

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

COMPTER LES REBONDS

Des cubes en déplacement

MATh.en.JEANS

ANNÉE 2020 - 2021

Auteurs :

Adélie BENHAIM
Grégoire FERTON
Mohan DEL GIUDICE
Eliott SEURET
Camille SEURET
Jules BIOULAC

Terminale, Lycée Carnot
Première, Lycée Carnot
Première, Lycée Carnot
Première, Lycée Carnot
Seconde, Lycée Carnot
Terminale, Lycée Chaptal

Professeur :

Ariane MARTIN

Doctorante, ENS Paris-Saclay

Chercheur :

Lucas GERRETSEN

Ingénieur, Nintendo

Établissement : Lycée Carnot, Paris

Présentation du sujet :

Deux cubes de masses respectives m_1 et m_2 se déplacent sans frottement sur une ligne droite bordée d'un côté par un mur. Initialement, le cube C_1 se déplace à une vitesse $v_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$, ce cube est donc immobile. Le cube C_2 s'est lancé vers lui à une vitesse v_2 . Les rebonds entre les deux cubes, et entre le cube C_1 et le mur sont supposés se produire sans perte d'énergie. Dans ce sujet, nous étudierons les rebonds, en fonction des variables masses m_1 , m_2 , et des variables vitesses v_1 et v_2 .



[Vidéo de notre présentation au congrès de Saclay](#)

Sommaire

1	Introduction	2
1.1	Explication du sujet	2
1.2	Notations et déductions	2
1.3	Exemple	2
1.4	Conditions d'arrêt	3
2	Calcul des vitesses des cubes	4
2.1	La conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement	4
2.2	Calcul des vitesses des cubes après choc	4
2.2.1	Calcul des vitesses des cubes après une collision entre C_1 et C_2	4
2.2.2	Que devient la vitesse du cube C_1 après un rebond contre le mur?	5
3	Généralisation des cas avec 2 cubes	6
3.1	Le cas où les masses des cubes sont égales	6
3.2	Définition des outils à la généralisation	7
3.2.1	Introduction du rapport R	7
3.2.2	États des cubes	7
3.2.3	Exemple	8
3.2.4	Cercle des états	9
3.3	Cas où $R > 1$	9
3.3.1	Arcs de cercle	10
3.3.2	Déterminer la formule de \mathcal{N}_c	11
3.3.3	Remarques	12
3.4	Cas où $R < 1$	14
3.4.1	Introduction du R_{lim}	14
3.4.2	Calcul de R_{lim}	14
3.5	Synthèse de la généralisation de \mathcal{N}_c	15
4	Généralisation des cas avec 3 cubes et plus	16
4.0.1	Comment introduire le rapport R ?	16
4.1	Le cas avec 3 cubes de masses égales	16
4.2	Le cas avec 3 cubes de masses inégales	16
4.2.1	Le cas où $m_1 \gg m_2 \gg m_3$	16
4.2.2	Le cas où $m_1 \gg (m_2 = m_3)$	16
4.3	Le cas avec n cubes de masses égales	17
4.4	Le cas où les rapports R tendent vers 0	18
5	Comment modéliser les pertes d'énergies lors des chocs?	18
5.1	Introduction	18
5.1.1	Expérience à partir de deux billes	18
5.1.2	Utilisation de deux logiciels : ImageJ et LATIS-Pro	19
5.2	Énergie dissipée à chaque choc	19
5.2.1	Introduction des outils à l'étude des pertes d'énergie	19
5.2.2	Calcul du coefficient d'absorption \mathcal{C}_a	20
5.3	Perspectives : généraliser les cas en tenant compte des pertes d'énergie	20
5.3.1	Calcul de la vitesse du cube C_1 après un choc contre le mur	20
5.3.2	Calcul des vitesses des cubes après une collision entre C_1 et C_2	20
6	Conclusion	21
7	Remerciements	21
	Annexe	22
	Notes d'édition	23

1 Introduction

1.1 Explication du sujet

Deux cubes C_1 et C_2 de masses respectives m_1 et m_2 se déplacent sans frottements sur une ligne droite bordée d'un côté par un mur (Figure 1). Dès le début, le cube C_1 est immobile. Sa vitesse v_1 est donc nulle. Le cube C_2 se déplace vers C_1 à une vitesse v_2 .

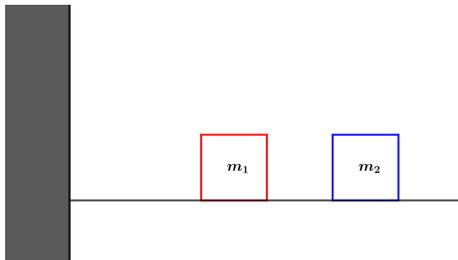


FIGURE 1 – Situation de base

On va étudier le nombre de rebonds qu'il y aura entre C_1 et C_2 et entre C_1 et le mur. On considère que ces collisions se font sans perte d'énergie. On cherche donc à savoir combien de rebonds on pourra observer, en fonction de m_1 , m_2 , v_1 et v_2 .

Notre sujet propose quelques questions non-exhaustives :

- Comment pourrait-on calculer le nombre de collisions avec 2 cubes ?
- Comment pourrait-on généraliser le résultat s'il y a plus de 2 cubes ?
- Comment prendrait-on en compte les pertes d'énergie ainsi que les frottements avec le sol ?

1.2 Notations et déductions

Tout d'abord on a noté que v_2 est initialement négative car sur notre graphique (Figure 1), le cube C_2 se déplace vers la gauche.

Ensuite, on définit une collision comme un heurt d'un cube à un autre corps, comme un autre cube ou bien le mur. On notera \mathcal{N}_c le nombre total de collisions.

$v_1(n)$ et $v_2(n)$ sont les vitesses respectivement des cubes C_1 et C_2 après n collisions où $v_1(0)$ et $v_2(0)$ désignent les vitesses initiales.

1.3 Exemple

Prenons pour exemple un cas où $m_1 = m_2$ et $v_2 = -v$, illustré par la Figure 2. Ici, on modélisera la vitesse par un vecteur au dessus d'un cube.

La première collision aura lieu lorsque le cube C_2 rencontrera le cube C_1 (Figure 2b). Comme on a $m_1 = m_2$, le cube C_2 va transférer toute son énergie à C_1 , puis va s'arrêter. Le cube C_1 se déplacera à $v_1 = -v$.

Le cube C_1 se dirige donc vers le mur (Figure 2c), ce qui veut dire qu'il y aura un rebond et que la vitesse v_1 du cube sera de $-(-v)$, c'est-à-dire v , après le rebond (Figure 2e).

Le cube C_1 entrera en collision avec le cube C_2 une seconde fois (Figure 10f) pour s'arrêter et le cube C_2 partira avec une vitesse v_2 qui correspond à v_1 avant l'impact entre les cubes (Figure 2g). Enfin, le cube C_2 se déplacera éternellement vers la droite (Figure 2h).

Au total, on aura compté **3** chocs.

