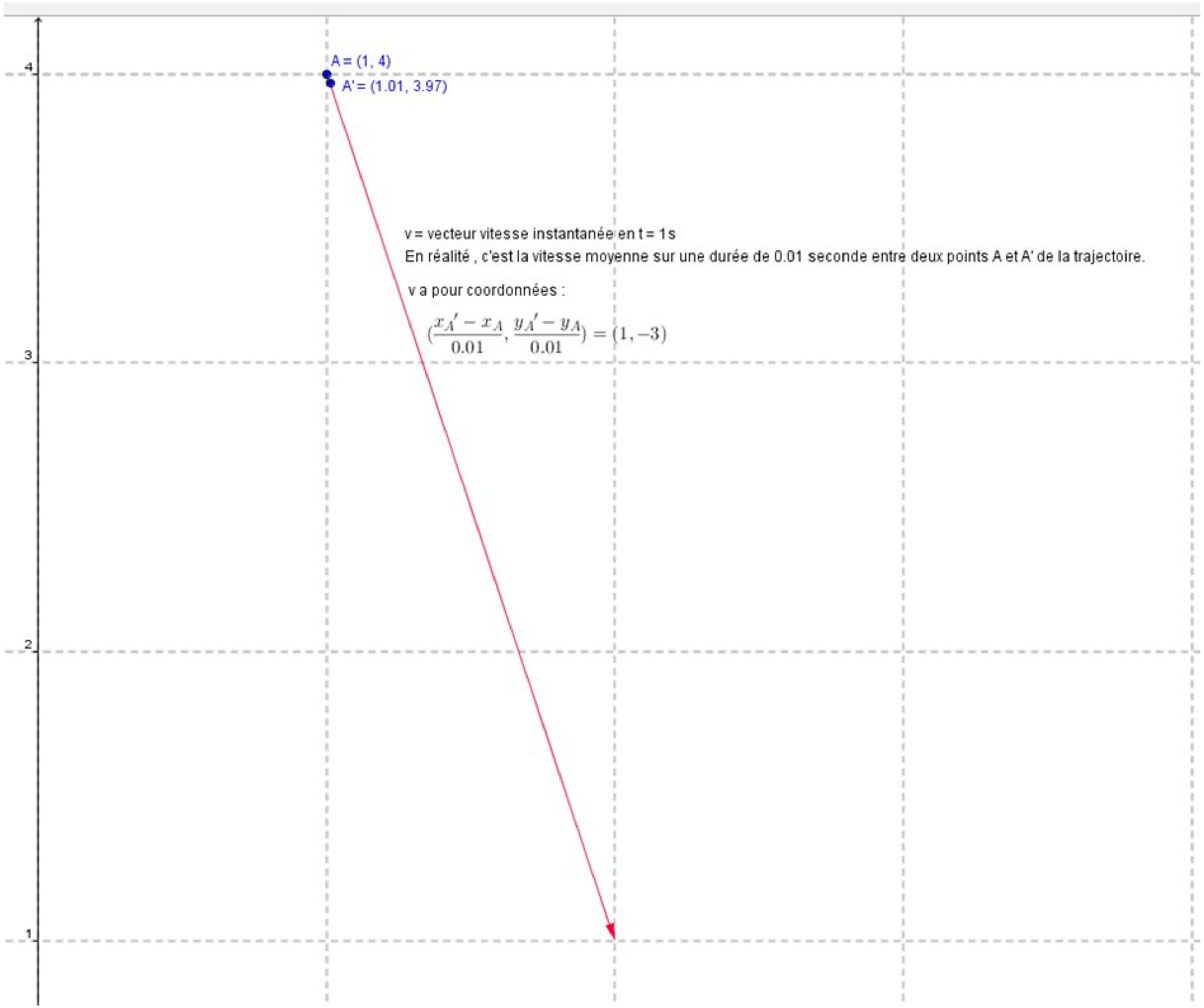
Ensuite, si on connaît 4 points A,B, C,D, le polynôme d'interpolation (en rouge) est un polynôme de degré 3 , et si on connaît 5 points A,B,C,D,E , le polynôme d'interpolation (en vert) est de degré 4 . Chercher ces polynômes d'interpolation donne des systèmes à 4, 5 inconnues compliqués à résoudre !

