Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Recollons les morceaux

BOUDET Corentin (TS)
TRIMOREAU Vincent (TS)
PARIS Nicolas (TS)

Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot, chercheur à la faculté des sciences d'Angers

Lycée Guy Moquet, Chateaubriant

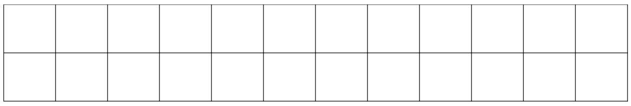
Prenons deux polygones A et B dans le plan. On veut découper A en plusieurs petits polygones, et recoller ces petits polygones pour obtenir B. On comprend facilement qu'il est nécessaire que A et B aient la même aire. On utilise ainsi cette méthode de découpage pour démontrer le théorème de Pythagore.

La question qui se pose est de savoir si, étant donné deux polygones de même aire, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement, et si oui, comment ?

Sommaire:

1) Introduction

Prenons un exemple simple: un rectangle de douze unités de longueur et de deux unités de largeur (fig.1). Il peut être découpé en deux rectangles de six unités de longueur et de deux unités de largeur que l'on colle afin d'obtenir un rectangle de six unités de longueur et de quatre unités de largeur.

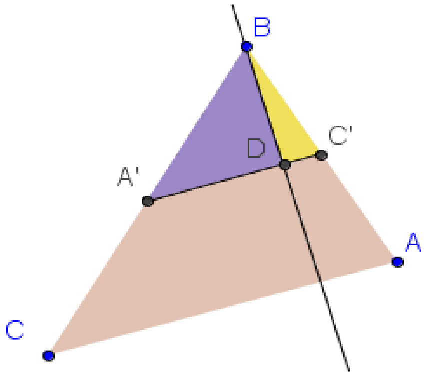


(fig.1)

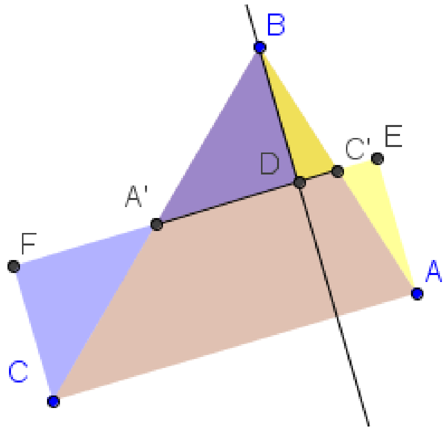
On a de façon assez simple découpé un rectangle pour obtenir un rectangle de dimensions différentes et de même aire.

2) Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire?

Pour réaliser le découpage, on doit d'abord tracer la droite qui passe par le milieu de deux des côtés du triangle puis tracer la hauteur issue du sommet opposé au dernier côté du triangle.



Cette hauteur intersecte [A'C'] en D et les triangles A'BD et C'BD sont rectangles en D.



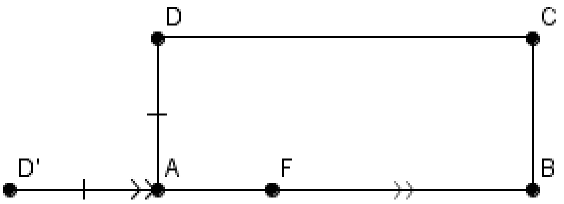
On trace ensuite le symétrique du triangle A'BD par la symétrie de centre A'. Comme A' est le milieu de [BC], C est le symétrique de B. Le symétrique de D est noté F et par propriété de la symétrie centrale, l'angle $\widehat{A'FC}$ est droit. On trace de même le symétrique du triangle C'BD par la symétrie de centre C'. Le symétrique de D est noté E et l'angle $\widehat{C'EA}$ est lui aussi droit.

Les points F, A', D, C', et E sont alignés, les droites (EF) et (CA) sont parallèles, donc le quadrilatère CFEA est un rectangle.

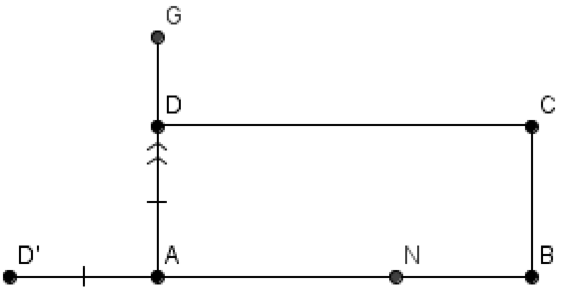
3) Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire?

Tout d'abord, on considère un rectangle de longueur a et de largeur b (d'aire ab).
Pour obtenir un carré de même aire que le rectangle , il faut savoir tracer la longueur $\sqrt{ab}$ connaissant les longueurs a et b.