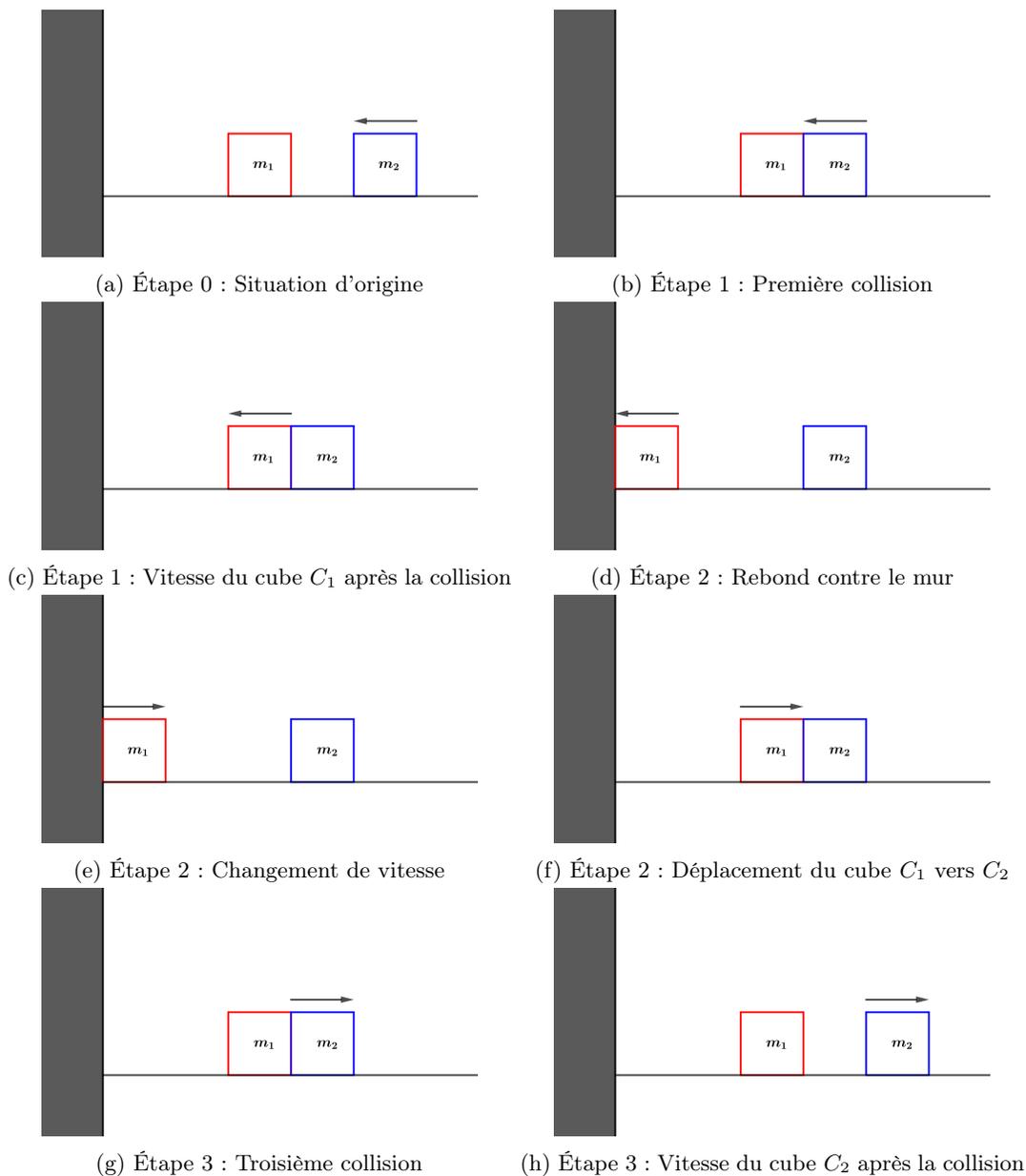


FIGURE 2 – Conditions initiales : $m_1 = m_2, v_2 = -v \text{ m.s}^{-1}$

1.4 Conditions d'arrêt

Afin de compter le nombre de rebonds, il est important de préciser des conditions d'arrêt qui nous permettront de savoir quand il n'y aura plus aucun rebond.

Dans le cas où $v_2(n) < 0$, le cube C_2 se rapproche du mur. Le cube C_1 étant situé entre ces derniers, il y aura forcément une collision à un moment donné.

Dans le cas où $v_2(n) \geq 0$, il ne pourra y avoir de rebonds entre les cubes C_1 et C_2 que si le cube C_1 rattrape le deuxième cube. Il n'y aura donc de rebond entre ces derniers que si $v_1(n) > v_2(n)$. Cependant si $v_1(n) < 0$ après un choc entre deux cubes, il y aura un rebond du cube C_1 sur le mur.

Nous pouvons donc définir des conditions d'arrêt qui nous indiqueront quand il n'y aura plus de rebonds après un nombre n de chocs :

- $v_1(n) \geq 0$ après un choc entre deux cubes ;
- $v_2(n) \geq v_1(n)$ après un rebond contre le mur.

2 Calcul des vitesses des cubes

Introduction

Dans un cas général, nous avons v_1 et v_2 donnés. On va donc chercher v_1 et v_2 après un nombre n de chocs.

Soient $v_1(n)$ et $v_2(n)$ les vitesses des cubes C_1 et C_2 après un nombre n de collisions. Pour les calculer, il nous faudra donc deux formules qu'on pourra déduire de la conservation de l'énergie cinétique et de la conservation de la quantité de mouvement.

2.1 La conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement

La conservation de l'énergie cinétique

On sait que dans notre contexte, les collisions et déplacements de cubes ne génèrent pas de frottements ou de pertes d'énergie. **L'énergie cinétique du système demeure alors constante.**

On peut écrire :

$$E_{c1} + E_{c2} = \text{constante}$$

Avec E_{c1} et E_{c2} respectivement les énergies cinétiques des cubes C_1 et C_2 .

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \text{constante} \\ \Leftrightarrow \boxed{m_1v_1^2 + m_2v_2^2} &= \text{constante} \end{aligned} \quad (1)$$

La conservation de la quantité de mouvement

D'après l'énoncé du sujet, aucune force extérieure n'est appliquée sur le système $\{C_1; C_2\}$. Par conséquent, d'après la seconde loi de Newton, la quantité de mouvement est constante [1]. On peut donc écrire :

$$\boxed{m_1v_1 + m_2v_2} = \text{constante} \quad (2)$$

2.2 Calcul des vitesses des cubes après choc

2.2.1 Calcul des vitesses des cubes après une collision entre C_1 et C_2

Ce calcul de vitesses des cubes ne concerne que les chocs entre les cubes C_1 et C_2 , donc les chocs avec les murs ne sont pas concernés. Nous avons nommés $v_1(n)$ et $v_2(n)$ les vitesses des cubes C_1 et C_2 après n collisions. Avec les équations (1) et (2), on peut créer le système

$$\begin{cases} m_1v_1(n)^2 + m_2v_2(n)^2 = m_1v_1(n+1)^2 + m_2v_2(n+1)^2 \\ m_1v_1(n) + m_2v_2(n) = m_1v_1(n+1) + m_2v_2(n+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1(v_1(n)^2 - v_1(n+1)^2) = -m_2(v_2(n)^2 - v_2(n+1)^2) \\ m_1(v_1(n) - v_1(n+1)) = -m_2(v_2(n) - v_2(n+1)) \end{cases}$$

Or, on peut développer avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{cases} m_1(v_1(n) - v_1(n+1))(v_1(n) + v_1(n+1)) = -m_2(v_2(n) - v_2(n+1))(v_2(n) + v_2(n+1)) \\ m_1(v_1(n) - v_1(n+1)) = -m_2(v_2(n) - v_2(n+1)) \end{cases}$$

Ensuite, on peut diviser la première ligne par la deuxième ligne ; en effet les vitesses avant et après choc sont différentes, il n'y a donc pas de division par zéro :

$$\begin{cases} v_1(n) + v_1(n+1) = v_2(n) + v_2(n+1) \\ m_1(v_1(n) - v_1(n+1)) = -m_2(v_2(n) - v_2(n+1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = v_2(n) + v_2(n+1) - v_1(n) \\ v_2(n+1) = \frac{m_1(v_1(n) - v_1(n+1))}{m_2} + v_2(n) \end{cases}$$

Enfin, par substitution :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{2m_2v_2(n) + m_1(v_1(n) - v_1(n+1)) - m_2v_1(n)}{m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{m_1(v_1(n) - v_1(n+1))}{m_2} + v_2(n) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1)(m_2 + m_1) = 2m_2v_2(n) + v_1(n)(m_1 - m_2) \\ v_2(n+1) = \frac{m_1(v_1(n) - v_1(n+1))}{m_2} + v_2(n) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{m_1 \left(v_1(n) - \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \right)}{m_2} + v_2(n) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{m_1 \left(v_1(n) - \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) - 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \right) + m_2v_2(n)}{m_2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{m_1 \left(\frac{v_1(n)(m_1 + m_2 - (m_1 - m_2)) - 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \right) + m_2v_2(n)}{m_2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{2m_1v_1(n) - 2m_1v_2(n) + (m_1 + m_2)v_2(n)}{m_1 + m_2} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$\boxed{\begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{v_2(n)(m_2 - m_1) + 2m_1v_1(n)}{m_1 + m_2} \end{cases}} \quad (3)$$

2.2.2 Que devient la vitesse du cube C_1 après un rebond contre le mur ?

Comme le mur n'a pas de masse définie et ne se situe pas dans ce système isolé, il faut donc agir différemment pour calculer la vitesse d'un cube après un rebond contre le mur.

On sait que seul le cube C_1 peut rencontrer le mur, car le cube C_1 est entre le mur et le cube C_2 et que ce dernier ne peut passer au dessus de C_1 . Donc, d'après la conservation de l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned} m_1v_1(n)^2 &= m_1v_1(n+1)^2 \\ \frac{m_1v_1(n)^2}{m_1} &= v_1(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$v_1(n)^2 = v_1(n+1)^2$$

Or, on sait que lorsque C_1 se dirige vers le mur, sa vitesse est négative, donc :

$$\boxed{v_1(n+1) = -v_1(n)} \quad (4)$$

En définitive, lorsque C_1 entre en collision avec le mur, sa vitesse prend pour valeur l'opposée de sa vitesse précédente.

3 Généralisation des cas avec 2 cubes

3.1 Le cas où les masses des cubes sont égales

Reprenons le cas où $m_1 = m_2$. Le premier choc a lieu lors de la rencontre entre le cube C_1 et le cube C_2 . On sait que $m_1 = m_2$ et $v_1(0) = 0$. Appliquons l'expression (3) :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v_1(1) = \frac{v_1(0)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(0)}{m_1 + m_2} \\ v_2(1) = \frac{v_2(0)(m_2 - m_1) + 2m_1v_1(0)}{m_1 + m_2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v_1(1) = \frac{2m_2v_2(0)}{2m_2} \\ v_2(1) = \frac{v_2(0) \cdot 0 + 0}{2m_2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v_1(1) = v_2(0) \\ v_2(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque donc que le cube C_1 prend la vitesse $v_2(0)$ après la collision. Quant à lui, le cube C_2 s'arrête.

Le second choc est un rebond contre le mur. D'après l'équation (4), la vitesse de C_1 s'inverse et devient $v_1(2) = -v_2(0)$ car il n'y a pas de perte d'énergies et que C_1 repart vers C_2 . Quant à la vitesse $v_2(1)$, elle ne changera pas.