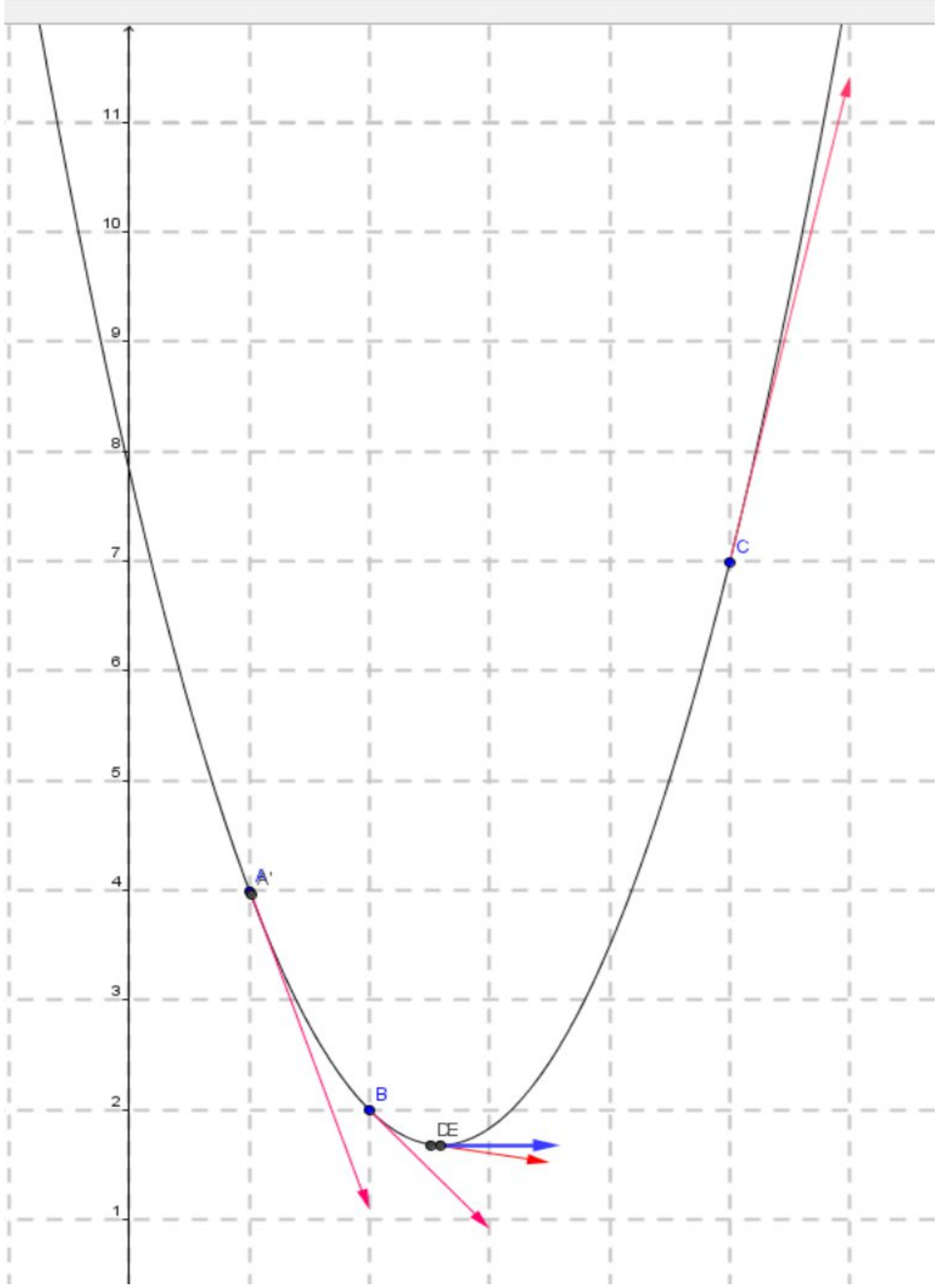
Ces courbes semblent plus "appropriées aux virages" car elles sont plus "lisses".

Lien entre trajectoire et vitesse :
t désigne le temps. M représente un point qui se déplace au cours du temps. La trajectoire du point M est l'ensemble des positions qu'il occupe au cours du temps , elles sont données par les coordonnées de M(x(t); y(t)).
Si un "radar" est placé sur le parcours, il mesure une vitesse moyenne sur une dizaine de mètres environ, une distance suffisamment courte par rapport à l'ensemble du parcours pour que l'on parle de vitesse instantanée.
On représente la vitesse instantanée par un vecteur dont l'origine est le point en lequel la vitesse est mesurée et qui donne la « valeur » de la vitesse, sa direction et son sens.

Exemple :

Dans le repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$: A(1,4) , B(2,2) et C(5,7). Le polynôme de degré 2 qui interpole ces trois points est :$f(x) = 0.917x^2 - 4.75x + 7.833$
On suppose qu'un mobile se déplace de A à C sur cette trajectoire et qu'à l'instant $t = 1$ seconde , il se situe en A , à t= 2 s en B et à t= 5 s en C .
(On a $x = t$)
On prend un point de la trajectoire assez proche de A(1 ;f(1)) par exemple A'(1,01 ; f(1,01)) .
$f(1) = 4$ et $f(1.01) = 3.97$
On calcule les coordonnées du vecteur vitesse instantanée v_A en t = 1 : (en réalité entre t= 1 et t= 1.01 s) :
$(\frac{x_{A'} - x_A}{1.01 - 1}; \frac{y_{A'} - y_A}{1.01 - 1}) = (\frac{1.01 - 1}{1.01 - 1}; \frac{3.97 - 4}{1.01 - 1}) = (1; -3)$ donc $v_A(1; -3)$.
De même $v_B(1; -1)$ et $v_C(1; 4,4)$.