Dans un rectangle ABCD tel que AB=a et AD=b, on trace la demi-droite [BA) et on place le point D' tel que AD'=AD.
Plaçons ensuite le point F milieu de [BD'].

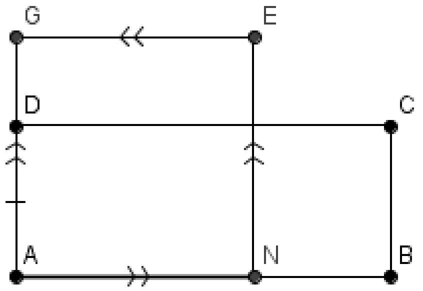


Traçons ensuite le cercle de diamètre [BD'] et de centre F , l'intersection de ce cercle avec la

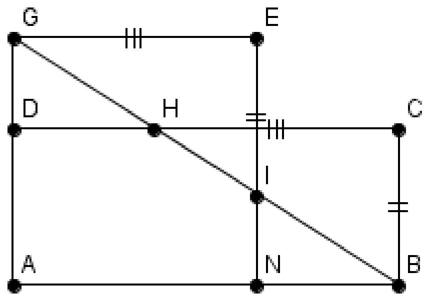


perpendiculaire à (AB) passant par D est le point G tel que le segment AG= $\sqrt{ab}$. (1)

Il reste à placer le point E et le carré ANEG a alors pour aire ab.



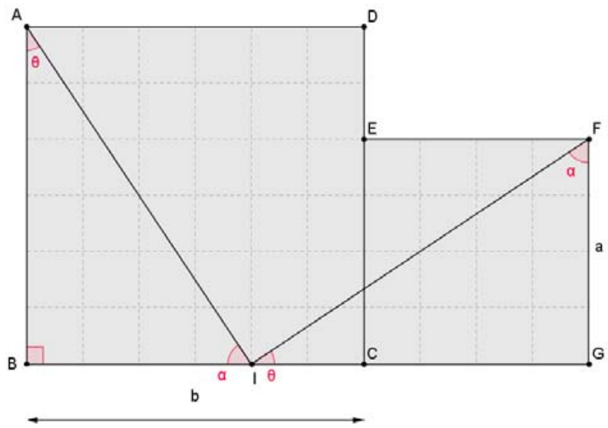
Une fois que l'on a ce carré d'aire ab , on le superpose sur le rectangle d'origine d'aire ab de façon à avoir un sommet quelconque du carré sur un sommet du rectangle et les droites du côté de ce sommet se superposant. Nous traçons ensuite le segment [GB].



Ceci forme sur ce schéma les triangles HCB et INB que l'on découpe. On remplace ensuite le triangle GDH par le triangle INB ainsi que le triangle GIE par le triangle HBC. On a obtenu une méthode pour découper un rectangle quelconque d'aire ab en un carré d'aire ab. (2)

4) Théorème de Pythagore (3)

Considérons deux carrés d'aires différentes ADCB et EFGC mis côte à côte. Plaçons ensuite le point I sur le segment [BG] tel que BI=CG.



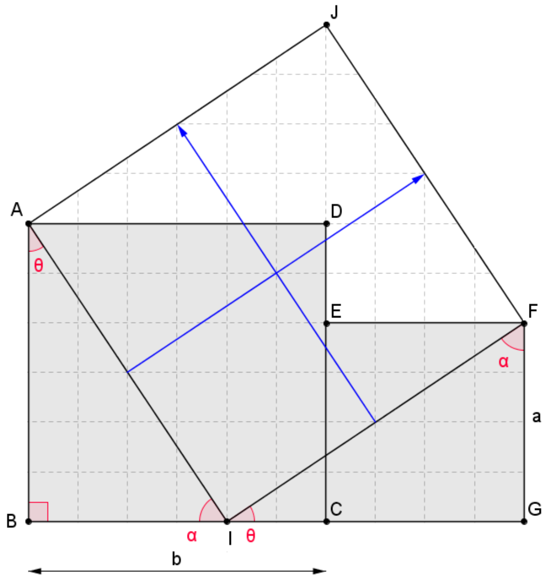
Les triangles ABI et FGI sont isométriques puisque ils possèdent un angle de $\frac{\pi}{2}$ et ont les côtes adjacents à cet angle qui sont de même de mesure:

- FG=IB=a
- BC=b et IG=BG-BI=(b-a)+a=b

Soit J le translaté du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$, le quadrilatère AJFI est alors un parallélogramme. De plus FI=IA donc le parallélogramme AJFI est un losange.