Le troisième choc est donc la collision entre les cubes C_1 et C_2 après le rebond de C_1 contre le mur. D'après l'expression (3), alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v_1(3) = \frac{v_1(2)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(2)}{m_1 + m_2} \\ v_2(3) = \frac{v_2(2)(m_2 - m_1) + 2m_1v_1(2)}{m_1 + m_2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v_1(3) = \frac{-v_2(0) \cdot 0 + 0}{2m_2} \\ v_2(3) = \frac{2m_1(-v_2(0))}{2m_1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v_1(3) = 0 \\ v_2(3) = -v_2(0) \end{cases} \end{aligned}$$

Ici, le cube C_1 est immobile et le cube C_2 repart à une vitesse qui est l'opposée de sa vitesse initiale. De ce fait, le cube se déplacera dans le sens opposé et ne rencontrera ni C_1 , ni le mur.

En définitive, il n'y aura plus de collisions et on en aura compté **3**, soit le même nombre de collisions trouvé dans la partie 1.3.

Par conséquent, utiliser les expressions (3) et (4) nous sera utile pour compter le nombre de chocs.

3.2 Définition des outils à la généralisation

3.2.1 Introduction du rapport R

Dans le but de simplifier les expressions (3) et (4) et de retirer les unités, on va substituer les masses m_1 et m_2 par le réel R tel que

$$R = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{R}_+^*$$

Si $R < 1$ alors $m_1 > m_2$ et si $R > 1$ alors $m_1 < m_2$.

Utiliser m_1 et m_2 contribue à devoir étudier chaque situation en définissant et faisant varier chaque masse, ce qui amplifie les calculs. Par conséquent, R nous sera plus utile pour compter le nombre de collisions puisque nous travaillerons sur un problème à une seule variable sans unité.

Remarque : Comme nous travaillons avec des masses positives, le rapport appartient donc à \mathbb{R}_+^* . En effet, nous ne travaillons qu'avec des masses positives (cela nous donne un R positif) et que de même, une masse ne peut pas être nulle (c'est pourquoi on enlève 0 à l'ensemble de valeurs de R).

De plus, on peut réécrire l'expression (3) avec R :

$$\begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(m_1 - m_2) + 2m_2v_2(n)}{m_1 + m_2} \\ v_2(n+1) = \frac{v_2(n)(m_2 - m_1) + 2m_1v_1(n)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1(n+1) = \frac{m_1(v_1(n)(1 - \frac{m_2}{m_1}) + 2\frac{m_2}{m_1}v_2(n))}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} \\ v_2(n+1) = \frac{v_2(n)(\frac{m_2}{m_1} - 1) + 2 \cdot 1 \cdot v_1(n)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(n+1) = \frac{v_1(n)(1 - R) + 2Rv_2(n)}{1 + R} \\ v_2(n+1) = \frac{v_2(n)(R - 1) + 2v_1(n)}{1 + R} \end{cases} \quad (5)$$

À l'aide d'un programme Python, (Code 1 de l'Annexe), on a effectué des tests qui nous indiquent le nombre de collisions \mathcal{N}_c à partir seulement du rapport R . En effet, le nombre de collisions ne semble pas dépendre de $v_2(1)$. Par exemple, d'après le tableau 1, pour $m_1 = m_2$, il y aura toujours 3 collisions peu importe les vitesses.

Rapport	100^0	100^1	100^2	100^3
Nombre de collisions	3	31	314	3141

TABLE 1 – Tableau de \mathcal{N}_c en fonction du rapport R

On remarque alors que pour $R = 100^n$, le nombre de collisions correspond aux n premières décimales de π . Soit, pour $R = 10^n$, on aurait $\mathcal{N}_c = \lfloor \pi \times 100^n \rfloor$. Par exemple, si on a $R = 100^5$, alors \mathcal{N}_c vaut 31415, soit les 5 premières décimales de π .

3.2.2 États des cubes

On appelle **état d'un cube** la nature sous laquelle se présente un cube à partir de deux éléments : sa vitesse et sa masse. On représente l'état des cubes à un instant donné par un point sur un plan défini par v_1 , v_2 et R . En utilisant l'équation (1), on remarque que :

$$m_1v_1(n)^2 + m_2v_2(n)^2 = \text{constante}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_2}{R}v_1(n)^2 + m_2v_2(n)^2 = \text{constante}$$

$$\boxed{\left(\frac{v_1}{\sqrt{R}}\right)^2 + v_2^2 = \text{constante}} \quad (6)$$

Comme cette équation (6) est sous la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c^2$, on en déduit qu'elle correspond à une équation d'ellipse. Cela conduit donc à l'apparition de π , car cette constante est liée à la circonférence d'un cercle et son diamètre. On représentera donc cette ellipse comme un cercle dans un repère orthogonal non orthonormé, ce qui revient à prendre pour abscisse $x = v_2$ et pour ordonnée $y = \frac{v_1}{\sqrt{R}}$. Par exemple, avec $R = 1$ et $v_2(0) = 1 \text{ m.s}^{-1}$, on a $\left(\frac{0}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1$ ($\frac{1}{1}$ car on peut écrire $v_2 = \frac{v_2}{1}$ et que $v_2 = 1 \text{ m.s}^{-1}$). Comme l'ellipse est définie par l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, le rayon du cercle sera alors de 1.

Dans un cas général, pour avoir un cercle de rayon 1, on choisit $v_2(0)$ tel que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_1(0)}{\sqrt{R}}\right)^2 + v_2(0)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{0}{\sqrt{R}}\right)^2 + v_2(0)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow v_2(0)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2(0) = -1 \text{ m.s}^{-1}}$$

3.2.3 Exemple

Prenons le même exemple que nous avons vu précédemment où $m_1 = m_2$ et $v_2(0) = -v$. Cette fois, nous allons attribuer une valeur à $v_2(0)$: -1 m.s^{-1} .

Le premier point a pour coordonnées $(-1; 0)$, car le cube de masse m_1 est immobile et l'autre a une vitesse de -1 m.s^{-1} (Figure 3a).

Le deuxième point a lui pour coordonnées $(0; -1)$, car le cube de masse m_2 transfère son énergie au cube de masse m_1 après le premier choc. De ce fait, le cube de masse m_1 a une vitesse de -1 m.s^{-1} (Figure 3b).

Après le rebond contre le mur, seule la vitesse v_1 change et passe à 1 m.s^{-1} et celle du cube de masse m_2 ne change pas (Figure 3c).

Comme pour la première collision, le cube de masse m_1 transfère son énergie au cube de masse m_2 . De ce fait, les coordonnées du point seront $(1; 0)$ puisque le cube de masse m_1 sera immobile et le cube de masse m_2 aura une vitesse de 1 m.s^{-1} (Figure 3d).

Les collisions terminées, on relie les traits pour repérer l'ordre des collisions (Figure 3e), puis nous traçons le cercle qui contient tous les points (Figure 3f)

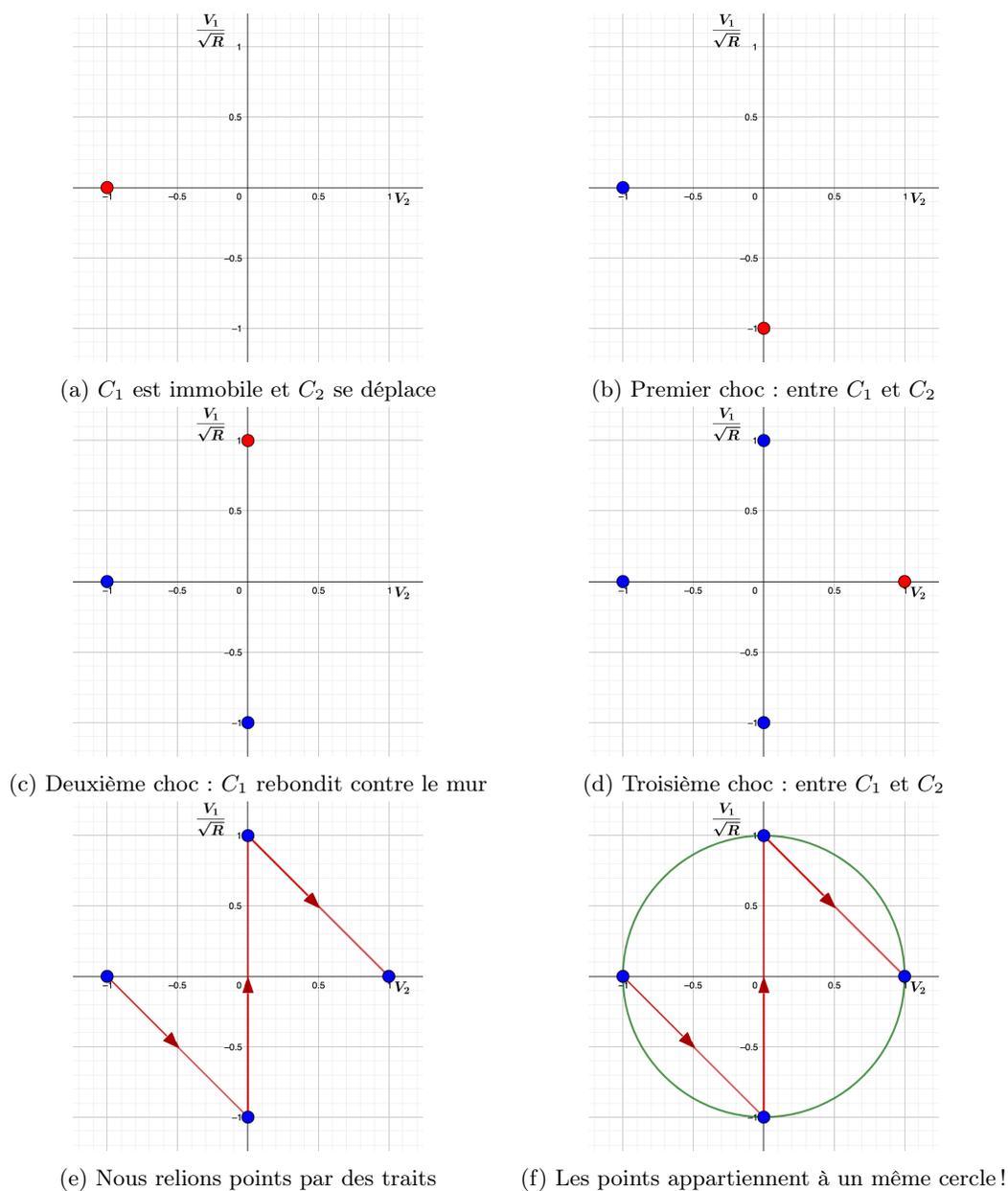


FIGURE 3 – Exemple de cercle des états dans lequel $m_1 = m_2$ et $v_1 = -1 \text{ m.s}^{-1}$