A = (1, 4)
A' = (1.01, 3.97)
v = vecteur vitesse instantanée en t = 1s
En réalité , c'est la vitesse moyenne sur une durée de 0.01 seconde entre deux points A et A' de la trajectoire.
v a pour coordonnées :
$(\frac{x_A{}' - x_A}{0.01}, \frac{y_A{}' - y_A}{0.01}) = (1, -3)$
1
2
3
4



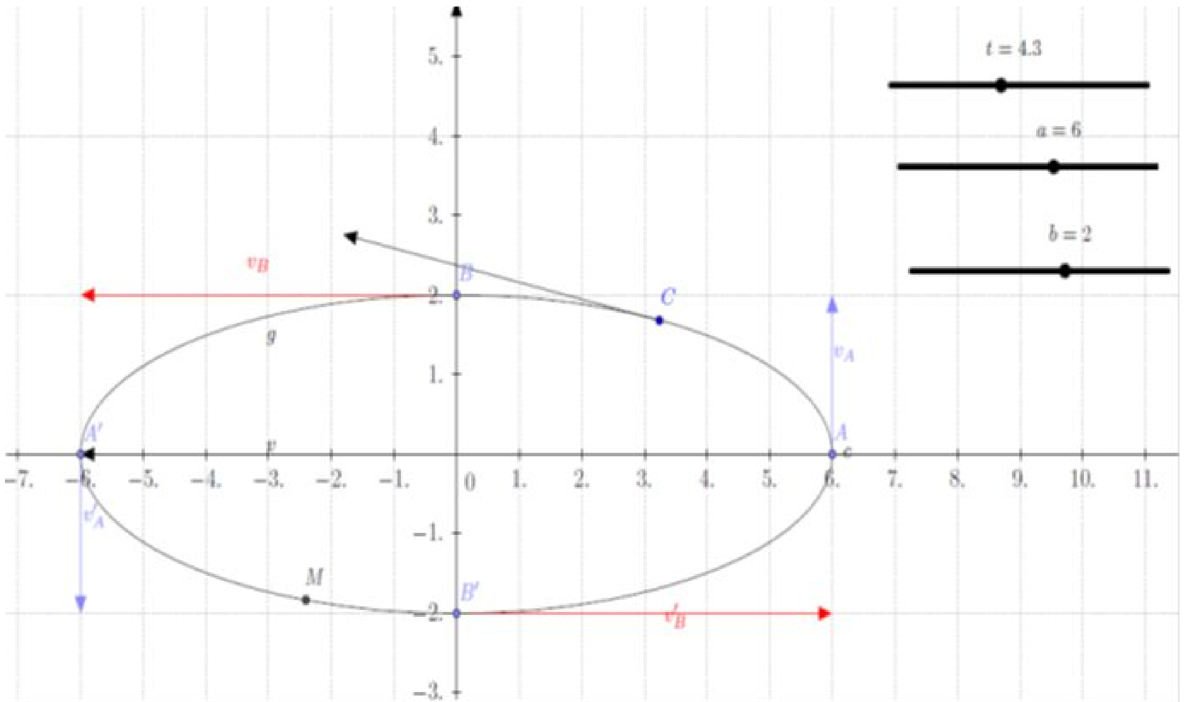
On observe qu'il y a un point E en lequel la vitesse est minimale (vecteur bleu) , que cela correspond à un virage. De plus , au voisinage de ce point , la direction des vecteurs vitesse varie beaucoup. On observe aussi que sur "les portions droites" , la vitesse augmente comme par exemple en C et que les vecteurs ne varient pas beaucoup de direction.

Bilan 2 : Les polynômes permettent d’obtenir des trajectoires "lisses" pour lesquelles la vitesse peut varier de façon "continue".
Le problème est que ces courbes ne permettent pas de représenter un circuit fermé, puisque deux points ont forcément des abscisses différentes.

Troisième idée :

L’ellipse est une courbe fermée , lisse, et qui a une représentation paramétrique. Donc elle semble ne pas présenter les inconvénients rencontrés avec les courbes précédentes.

