**Qui est dans la pièce ?**

**2015/2016**

## Introduction

Le groupe MATh.en.JEANS des classes de 3ème3 et 3ème5 du collège Edmond de Goncourt de Pulnoy est composé de :


**BACHI Mélissa**
**BAGREL Marie**
**FISCHER Amélie**
**GOETZ Mathilde**
**LAMARQUE Sarah**
**SANREY Romane**
**SCHNEIDER Apolline**

Enseignant : M.LAMBOTTE Lionel
Enseignante chercheuse : Mme KURTZMANN Aline, IECL


## Présentation du sujet :

Dans la plupart des pays, les pièces de monnaie sont rondes. Cela permet, par exemple, de payer par pièce lors d'achats dans des distributeurs automatiques de boissons. Mais d'autres formes existent et ont cette même propriété.
**Question** : Étudiez les propriétés de la pièce de 20 pence.

## Résultats de nos recherches :

Nous avons trouvé des figures géométriques dans la pièce (quadrilatère, triangles, cercles). Nous avons tracé de plusieurs manières différentes la pièce sans les bords arrondis pour ensuite trouver une méthode pour dessiner les parties arrondies. Suite à ces constructions nous avons trouvé plusieurs propriétés.

## Étapes de nos recherches :

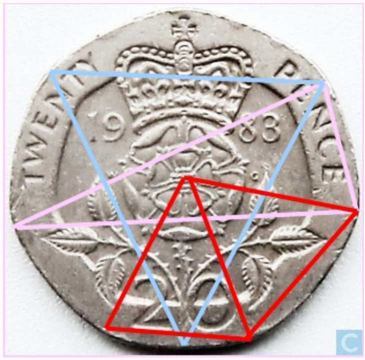
- Les <<rectangles>> et les cercles dans la pièce
- Les triangles dans la pièce
- Tracés de la pièce sans les bords arrondis (heptagone)
- L'arrondi de la pièce
- Les propriétés de la pièce

## I) Les « rectangles » et les cercles dans la pièce :

Les premières choses que nous avons observées dans la pièce ressemblaient à des rectangles et des cercles. Nous nous sommes rendus compte que les rectangles n'en étaient pas en réalité. Nous avons aussi observé des cercles dans la pièce avec, comme centre, celui de la pièce. Ces deux constats ne nous ont rien apporté.


## II) Les triangles dans la pièce :

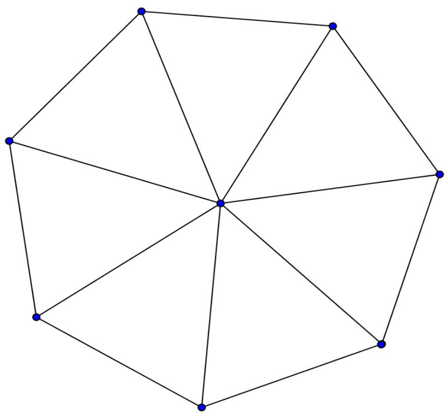
Nous avons ensuite trouvé trois sortes de triangles dans la pièce. Ils sont représentés en bleu, rouge et rose sur le dessin ci-contre. Il y en a sept de chaque sorte, et tous les triangles de ces trois sortes sont isocèles.



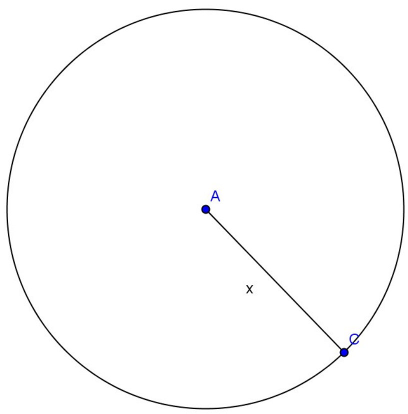

## III) Tracés de la pièce sans les bords arrondis(heptagone) :

### 1) Construction de la pièce (bords droits) à la règle et au rapporteur:

Nous avons construit notre pièce de 20 pence (bords droits) à l'aide des triangles rouges vus précédemment.