3.2.4 Cercle des états

Par conséquent, on peut donc représenter les états des cubes par des points dont les coordonnées sont $(v_2; \frac{v_1}{\sqrt{R}})$ pour former un cercle, que l'on nommera le **cercle des états**. Voici sur la Figure 4 (page suivante), le cercle qui représente le cas où $R = 16$.

3.3 Cas où $R > 1$

À partir de maintenant, nous allons étudier les situations dans lesquelles $R > 1$, soit $m_2/m_1 > 1$. Par conséquent, cela revient à étudier les situations dans lesquelles $m_2 > m_1$.

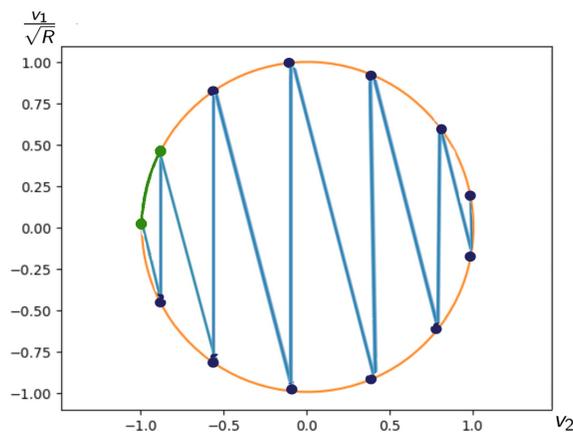


FIGURE 4 – Situation dans laquelle $m_1 = 16 m_2$, soit $R = 16$

3.3.1 Arcs de cercle

On peut délimiter un arc de cercle par deux points de coordonnées $(v_2; \frac{v_1}{\sqrt{R}})$. Par exemple, entre les deux points verts de la Figure 4, on peut distinguer un arc de cercle colorié également de couleur verte sur la Figure 4.

De plus, avant l'arrêt des rebonds, chaque point de coordonnées $(v_2(n); \frac{v_1(n)}{\sqrt{R}})$ est relié à un autre point de coordonnées $(v_2(n+1); \frac{v_1(n+1)}{\sqrt{R}})$ par un segment. Les deux points sont consécutifs puisqu'ils sont aux extrémités d'un même segment. Nous pouvons observer deux types de segments :

- les segments **verticaux** qui sont perpendiculaires à l'axe des abscisses et donc parallèles entre eux ;
- les segments **inclinés**.

Par conséquent, si l'on veut calculer la pente a de chaque segment incliné, alors

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\
 &= \frac{\frac{v_1(n+1)}{\sqrt{R}} - \frac{v_1(n)}{\sqrt{R}}}{v_2(n+1) - v_2(n)}
 \end{aligned}$$

En développant grâce aux expressions (5) [2] :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\frac{v_1(n)(1-R)+2Rv_2(n)}{(1+R)\sqrt{R}} - \frac{v_1(n)}{\sqrt{R}}}{\frac{v_2(n)(R-1)+2v_1(n)}{1+R} - v_2(n)} \\
 &= \frac{\frac{2R(v_2(n)-v_1(n))}{1+R\sqrt{R}}}{\frac{2(v_1(n)-v_2(n))}{(1+R)}} \\
 &= \frac{2R(v_2(n) - v_1(n))(1+R)}{(1+R)2\sqrt{R}(v_1(n) - v_2(n))} \\
 &= \frac{R(v_2(n) - v_1(n))}{\sqrt{R}(v_1(n) - v_2(n))}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{a = -\sqrt{R}}$$

Comme les segments inclinés du cercle ont une même pente, on en déduit que ces segments sont parallèles. C'est pourquoi, chaque intersection d'un segment vertical avec un segment incliné dispose d'un même angle que

l'on nommera α .

Par conséquent, d'après le **théorème de l'angle inscrit**, chaque arc de cercle mesure donc 2α (Figure 5).

Enfin, comme seule la vitesse du premier cube s'inverse lors d'un choc contre la mur, les coordonnées des points E et F sont respectivement $(v_2(1); \frac{v_1(1)}{\sqrt{R}})$ et $(v_2(1); -\frac{v_1(1)}{\sqrt{R}})$. Les deux points sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, le premier arc de cercle qui relie les points O et E est de la même longueur que celui entre F et O. Il mesure donc 2α .

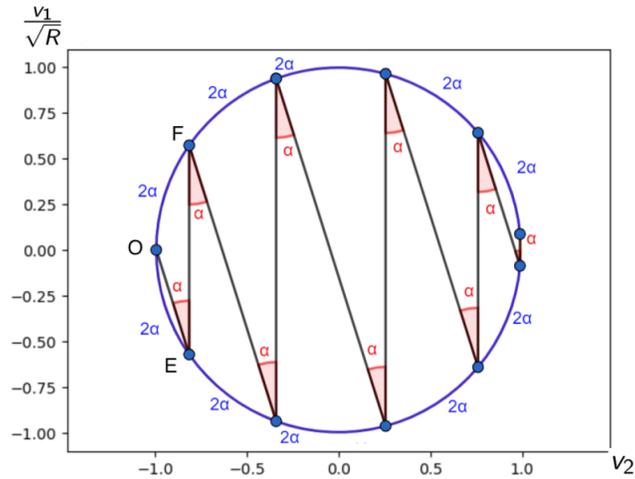


FIGURE 5 – Chaque segment incliné dispose d'un même angle α quelconque

Nous pouvons alors remarquer que tous ces arcs de cercle sont de même taille, hormis l'arc de cercle délimité par les deux points A et B, colorié en noir sur la Figure 6 [3].

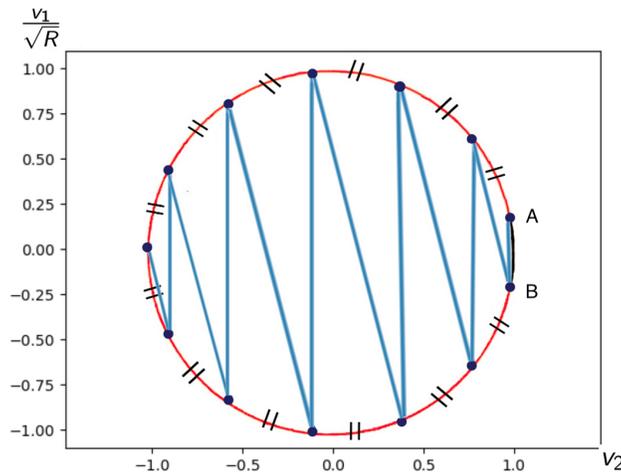


FIGURE 6 – Les arcs de cercle de couleur rouge sont de même taille

Notre conjecture est que le nombre de collisions correspond au nombre d'arcs de cercles de couleur rouge, qui sont de même taille.

3.3.2 Déterminer la formule de \mathcal{N}_c

Puisque \mathcal{N}_c est égal au nombre d'arcs de cercle de même taille, on peut en déduire qu'il faudra calculer la partie entière du périmètre du cercle de rayon 1 divisé par la longueur d'un arc de cercle. Pour cela, on devra d'abord déterminer la longueur d'un arc de cercle.

Nous allons nommer ϑ la mesure de l'angle de l'arc de cercle que l'on peut observer dans la Figure 7.