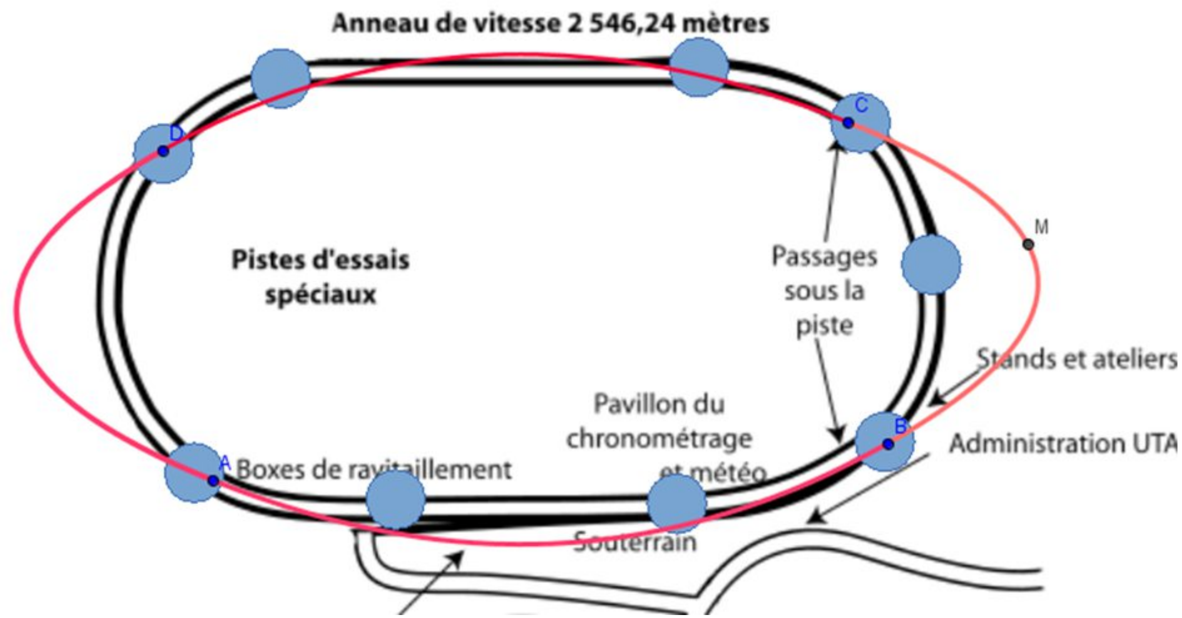
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$



Bilan 3 : Si on connaît 4 points qui sont les extrémités des deux axes de symétrie de l’ellipse, il est facile de déterminer une équation de l’ellipse.

Mais si on connaît 3 points ou 4 points sans information supplémentaire, il paraît difficile de déterminer une ellipse passant par ces 3 points….

Quatrième idée :
Interpolation avec
la formule de Catmull-Rom



On applique ensuite la formule de Catmull-Rom pour la courbe C0(t), de A à B :

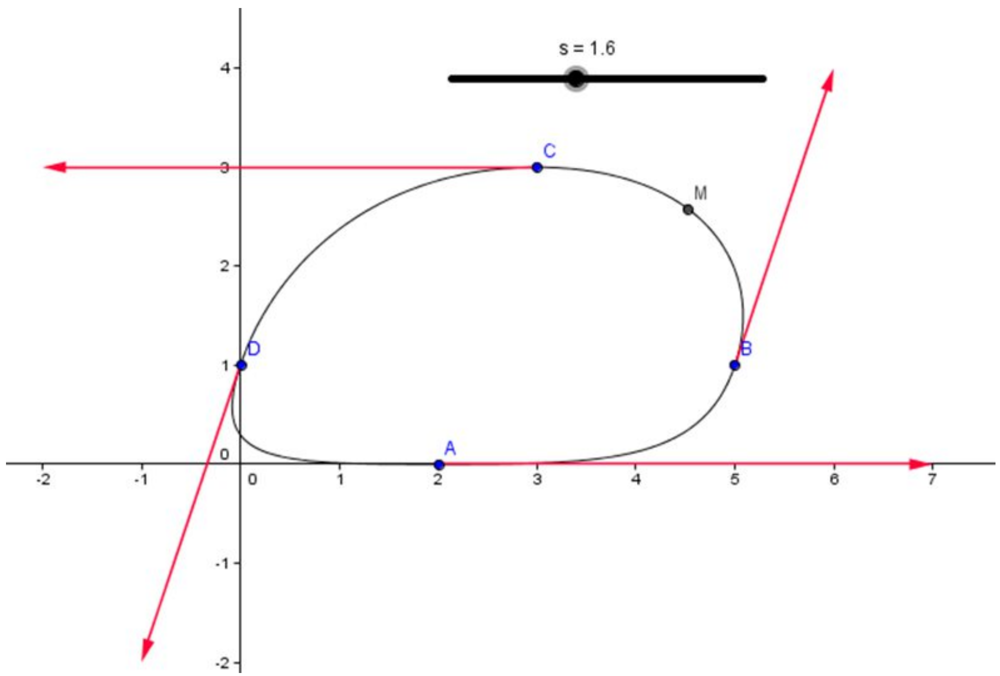
$C0(t) : (1+2t)(1-t)^2 A + t(1-t)^2 \overrightarrow{DB} + t^2(3-2t)B + t^2(t-1)\overrightarrow{AC}$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$

Cela donne la représentation paramétrique suivante :

$c0x(t) = (1+2t)(1-t)^2 x(A) + t(1-t)^2(x(B)-x(D)) + t^2(3-2t)x(B) + t^2(t-1)(x(C)-x(A))$