Et pour finir ($\overrightarrow{GF};\overrightarrow{GI}$)= $\frac{\pi}{2}$ d'où

$$\theta+\alpha=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$



or $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IF})+(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})$

et $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IB})=\pi$ et posons $(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IA})=\lambda$
ainsi

$$\pi=\theta+\lambda+\alpha$$

$$\lambda=\pi-(\theta+\alpha)$$

$$\lambda=\frac{\pi}{2}$$

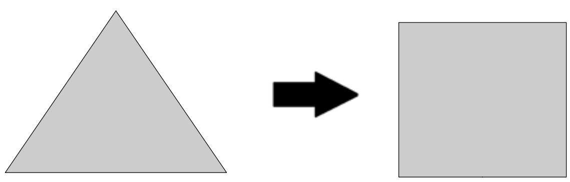
d'où AJFI est un carré.

5) Récurrence

Soit P(n) la propriété :
Tout polygone de n cotés et d'aire a peut se découper pour obtenir un carré d'aire a

Initialisation :

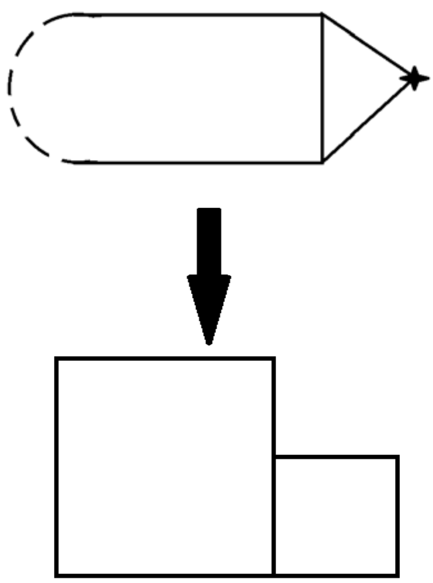
Pour n=3, on sait découper un triangle en un rectangle de même aire et on sait découper un rectangle en un carré de même aire.



On a par la même occasion montré que la propriété était vraie pour n=4 donc P(3) et P(4) sont vraies

Hérédité :

Supposons la propriété P(n) vraie à un rang n donné (n > 2) et considérons un polygone de n+1 côtés.
Un polygone de n+1 côtés peut être découpé en un polygone de n côtés et un triangle. (4)
On peut alors en utilisant l'hypothèse de récurrence découper le polygone de n côtés en carré et le triangle aussi. Nous nous retrouvons alors dans la situation suivante :



Or grâce à notre démonstration du théorème de Pythagore, on peut découper ces deux carrés pour obtenir un carré d'aire a. Donc P(n+1) est vraie.
(5)

Conclusion :
D'après l'axiome de récurrence, tout polygone peut se découper en un carré de même aire.

6) Conclusion

Dans le cas général on cherche à découper un polygone P_1 de p_1 côtés en un polygone P_2 de p_2 côtés tous deux de même aire.

Tout d'abord il faut découper le polygone P_1 et le polygone P_2 de façon à les ramener sur le carré C de même aire.

Ensuite pour réaliser le découpage de P_1 à P_2 (et inversement) on pose le découpage de P_1 et le découpage de P_2 sur C et on coupe chaque découpage selon les traits de découpages de l'autre et le tour est joué.

Notes de l'édition

(1) L'argument justifiant que AG est bien la longueur du côté du carré cherché n'est pas donné. Mais une petite recherche devrait permettre à chacun de retrouver cet argument (aide : déterminer les longueurs AF et AG puis appliquer Pythagore dans AFG).

(2) Pour que la démonstration soit complète, il faut expliquer pourquoi les triangles que l'on remplace sont bien identiques (GEI identique à HCB et GDH identique à INB). (indice : on peut déduire que (DN) est parallèle à (GB) grâce à la réciproque du théorème de Thalès (et sans s'embrouiller dans les calculs avec les racines carrées)).

(3) Cette section s'appelle ainsi car dans la démonstration qui suit (et en particulier dans la figure en haut de la colonne 1 page 3), le carré construit à partir des deux carrés de côté a et b a pour aire c^2 où c est le troisième côté du triangle rectangle de côté a et b. Ainsi ce découpage est une preuve du théorème de Pythagore.

(4) Si le résultat est assez évident pour un polygone convexe, il est un peu plus difficile pour un polygone quelconque. L'article, sans le dire vraiment, admet le résultat pour pouvoir continuer la preuve.

(5) Dans l'initialisation, puis dans l'hérédité, le découpage final du triangle pour obtenir le carré, puis le découpage final du polygone à n côtés pour obtenir le carré ne sont pas complètement explicités, mais on devine bien qu'il faudra superposer les découpages successifs pour obtenir le découpage final.