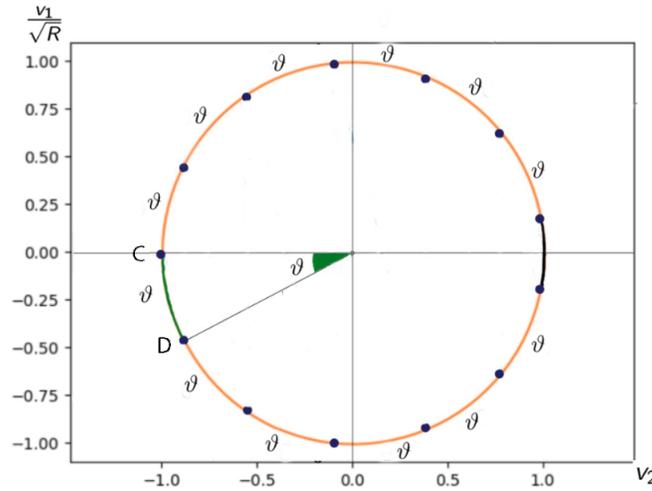


FIGURE 7 – Localisation de ϑ sur le cercle

Soient C et D tels que les coordonnées du point C sont $(v_2(0), \frac{v_1(0)}{\sqrt{R}})$ et celles du point D sont $(v_2(1); \frac{v_1(1)}{\sqrt{R}})$, sur la Figure 7. On sait que les coordonnées de chaque point appartenant au cercle sont $(v_2; \frac{v_1}{\sqrt{R}})$, donc :

$$\tan(\vartheta) = \frac{v_1(1)}{\sqrt{R} \cdot v_2(1)}$$

Avec l'expression (5), on peut écrire :

$$\tan(\vartheta) = \frac{\frac{v_1(0) \cdot (1-R) + 2Rv_2(0)}{1+R}}{\sqrt{R} \cdot \frac{v_2(0) \cdot (R-1) + 2v_1(0)}{1+R}} = \frac{v_1(0) \cdot (1-R) + 2Rv_2(0)}{\sqrt{R} \cdot v_2(0) \cdot (R-1) + 2v_1(0)}$$

Or $v_1(0) = 0$, donc

$$\tan(\vartheta) = \frac{2Rv_2(0)}{\sqrt{R} \cdot v_2(0) \cdot (R-1)} = \frac{2}{\sqrt{R}(1 - \frac{1}{R})}$$

Alors

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{R}(1 - \frac{1}{R})}\right) \quad [4]$$

On pose l'hypothèse qu'il y a autant d'arcs de cercle de longueur ϑ que de collisions. De plus, on sait que le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π . Alors, le nombre de collisions équivaut à la partie entière du périmètre du cercle sur la longueur d'un arc de cercle. De ce fait, avec \mathcal{N}_c le nombre de collisions, on a

$$\mathcal{N}_c = \left\lceil \frac{2\pi}{\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{R}(1 - \frac{1}{R})}\right)} - 1 \right\rceil$$

Soit

$$\mathcal{N}_c = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)} - 1 \right\rceil$$

3.3.3 Remarques

On a pris la partie entière supérieure moins 1, car les cas comme $R = 1$ présentent 4 arcs de cercle de longueur ϑ au lieu de 3 (cf. Figure 8), car l'angle noir de la Figure 8 dispose de la même mesure que ϑ . La différence avec la partie entière inférieure est ainsi celle-ci : si le résultat de la division entre le périmètre et ϑ est entier, \mathcal{N}_c prend une valeur de la partie entière supérieure moins 1, correspondant véritablement au nombre de collisions.

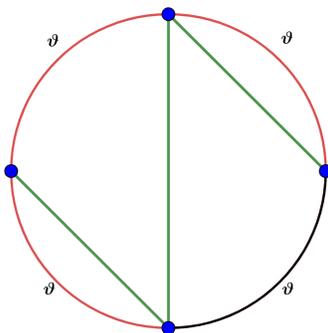


FIGURE 8 – Cercle des états pour $R = 1$

On remarque également que \mathcal{N}_c est croissant sur \mathbb{R}_+^* pour plusieurs raisons.

Signe de la dérivée

Nous allons déterminer le sens de variation de \mathcal{N}_c pour étudier l'évolution du nombre de collisions en fonction du rapport. Pour cela, on définit $\mathcal{A}_c(R)$ la fonction correspondante à $\mathcal{N}_c(R)$ pour $R > 1$ sans les parties entières en excès. On a donc :

$$\mathcal{N}_c(R) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)} - 1 \right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}_c(R) = \frac{\pi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)} - 1}$$

Pour déterminer le sens de variation du nombre de collisions, on peut donc étudier le signe de la dérivée de $\mathcal{A}_c(R)$. Calculons la :

$$\mathcal{A}_c(R) = \frac{u(R)}{v(R)} + w(R)$$

Avec :

$$\begin{array}{lll} u(R) = \pi & v(R) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) & w(R) = -1 \\ u'(R) = 0 & v'(R) = \frac{-1}{2\sqrt{R} \cdot (R+1)} & w'(R) = 0 \end{array}$$

On a donc :

$$\mathcal{A}'_c(R) = \frac{u'(R)v(R) - u(R)v'(R)}{[u(R)]^2} + w'(R)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}'_c(R) = \frac{0 - \pi \cdot \frac{-1}{2\sqrt{R} \cdot (R+1)}}{\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right]^2} + 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}'_c(R) = \frac{\pi}{2\sqrt{R} \cdot (R+1) \cdot \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right]^2}} \quad (7)$$

On peut voir dans la formule (7) que le signe de l'expression dépendra de celui du dénominateur. Or, on remarque que tous les facteurs qui le composent sont positifs sur \mathbb{R}^{+*} alors que $R > 1$.

De ce fait, le signe de la dérivée est strictement positif, et le sens de variation de la fonction est donc croissant sur \mathbb{R}^{+*} .

Autres déductions

On a également déduit le sens de variation de la fonction d'une autre manière.

$\mathcal{N}_c(R)$ est la composée de la fonction croissante $\lceil x - 1 \rceil$, de la fonction décroissante π/x , de la fonction croissante $\arctan(x)$, de la fonction décroissante $1/x$, et de la fonction croissante \sqrt{x} .
De ce fait, $\mathcal{N}_c(R)$ est croissante.

3.4 Cas où $R < 1$

Suite à nos déductions sur le cas où $R > 1$, nous nous sommes interrogés sur le cas où $R < 1$.

3.4.1 Introduction du R_{lim}

Un rapport $R < 1$ est équivalent à $\frac{m_2}{m_1} < 1$. De ce fait, $m_1 > m_2$.

Tout d'abord, imaginons que $m_1 \gg m_2$. Cela équivaut donc à un rapport R qui tend vers 0. Appliquons les expressions (5) :

$$\begin{cases} v_1(1) &= \frac{v_1(0)(1-R) + 2Rv_2(0)}{1+R} \\ v_2(1) &= \frac{v_2(0)(R-1) + 2v_1(0)}{1+R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{R \rightarrow 0} v_1(1) &= \frac{0 \cdot (1-0) + 2 \cdot 0 \cdot v_2(0)}{1+0} \\ \lim_{R \rightarrow 0} v_2(1) &= \frac{v_2(0)(0-1) + 2 \cdot 0}{1+0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \lim_{R \rightarrow 0} v_1(1) &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow 0} v_2(1) &= -v_2(0) \end{cases}}$$

On peut en déduire qu'à la première collision, le cube C_2 repartira dans la direction opposée du mur. Puisque $v_1(1)$ tend vers 0, alors le cube C_1 aura une faible vitesse. C'est pourquoi, le cube C_1 se déplacera lentement vers le mur, pour ne jamais rattraper C_2 . On aura donc **2** collisions.

D'un autre côté, pour $R = 1$ on sait que l'on a 3 collisions. On va donc chercher un R_{lim} tel que :

- pour tout $R \in]R_{lim}; 1[$, $\mathcal{N}_c = 3$
- pour tout $R \in]0; R_{lim}[$, $\mathcal{N}_c = 2$

3.4.2 Calcul de R_{lim}

La troisième collision serait donc une collision entre C_1 et C_2 . Pour qu'il y ait une troisième collision, il faut donc que :

$$v_1(2) > v_2(2)$$

Sachant que $v_1(2) = -v_1(1)$ et $v_2(2) = v_2(1)$ car la deuxième collision est celle entre C_1 et le mur,

$$v_1(2) > v_2(2)$$

$$\Leftrightarrow -v_1(1) < -v_2(1)$$

$$\Leftrightarrow v_1(1) < -v_2(1)$$

En développant grâce aux expressions (5) :

$$\frac{v_1(0)(1-R) + 2Rv_2(0)}{1+R} < -\frac{v_2(0)(R-1) + Rv_1(0)}{1+R}$$

$$\frac{2Rv_2(0)}{1+R} < -\frac{v_2(0)(R-1)}{1+R}$$

$$2Rv_2(0) < -v_2(0)(R-1)$$

$$2R > -(R-1) \quad (\text{car } v_2(0) < 0)$$

$$\boxed{R > \frac{1}{3}}$$

On en déduit donc que $R_{lim} = \frac{1}{3}$.

Pour conclure, si $R_{lim} < R < 1$, alors il y aura 3 collisions, et si $0 < R \leq R_{lim}$, il y en aura 2 [5].

Maintenant, pour conclure cette partie, il nous faut prouver qu'il n'y aura pas plus de 4 collisions pour $R < 1$. La condition pour qu'il y ait une quatrième collision, est que le cube C_1 se dirige vers le mur, soit que $v_1(3) < 0$:

$$v_1(3) < 0 \Leftrightarrow \frac{v_1(2)(1-R) + 2Rv_2(2)}{1+R} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{2Rv_2(0)}{1+R}(1-R) + 2R \frac{v_2(0)(R-1)}{1+R}}{1+R} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2Rv_2(0)(1-R-R+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4Rv_2(0)}_{<0 \text{ car } v_2(0) < 0} \times \underbrace{(1-R)}_{>0 \text{ car } R < 1} > 0$$

Le tout < 0

Ce résultat étant absurde, on peut en déduire qu'il n'y aura pas plus de 3 collisions pour $R < 1$.