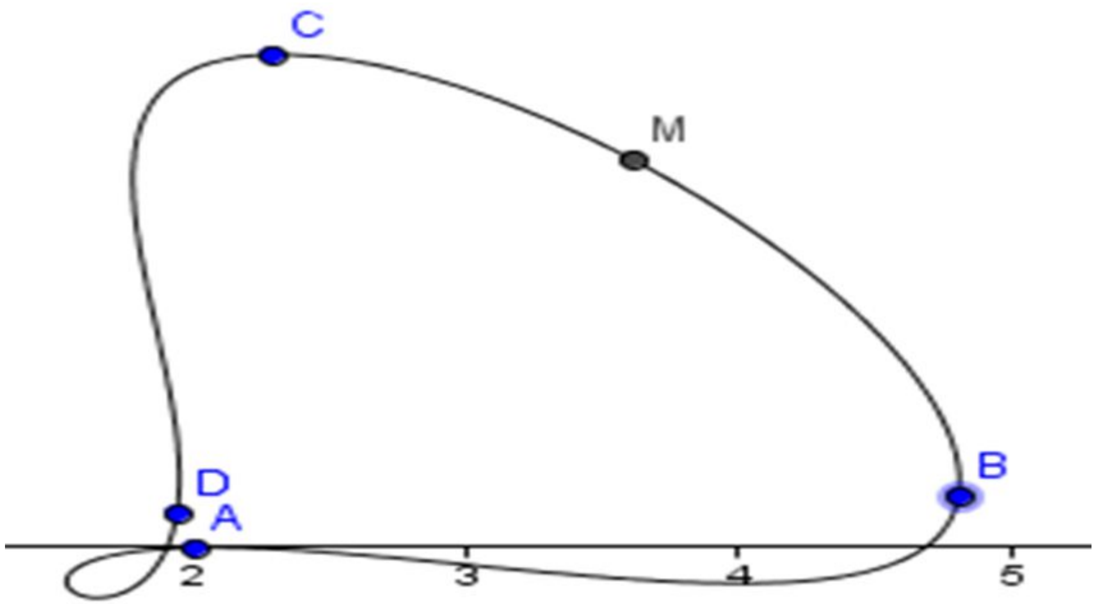
$c0y(t) = (1+2t)(1-t)^2 y(A) + t(1-t)^2(y(B)-y(D)) + t^2(3-2t)y(B) + t^2(t-1)(y(C)-y(A))$

De la même manière pour C1(t) de B à C, C2(t) de C à D et C3(t) de D à A.



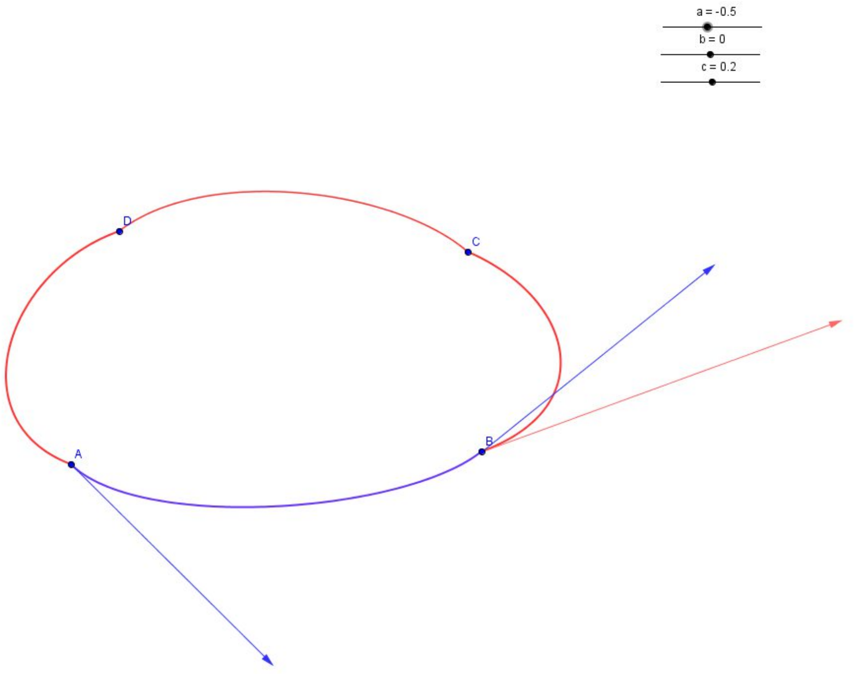
Déplacement de M sur la courbe entière en partant de A :

Si[s < 1, (c0x(s), c0y(s)), Si[s < 2, (c1x(s - 1), c1y(s - 1)), Si[s < 3, (c2x(s - 2), c2y(s - 2)), (c3x(s - 3), c3y(s - 3))]]]



Bilan 4 : La courbe obtenue est fermée , "lisse" , donc elle permet de modéliser un circuit en respectant les vitesses (elles peuvent varier de façon continue).
On peut prendre autant de points qu'on veut , on peut toujours calculer les équations des courbes (c'est juste plus long !)
Inconvénients : lorsqu'on déplace un seul point, on s'aperçoit que toute la courbe est déformée. Et si on choisit des points rapprochés ,dans certains cas, la courbe se croise elle-même.