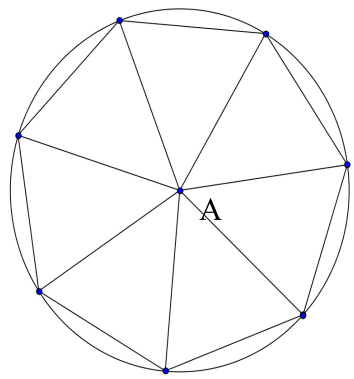



La première étape était de tracer un cercle de centre A et de rayon quelconque noté $x$.

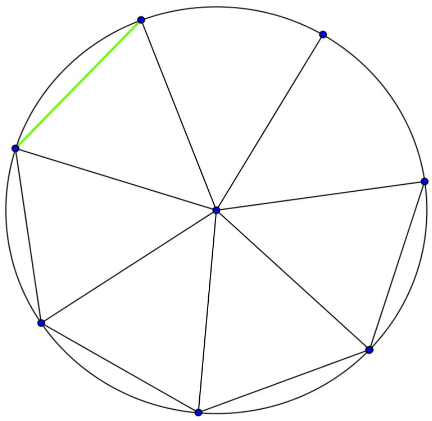


La deuxième étape était de diviser le cercle de centre A en 7 triangles identiques et isocèles. Pour cela on calcule l'angle Â d'un des 7 triangles. Nous divisons donc l'angle plein par 7 ce qui nous donne

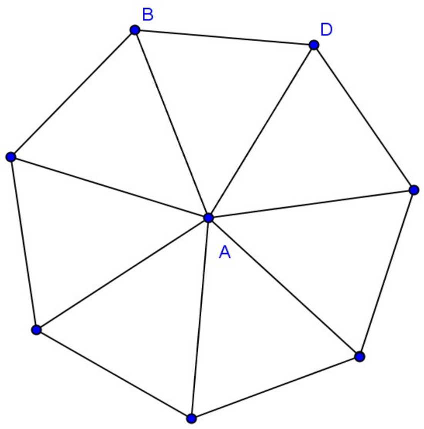
360:7= $\frac{360}{7}$




La dernière étape est de tracer avec le rapporteur les angles des 7 triangles isocèles et de relier les sommets situés sur le cercle. On obtient un heptagone régulier.

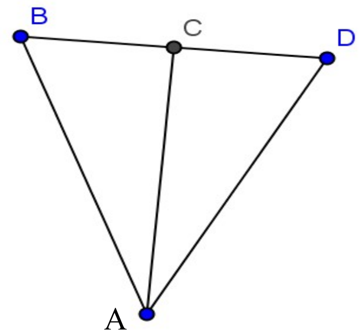


2) Construction de l'heptagone à la règle et au compas, toujours à l'aide des triangles rouges :


Pour cela nous avons calculé la longueur d'un côté du polygone, ici [BD].

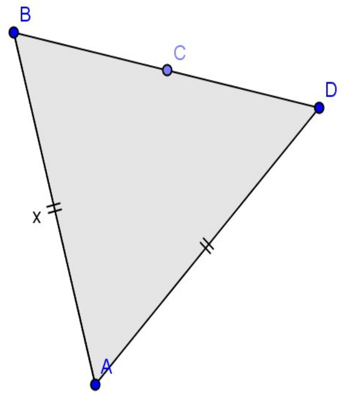
Pour calculer BD (un des côtés de l'heptagone), nous avons d'abord tracé la bissectrice [AC] ce qui nous donne un triangle rectangle en C puisque le triangle ABC est isocèle en A. Ensuite nous avons calculé BC avec la trigonométrie.