3.5 Synthèse de la généralisation de \mathcal{N}_c

Pour conclure, nous n'avons pas de formule globale pour calculer le nombre de collision \mathcal{N}_c . Cependant, on peut l'écrire de cette manière :

$$\mathcal{N}_c(R) = \begin{cases} 2 & \text{si } R \in]0, \frac{1}{3}] \\ 3 & \text{si } R \in]\frac{1}{3}, 1[\\ \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(\frac{1}{\sqrt{R}})} - 1 \right\rceil & \text{sinon [6]} \end{cases}$$

On a déterminé, à partir de la simulation, 6 valeurs de \mathcal{N}_c à partir de 6 valeurs de R .

Rapport	1	20	40	60	80	100
Nombre de collisions	3	14	20	24	28	31

TABLE 2 – Tableau de \mathcal{N}_c en fonction du rapport R à l'aide de la simulation

À partir du graphique tracé grâce à la formule de \mathcal{N}_c , on a disposé 6 points de couleur bleue, qui correspondent aux valeurs du Tableau 2 (Figure 9). Ainsi, comme les points de couleur bleue correspondent à la courbe, nous pouvons en déduire que **les résultats trouvés à l'aide de la simulation sont les mêmes que ceux trouvés grâce à la formule.**

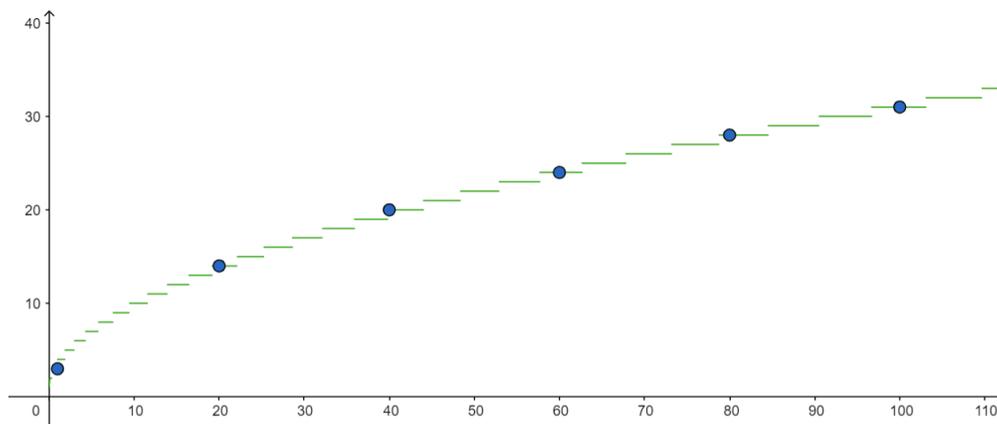


FIGURE 9 – Parallèle avec la simulation

4 Généralisation des cas avec 3 cubes et plus

4.0.1 Comment introduire le rapport R ?

Dans le cas où nous avons 3 cubes, nous avons besoin de deux rapports R , qu'on nommera $R_{1,2}$ et $R_{2,3}$ pour les rapports entre les masses des cubes 1 et 2, puis 2 et 3.

La définition est toujours la même : $R_{i,j} = \frac{m_j}{m_i}$, avec $i, j \in \mathbb{N}^*$ donc :

Si $R_{i,j} < 1$ alors : $m_j > m_i$

Si $R_{i,j} > 1$ alors : $m_i < m_j$

4.1 Le cas avec 3 cubes de masses égales

Soit $m_1 = m_2 = m_3$ et $v_1 = v_2 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_3 = -v$. Dans ce cas, le cube C_1 ne pourra rentrer en collision qu'avec le cube C_2 et le mur et le cube C_3 ne pourra produire de choc qu'avec le cube C_2 . De la même façon que la partie 3.1, les cubes transfèrent leur énergie puisqu'ils sont de même masse. C'est pourquoi, lorsque trois cubes de même masse entrent en collision, deux étant immobiles, alors les trois cubes échangent leur vitesse. De ce fait, on aura compté **5** chocs dans le cas où les masses des cubes sont égales, illustré par la Figure 10 (page suivante).

4.2 Le cas avec 3 cubes de masses inégales

4.2.1 Le cas où $m_1 \gg m_2 \gg m_3$

Dans ce cas, on peut en déduire qu'à la première collision, le cube C_3 repartira dans la direction opposée au mur. Puisque $v_2(1)$ tend vers 0, alors le cube C_2 aura une faible vitesse [7]. C'est pourquoi, le cube C_2 se déplacera lentement vers le cube C_1 . De même, lors de la deuxième collision, le cube C_2 repartira dans la direction opposée au mur, sans jamais rattraper C_3 , et le cube C_1 se déplacera lentement vers le mur. On aura donc **3** collisions.

4.2.2 Le cas où $m_1 \gg (m_2 = m_3)$

Dans cette situation, on observe que la première collision a lieu lorsque le cube C_3 rencontre le cube C_2 . Comme $m_2 = m_3$, le cube C_3 transfère toute son énergie à C_2 , puis s'arrête. Le cube C_2 se déplace à la vitesse initiale de C_3 , vers le cube C_1 . Puisque $m_1 \gg m_2$, cela équivaut à un rapport R qui tend vers 0. On peut donc en déduire qu'à la deuxième collision, le cube C_2 repartira dans la direction opposée au mur. Puisque $v_1(1)$ tend vers 0, alors le cube C_1 aura une faible vitesse. C'est pourquoi, la troisième collision se déroulera ainsi : le cube C_1 se déplacera lentement vers le mur, pour ne jamais rattraper C_2 . Enfin, le cube C_2 entre en collision avec le cube C_3 une seconde fois, puis s'arrête. Le cube C_3 se déplacera ainsi éternellement vers la droite. De l'autre côté, le cube C_1 se déplace lentement vers la gauche, puis entre en collision auprès de C_2 .

On aura donc compté **5** collisions.

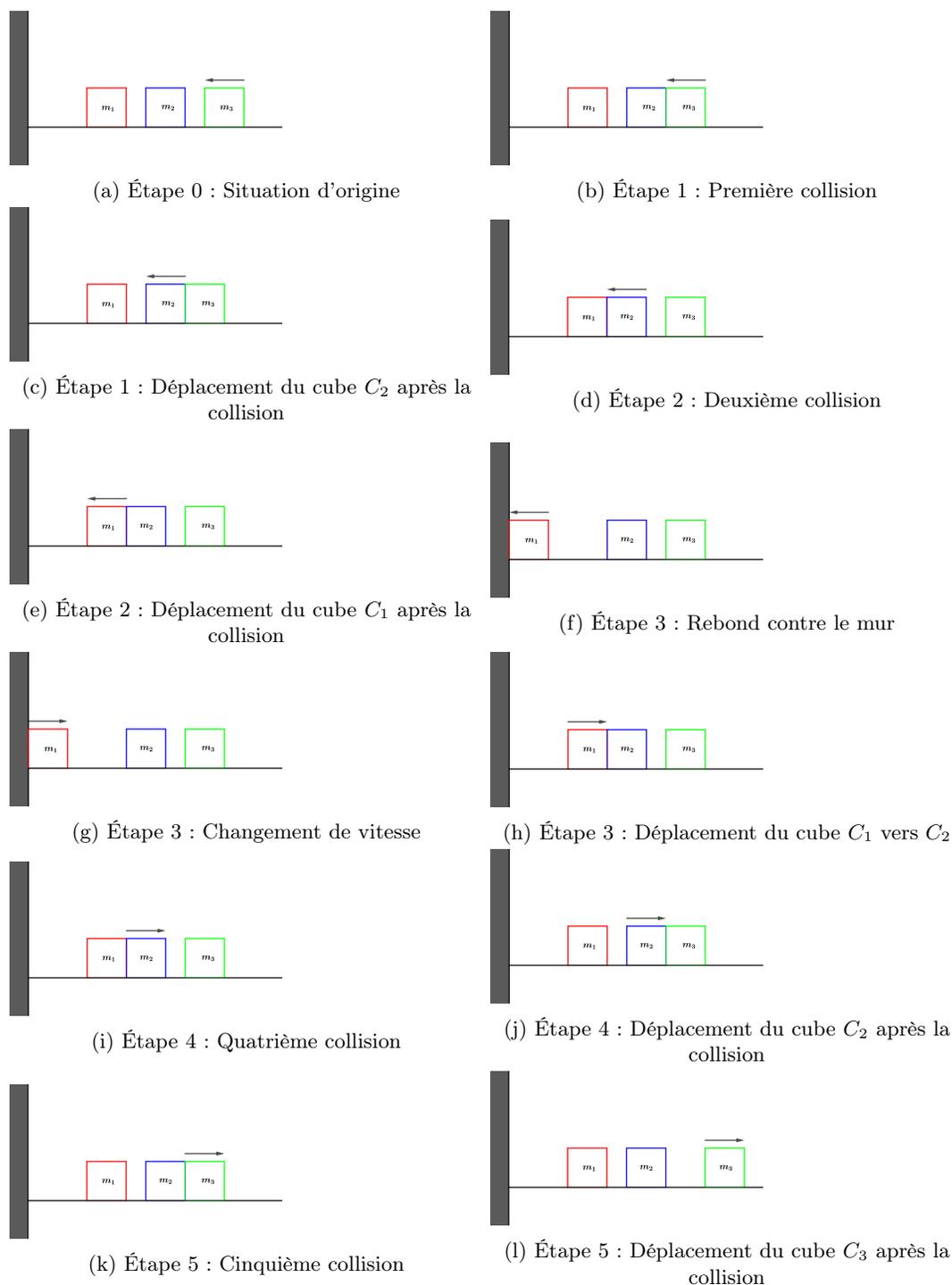


FIGURE 10 – Conditions initiales : $m_1 = m_2 = m_3, v_3 = -v \text{ m.s}^{-1}$

4.3 Le cas avec n cubes de masses égales

En désignant n le n -ième cube, nous avons calculé le nombre de collisions pour les cas où $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \dots = m_n$.