Amélioration avec les courbes de Kochanek-Bartels



Une courbe de Kochanek-Bartels est une courbe de Hermite cubique avec 3 paramètres définis pour modifier le comportement des tangentes.
Pour interpoler n + 1 points p_0, ..., p_n, avec n courbes : pour chaque courbe, nous avons un point de départ p_i et un point d'arrivée p_{i+1} avec une tangente de départ d_i et une tangente d'arrivée d_{i+1} définies par :

$$d_i = \frac{(1-a)(1+b)(1+c)}{2}(p_i - p_{i-1}) + \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{2}(p_{i+1} - p_i)$$
$$d_{i+1} = \frac{(1-a)(1+b)(1-c)}{2}(p_{i+1} - p_i) + \frac{(1-a)(1-b)(1+c)}{2}(p_{i+2} - p_{i+1})$$

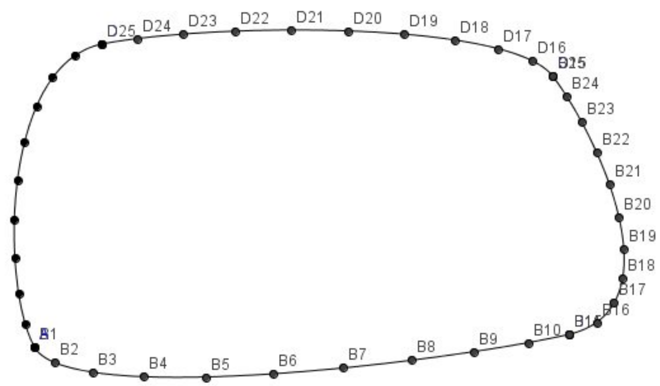
Le paramètre de tension *a* modifie la longueur du vecteur tangente.
Le paramètre de polarisation *b* principalement change la direction du vecteur tangente.
Le paramètre de continuité *c* réglé à 0 assure la continuité entre les tangentes successives.
Un réglage de chaque paramètre à zéro donne une spline de Catmull-Rom.

Equation de la partie de courbe entre A et B:

$$c0x(t) = (1+2t)(1-t)^2x(A)+t(1-t)^2\left(\frac{(1-a)(1+b)(1+c)}{2}(x(A)-x(D))+\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{2}(x(B)-x(A))\right)+t^2(3-2t)x(B)+t^2(t-1)\left(\frac{(1-a)(1+b)(1-c)}{2}(x(B)-x(A))+\frac{(1-a)(1-b)(1+c)}{2}(x(C)-x(B))\right)$$

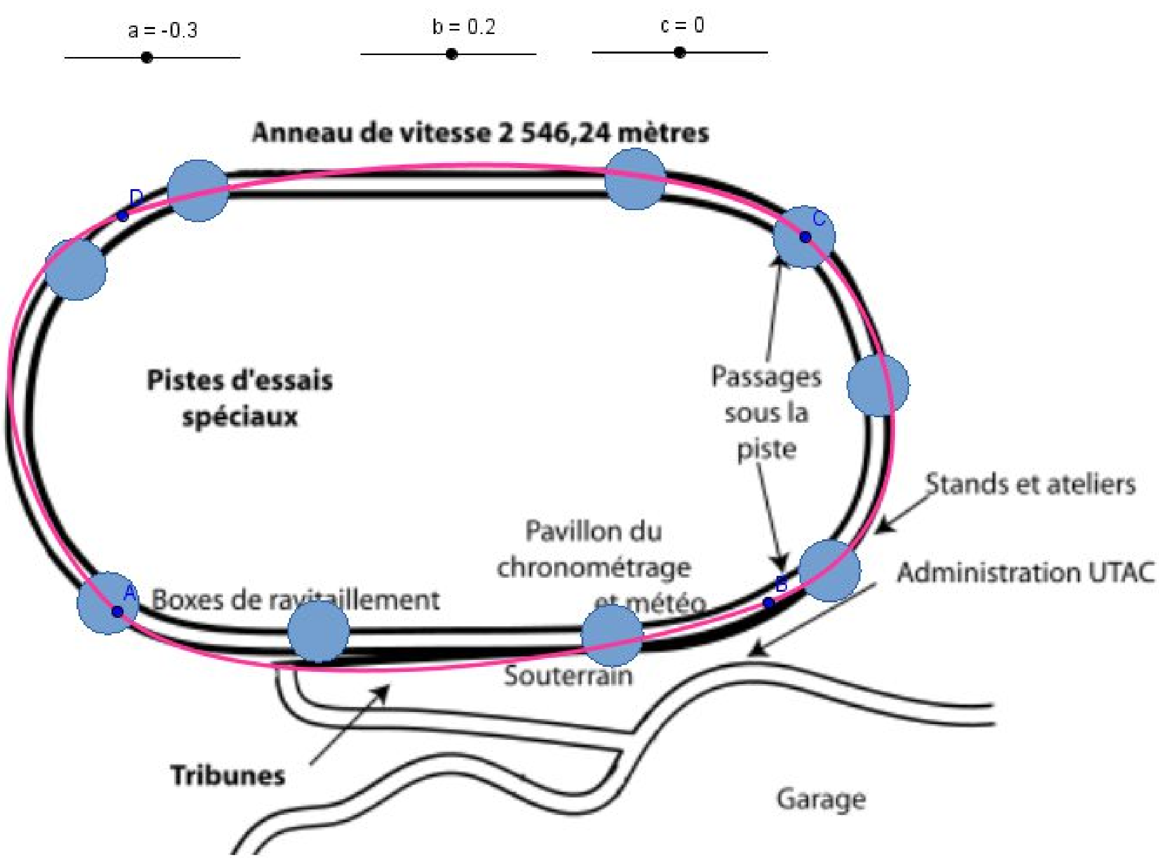
$$c0y(t) = (1+2t)(1-t)^2y(A)+t(1-t)^2\left(\frac{(1-a)(1+b)(1+c)}{2}(y(A)-y(D))+\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{2}(y(B)-y(A))\right)+t^2(3-2t)y(B)+t^2(t\breve{\ }1)\left(\frac{(1-a)(1+b)(1-c)}{2}(y(B)-y(A))+\frac{(1-a)(1-b)(1+c)}{2}(y(C)-y(B))\right)$$