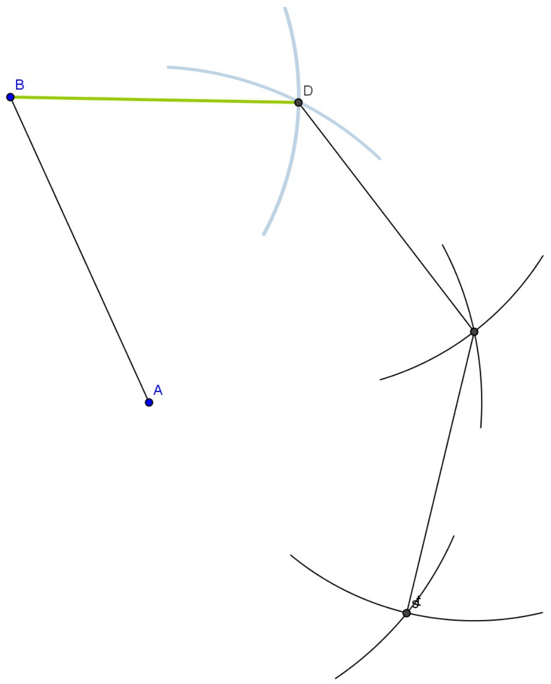
Nous appellons x la mesure du segment [AB] et donc également de [AD].

Comme l'angle $\widehat{BAD}$ = $\frac{360}{7}$ alors

BC = (sin $\frac{360}{14}$ ) x $x$ et donc BD = 2 x (sin $\frac{360}{14}$ ) x $x$



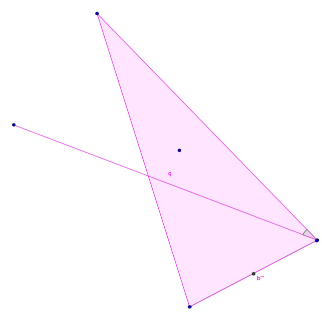

Je trace donc [AB] de longueur quelconque puis au compas je reporte cette mesure à partir de A et à partir de B je reporte la mesure de [BD]. Je recommence ce même travail 6 fois.



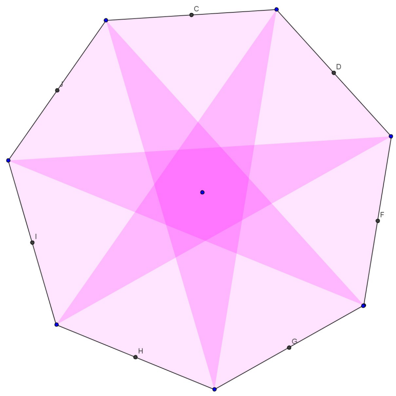

<u>3) Construction de l'heptagone à la règle et au compas, à l'aide des triangles roses :</u>

On construit un triangle isocèle nommé ABC. L'angle $\hat{A}$ mesure $\frac{180}{7}$ et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ mesurent $\frac{540}{7}$ .

Ensuite, on trace sur l'angle $\hat{C}$ un nouvel angle qui, à partir du segment [AB], mesure $\frac{180}{7}$ . On prolonge une demi-droite que l'on coupe, à partir du point B, de la même mesure que les segments [AB] et [AC] et on ferme notre triangle en joignant les points A et D.

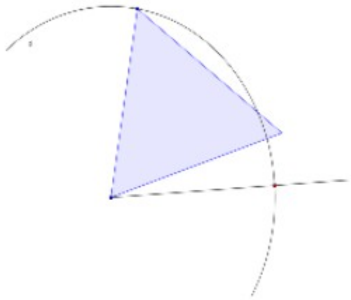


On reproduit cela 5 autres fois pour obtenir 7 triangles identiques ce qui nous formera notre heptagone.