D'après le Tableau 3, notre conjecture est que le nombre de collisions augmente de 2 à chaque apparition d'un cube, lorsque les masses des cubes sont égales. De ce fait, on peut remarquer que le nombre de collisions \mathcal{N}_c est une suite arithmétique de raison $r = 2$. En appelant n le nombre de cubes, u_n le nombre de collisions, le terme initial

Nombre de cubes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de collisions	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

TABLE 3 – Tableau de \mathcal{N}_c en fonction du nombre de cubes, le cas où leurs masses sont égales

u_1 est égal à 1, et alors

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_1 + r(n-1) \\
 \Leftrightarrow u_n &= 1 + 2(n-1) \\
 \Leftrightarrow u_n &= 1 + 2n - 2 \\
 \boxed{u_n} &= \boxed{2n - 1}
 \end{aligned}$$

4.4 Le cas où les rapports R tendent vers 0

Si l'on suppose que $m_1 \gg m_2 \gg m_3 \gg m_4 \gg \dots \gg m_n$, cela équivaut donc à $n-1$ rapports $R_{i,i+1}$ qui tendent vers 0. Nous avons calculé le nombre de collisions pour ce cas.

Nombre de cubes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de collisions	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

TABLE 4 – Tableau de \mathcal{N}_c en fonction du nombre de cubes, le cas où les rapports tendent vers 0

D'après le Tableau 4, on peut supposer que le nombre de collisions \mathcal{N}_c correspond au nombre de cubes, lorsque les rapports tendent vers 0.

5 Comment modéliser les pertes d'énergies lors des chocs ?

5.1 Introduction

5.1.1 Expérience à partir de deux billes

Dans notre étude du nombre de collisions, nous n'avons pas considéré les pertes d'énergie. Cependant, de l'énergie sera perdue à chaque collision en raison des déformations des billes. Voici une vidéo réalisée par nos soins qui nous a permis de comprendre et de modéliser ces pertes d'énergie.



FIGURE 11 – Vidéo : Les rebonds d'une bille ([lien de la vidéo ici](#))

Filmée à 30 images par seconde, cette expérience nous permet d'étudier la chute d'une bille en acier sur une autre, elle-même reposant sur un socle de métal qui permet de maximiser la hauteur des rebonds et limiter les pertes d'énergie. Un tube mesurant 30 cm de hauteur, réalisé à l'aide d'un papier calque, permet de mesurer la position d'une bille à chaque instant à l'aide de sa translucidité. Cela permet également de guider la bille lors des rebonds.

Dans cette vidéo, nous allons retenir 4 moments posés ci dessous :

Dès lors que la bille est lâchée du haut du tube, son énergie potentielle $E_p(a)$ est notée $E(0)$, et son énergie cinétique est nulle, puisque la bille ne bouge pas à ce moment (Figure 12a). Juste avant le premier rebond, $E_p(b)$ est égale à 0 puisque la bille se trouve en bas du tube. Puisque l'énergie potentielle se convertit en énergie cinétique au cours de la chute de la bille, et sa vitesse est maximale, alors $E_c(b) = E(0)$ (Figure 12b). Juste après le rebond, $E_p(c) = 0$ puisque la bille se trouve toujours en bas. Comme une partie de l'énergie cinétique est dissipée, $E_c(c)$ sera notée $E(1)$ (Figure 12c). Enfin, la bille atteint une nouvelle hauteur maximale pour laquelle $E_c(d) = 0$ car sa vitesse est nulle, et $E_p(d) = E(1)$ (Figure 12d).



(a) Bille en haut du tube (b) Bille avant le rebond (c) Bille après le rebond (d) Bille en haut après rebond

FIGURE 12 – Les rebonds d’une bille

5.1.2 Utilisation de deux logiciels : ImageJ et LATIS-Pro

ImageJ et LATIS-Pro sont deux logiciels permettant de pointer la position de la bille à chaque image. À l’aide de ces deux logiciels, nous avons déterminé la hauteur maximale qu’atteint la bille lors de notre expérience. Ces hauteurs sont renseignées dans le tableau 5.

Première image	Rebond 1	Rebond 2	Rebond 3	Rebond 4
29 cm	12 cm	7 cm	5 cm	3 cm

TABLE 5 – Tableau représentant la hauteur maximale qu’atteint la bille en fonction du rebond

5.2 Énergie dissipée à chaque choc

5.2.1 Introduction des outils à l’étude des pertes d’énergie

L’énergie potentielle de pesanteur d’un système modélisé par un point de masse m en interaction avec la Terre et dont l’altitude est z dans le référentiel d’étude est définie par

$$E_p = m \cdot g \cdot z$$

Comme nous l’avons vu dans l’expérience précédente, la hauteur des rebonds de la bille diminue au cours du temps. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu’une partie de l’énergie est absorbée lors du choc. Nous allons donc définir un **coefficient d’absorption** noté C_a sans unité étant défini par

$$C_a(i) = 1 - \frac{E(i+1)}{E(i)} \quad \forall i \in [0, 3]$$

Or, on sait que

$$\begin{cases} E(i) = E_p(i) \\ E(i+1) = E_p(i+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(i) = m \cdot g \cdot z_i \\ E(i+1) = m \cdot g \cdot z_{i+1} \end{cases}$$

Ainsi

$$C_a(i) = 1 - \frac{z_{i+1}}{z_i}$$

5.2.2 Calcul du coefficient d'absorption \mathcal{C}_a

Afin de déterminer \mathcal{C}_a le coefficient d'absorption, nous allons donc faire le rapport entre z_0 et z_1 , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_a(1) &= 1 - \frac{z_1}{z_0} \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}_a(1) &= 1 - \frac{12}{29}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{C}_a(1) = 0,59}$$

En raison des incertitudes liées à la mesure de la hauteur maximale de la bille ainsi qu'au nombre d'images par seconde, nous devons calculer le coefficient d'absorption de chaque rebond, puis en faire une moyenne.

Rebonds	Rebond 1	Rebond 2	Rebond 3	Rebond 4
$\mathcal{C}_a(i)$	0,59	0,41	0,29	0,40

TABLE 6 – Tableau représentant \mathcal{C}_a en fonction du rebond

Dans notre expérience, on retrouve des pertes d'énergie entre la bille qui rebondit sur l'autre. De plus, on néglige les pertes d'énergie se produisant entre cette dernière et le bas du socle de métal. Par ailleurs, en raison du fait que le tube n'est pas parfaitement droit, on peut ainsi retrouver des heurts des billes et des frottements. Toutefois, grâce aux résultats trouvés dans le Tableau 6, on en déduit que le coefficient d'absorption moyen est de **0,42**. Nous prenons donc en compte cette valeur.

5.3 Perspectives : généraliser les cas en tenant compte des pertes d'énergie

Afin de prendre en compte les pertes d'énergie, notre recherche se résume à définir un coefficient d'absorption du mur et des cubes, par lequel l'on pourrait établir la même valeur que l'expérience des deux billes, soit $\mathcal{C}_a = 0,42$.

5.3.1 Calcul de la vitesse du cube C_1 après un choc contre le mur

Comme seul le cube C_1 rencontre le mur, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_a \cdot E_C(n) &= E_C(n+1) \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}_a \cdot m_1 v_1(n)^2 &= m_1 v_1(n+1)^2 \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}_a \cdot \frac{m_1 v_1(n)^2}{m_1} &= v_1(n+1)^2 \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}_a \cdot v_1(n)^2 &= v_1(n+1)^2\end{aligned}$$

Or, on sait que lorsque C_1 se dirige vers le mur, sa vitesse est négative, donc

$$\boxed{v_1(n+1) = -v_1(n)\sqrt{\mathcal{C}_a}}$$

Ainsi, on peut dire que lorsque C_1 entre en collision avec le mur, sa vitesse prend pour valeur l'opposée de sa vitesse précédente, multipliée par la racine du coefficient d'absorption.