On peut calculer approximativement la longueur de la courbe en prenant des points proches les uns des autres et calculant la somme des longueurs des segments reliant ces points.
Reste ensuite à mettre les résultats à l'échelle réelle.



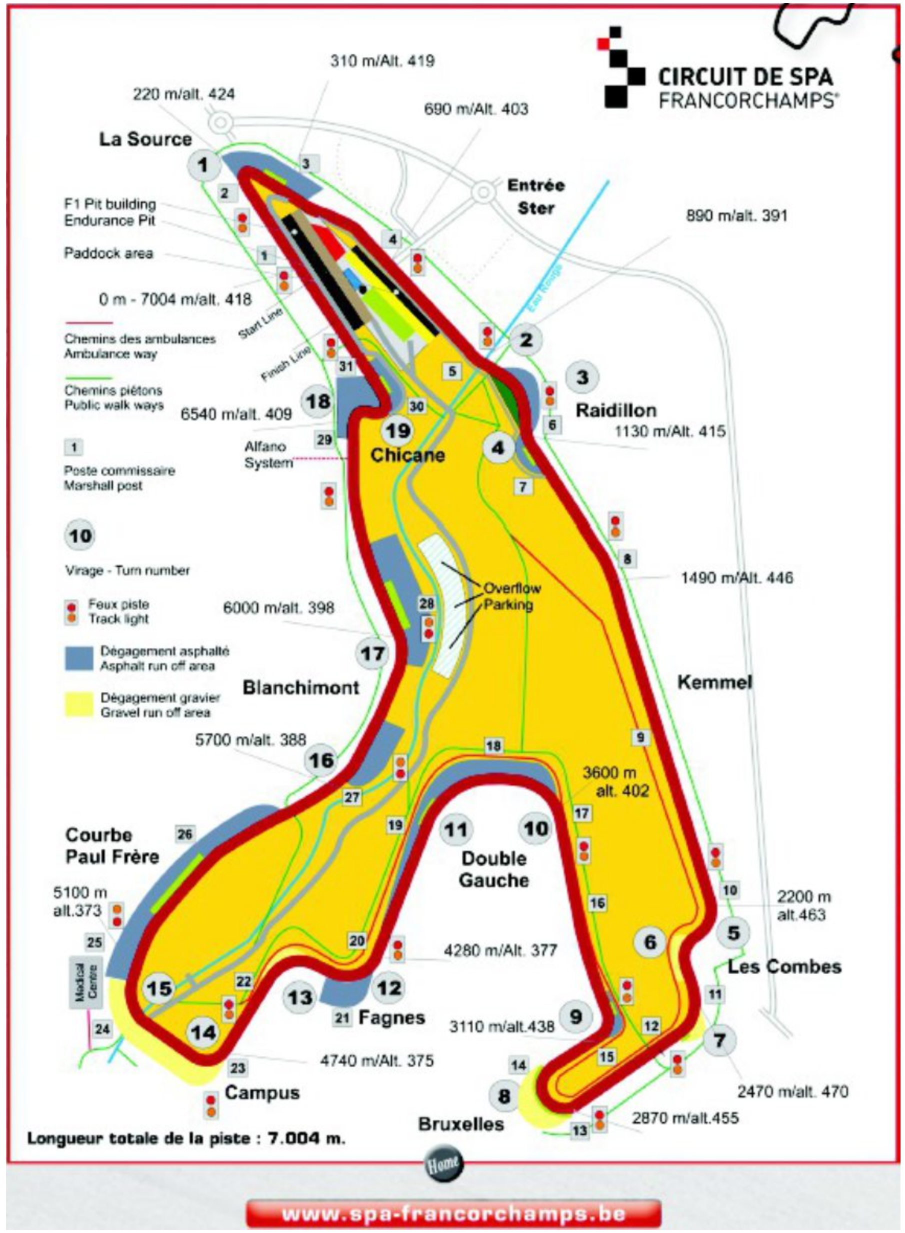
longueur totale = 23.04+12.71+19.47+14.34=69.57

Bilan 5 : Les courbes de Kochanek –Bartels permettent d'obtenir une bonne approximation d'un circuit et de le « reconstruire ».