<u>4) Construction de l'heptagone à la règle et au compas et à l'aide des triangles bleus</u>

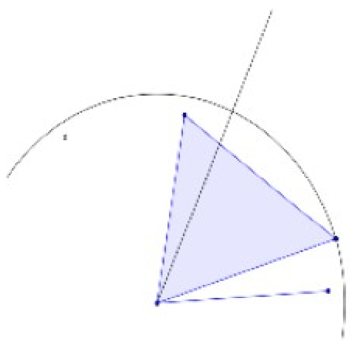
On construit un triangle isocèle nommé DEF. L'angle Ê mesure $\frac{380}{7}$ et les angles B et C mesurent $\frac{440}{7}$ .

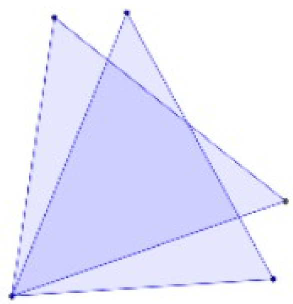


Ensuite, on trace à partir de l'angle $\widehat{F}$ , du côté droit du segment [EF] un angle de $\frac{100}{7}$ et on prolonge une demi-droite.
Puis on trace un cercle de centre F et de rayon [FD] grâce auquel on va obtenir un des points de notre prochain, triangle, G, qui sera l'intersection du cercle et de la demi-droite (d1).

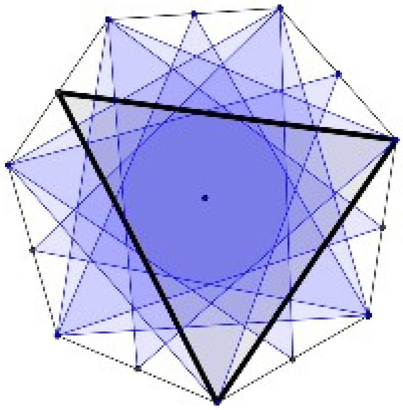
On trace à nouveau un angle à partir de l'angle $\widehat{F}$ mais cette fois-ci du côté gauche du segment [FE], qui mesure $\frac{340}{7}$ .
Puis on trace un cercle de centre F et de rayon [FE] grâce auquel on va obtenir le sommet du prochain triangle , H, qui sera l'intersection du cercle et de la demi-droite (d2).

Enfin on joint les points H et G pour obtenir le dernier côté de mon triangle c'est-à-dire [HG].

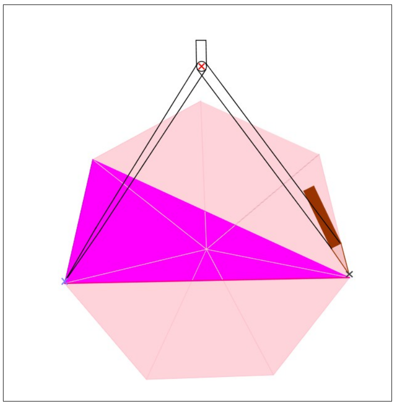




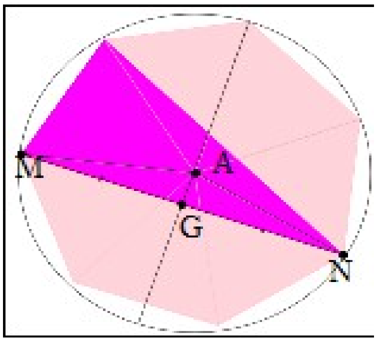
On reproduit cela cinq autres fois pour obtenir 7 triangles identiques ce qui nous formera notre heptagone.



## IV) L'arrondi de la pièce :



Nous avons ensuite cherché à tracer l'arrondi de la pièce. Après de nombreux essais avec le compas pour tracer ce dernier, nous avons finalement trouvé le bon tracé. Il faut s'aider des triangles roses vus auparavant. Le rayon du cercle pour tracer l'arrondi correspond à la longueur des cotés isocèles de ces triangles.