5.3.2 Calcul des vitesses des cubes après une collision entre C_1 et C_2

Puisque qu'aucune force extérieure n'est appliquée sur le système $\{C_1; C_2\}$, alors la quantité de mouvement demeure constante d'après la seconde loi de Newton. Ainsi, seule l'énergie cinétique du système change au cours du temps. Une piste serait ainsi de créer le système :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_a * (E_{c1}(n) + E_{c2}(n)) = E_{c1}(n+1) + E_{c2}(n+1) \\ m_1 v_1(n) + m_2 v_2(n) = m_1 v_1(n+1) + m_2 v_2(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{C}_a * (m_1 v_1(n)^2 + m_2 v_2(n)^2) = m_1 v_1(n+1)^2 + m_2 v_2(n+1)^2 \\ m_1 v_1(n) + m_2 v_2(n) = m_1 v_1(n+1) + m_2 v_2(n+1) \end{cases}$$

6 Conclusion

Pour conclure, ce sujet ne se résume pas qu'à compter le nombre de collisions entre les deux cubes, ainsi qu'entre C_1 et le mur. Nous avons d'abord déterminé une formule qui permettait de calculer les vitesses de deux cubes après une collision sans prendre en compte les pertes d'énergie. Cependant, au cours de nos recherches, nous avons remarqué que le nombre de collisions \mathcal{N}_c ne dépendait pas de la vitesse des cubes, mais de leur masse.

Dans le cas où de l'énergie serait perdue à chaque collision, une autre donnée doit être prise en compte : le coefficient d'absorption. Il s'agit d'une donnée découverte lors d'une expérience où nous avons étudié la chute d'une bille en acier sur une autre (Figure 11). Le coefficient d'absorption \mathcal{C}_a doit être utilisé pour calculer les vitesses des cubes après les pertes d'énergie. Par conséquent, il serait intéressant de créer un système incluant le coefficient d'absorption \mathcal{C}_a , semblable à l'expression (3), permettant ainsi d'étudier les pertes d'énergie.

De plus, nous nous sommes intéressés à une situation où 3 cubes ou plus seraient situés sur une ligne droite. Parmi ces cas, nous avons étudié celui où les 3 cubes disposent d'une même masse et celui où les rapports tendent vers 0. Ils nous ont permis de déterminer le nombre de collisions. Nous avons émis des conjectures pour les mêmes cas dans une situation où il y aurait n cubes. Il serait donc intéressant d'approfondir le cas où se situeraient 3 cubes et plus, ainsi que de savoir démontrer les résultats trouvés pour n cubes.

Enfin, nous remarquons plusieurs pistes pour une continuité de ce problème, non proposées par le sujet, mais pas moins intéressantes. Notre travail s'est concentré autour d'une situation dans laquelle le cube C_1 est immobile et le cube C_2 se déplace vers lui à une vitesse v_2 . Il serait donc possible d'étudier un cas dans lequel les deux cubes sont en mouvement : le cube C_2 se déplace vers le cube C_1 , qui se déplace quant à lui vers le mur (Figure 13).

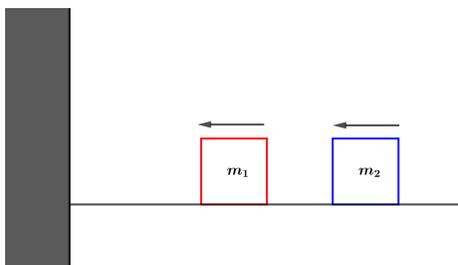


FIGURE 13 – Situation où initialement, les deux cubes se déplacent

7 Remerciements

Nous remercions **Lucas Gerretsen** et **Ariane Martin** qui nous ont encadrés cette année.

De même, nous remercions **Massil Ziane Khodja** et **Pierre-Alexandre Paquet**, des excellents compagnons de bord, pour leurs précieux avis sur notre présentation.

Nous remercions également le **lycée Carnot** de nous avoir permis de participer à MATH.en.JEANS ainsi que **Mr Devaux**, **Mme Briaud**, **Mme Lorin-Colin**, **Mme Desfougères**, **Mr Paul** et **Tom Costantini** pour l'intérêt porté au sujet.

Merci enfin à **l'organisation de MATH.en.JEANS** pour tout le travail fourni lors de cette année.

Annexe

Code 1

```
1 m1 = 1          #Definition de la masse du cube C1
2 liste = []     #Creation d'une liste vide
3 for j in range(1,15): #Boucle qui teste les rapports de 10^1 a 10^15
4     m2 = 10**j * m1 #A chaque repetition, on ajoute une puissance de 10 a m2
5     n=1 #Creation d'une variable qui correspond au nombre de collision
6     v1 = 0 #Definition des vitesses initiales
7     v2 = -1
8     while True: #Boucle qui se repete tant que les conditions d'arret
9         #ne sont pas respectees
10        v1_ = (v1*(m1-m2)+2*m2*v2)/(m1+m2) #Calcul des vitesses apres choc
11        v2_ = (v2*(m2-m1)+2*m1*v1)/(m1+m2)
12        v1 = v1_ #Association des vitesses apres choc
13        v2= v2_
14        if v1>=0 : #Conditions d'arret
15            liste.append((10**j, n)) #Si elle sont respectees, on ajoute
16            #nos valeurs a la liste "liste"
17            break #Ferme la boucle while
18        n+=1 #Ajoute 1 au nombre de collisions
19        v1 = -v1 #v1 prend pour valeur son oppose quand il rencontre le mur
20        if v1<=v2 and v1>=0: #D'autres conditions d'arret
21            liste.append((10**j,n)) #Si elle sont respectees, on ajoute aussi
22            #nos valeurs a la liste "liste"
23            break #Ferme la boucle while
24        n+=1 #Ajoute 1 au nombre de collisions si les conditions ne sont pas
25        #respectees
26 for i in liste:
27     print(i[0], "\t:\t", i[1]) #Envoie nos resultats a la fin, qui sont
28     #le nombre de collision pour chaque puissance de 10 de R jusqu'a 10^15
```

Notes d'édition

[1] La deuxième loi de Newton ou *principe fondamental de la dynamique* énonce que la dérivée de la quantité de mouvement, c'est-à-dire la somme des accélérations des cubes multipliées par leurs masses, est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le système. Ici, il n'y a pas de force extérieure donc la quantité de mouvement est constante.

[2] Le fait que cette pente soit constante résulte de la conservation de la quantité de mouvement : l'équation obtenue au §2.2.1 (2e accolade), $m_1(v_1(n) - v_1(n+1)) = -m_2(v_2(n) - v_2(n+1))$, donne directement $(v_1(n+1) - v_1(n))/(v_2(n+1) - v_2(n)) = -R$.

[3] Rappelons que les collisions s'arrêtent lorsque $0 \leq v_1(n) \leq v_2(n)$ (§1.4). Dans la représentation sur le cercle, cela correspond aux points où $0 \leq y \leq x/\sqrt{R}$, c'est-à-dire à l'arc de cercle entre l'axe des abscisses et le point d'angle polaire α (en effet, comme α est l'angle entre la verticale et les segments inclinés de pente $a = -\sqrt{R}$, on a $\tan \alpha = -1/a = 1/\sqrt{R}$).

Dans le cas de la Figure 6 l'arrêt se produit lorsqu'on arrive en A ; donc l'arc entre A et B ne correspond plus à un angle inscrit égal à α , mais on peut affirmer que sa mesure est inférieure ou égale à 2α puisque l'angle polaire de A est inférieur ou égal à α et que A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

[4] Cette formule avec l'arc tangente est justifiée parce qu'on a ici $0 < \vartheta < \pi/2$ du fait que $R > 1$ ($\vartheta = \arctan(\tan \vartheta)$ est vérifié seulement si $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$).

On a aussi vu au paragraphe précédent que cet angle ϑ est égal à 2α et on sait que $\tan \alpha = 1/\sqrt{R}$. Comme on a toujours $0 < \alpha < \pi/2$, quel que soit $R > 0$, on peut écrire $\alpha = \arctan(1/\sqrt{R})$ et avec la formule $\tan 2\alpha = 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha)$, on retrouve la valeur de $\tan \vartheta$ pour $R \neq 1$.

Dans ce qui suit, l'expression finale de \mathcal{N}_c s'obtient à l'aide de la formule inverse, $\arctan(2t/1-t^2) = 2 \arctan t$ lorsque $-1 < t < 1$.

[5] En effet, lorsque $R \leq R_{lim} = 1/3$, le calcul précédent donne $v_1(2) \leq v_2(2)$ et il n'y aura pas de troisième collision, y compris dans le cas $R = 1/3$ où $v_1(2) = v_2(2)$.

[6] Cette formule $\mathcal{N}_c = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(1/\sqrt{R})} - 1 \right\rceil$ est valable dans tous les cas : si $R \leq 1/3$ on a $\pi/3 \leq \arctan(1/\sqrt{R}) < \pi/2$ et $\left\lceil \frac{\pi}{\arctan(1/\sqrt{R})} - 1 \right\rceil = 2$, et de même si $1/3 < R \leq 1$ alors $\pi/4 \leq \arctan(1/\sqrt{R}) < \pi/3$ et on a encore le bon résultat.

De fait, la méthode du §3.3 pour le cas $R > 1$ s'applique aussi au cas $R < 1$, en modifiant simplement le calcul l'angle ϑ (cf. note 4).

[7] De même qu'au §3.4.1, si on fait tendre $R_{2,3} = m_3/m_2$ vers 0 la vitesse initiale $v_3(0) = -v$ restant constante, alors $v_2(1)$ tend vers 0. Mais, plutôt que de chercher une limite, il s'agit ici (et dans le reste du paragraphe) d'étudier les situations où ce rapport est suffisamment petit pour que le nombre de collisions ne change plus lorsqu'on le diminue encore.

Il serait intéressant de déterminer précisément les valeurs de $R_{2,3}$ et $R_{1,2}$ pour lesquelles on obtient ce résultat de 3 collisions seulement.