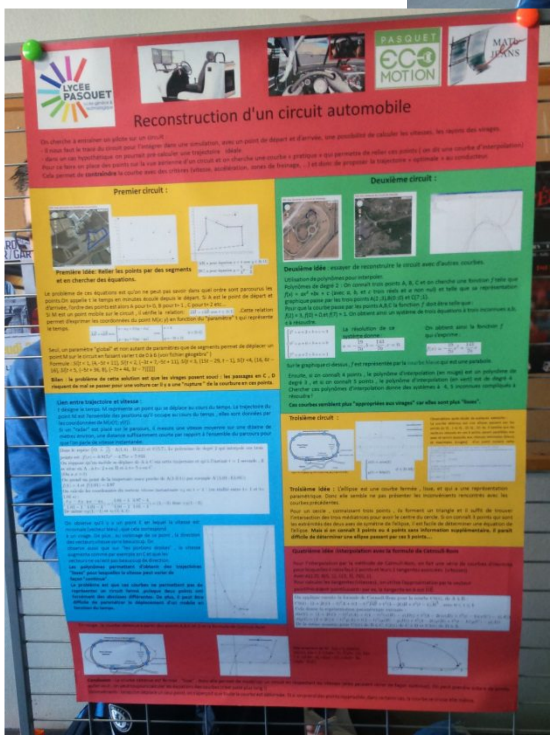


https://fr.wikipedia.org/wiki/Autodrome_de_Linas-Montlhéry

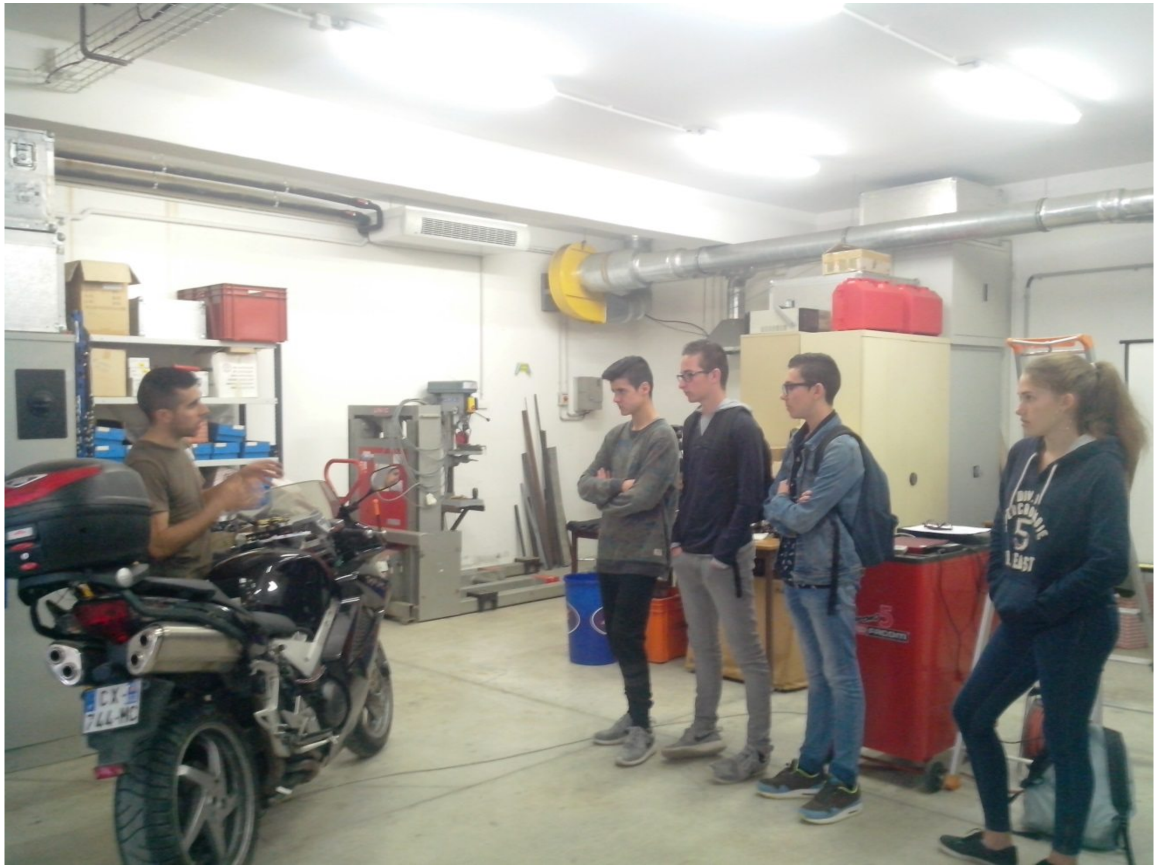
Poursuite du projet : Reconstruire avec ces courbes un circuit plus compliqué.
Il faudra bien choisir les points et écrire un algorithme pour obtenir la courbe.



Participation au congrès « Maths en Jeans » à Avignon le 26 mars 2015



Visite de l'Ifsttar à Salon-de Provence (*Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux)*



Visite d’un simulateur et de véhicules instrumentés


IFSTTAR


CX-730-MC