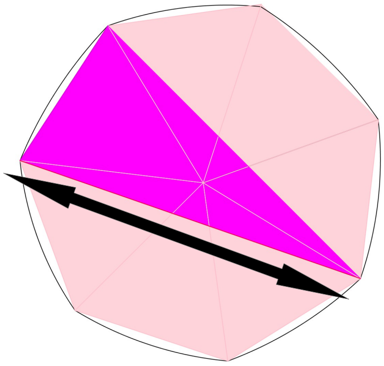

Nous avons ensuite cherché à calculer le rayon de ce cercle en valeur exacte pour n'importe quelle valeur. Après une bissectrice tracée nous avons eu besoin de quelques valeurs d'angles :

$$L'angle\ \widehat{MAN}\ mesure\ \frac{3\times 360}{7}=\frac{1080}{7}\ °$$

$$L'angle\ \widehat{AMG}\ mesure\ \frac{1080}{7}:2=\frac{540}{7}$$

Nous avons ensuite fait de la trigonométrie pour trouver la mesure du segment [GN] qui mesure la moitié du rayon de l'arrondi.

$$\boldsymbol{GN}=(\sin\frac{540}{7})\times \boldsymbol{x}$$

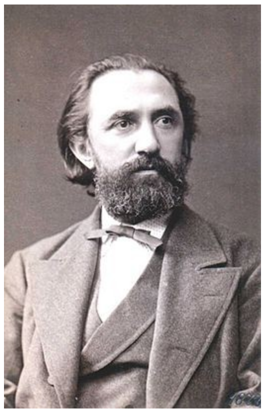


Ensuite nous avons multiplié la longueur du segment [GN] par 2 pour enfin trouver la mesure du rayon MN (longueur de la flèche noire) du cercle de l'arrondi.

$$MN=2\,x(\sin\frac{540}{7})$$

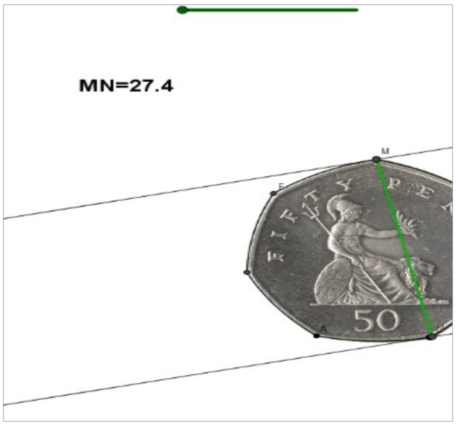
**Pourquoi la pièce roule comme une pièce ronde ?**

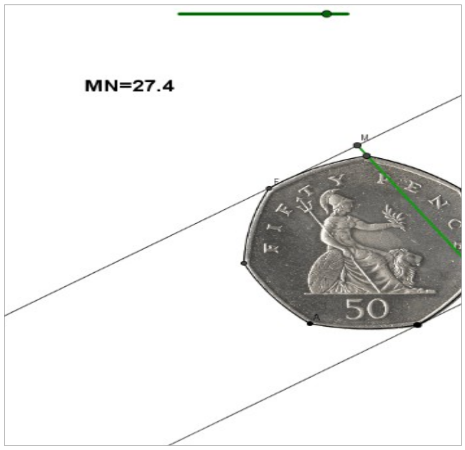
La pièce est un heptagone de Reulaux. C'est un heptagone aux bords légèrement arrondis .

Franz Reuleaux (1829-1905)

La pièce a un diamètre constant: Lorsque nous la plaçons entre deux droites parallèles, et qu'on fait tourner la pièce, l'écartement ne change pas. (propriété uniquement constaté avec le logiciel GeoGebra)



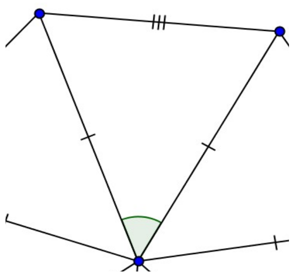



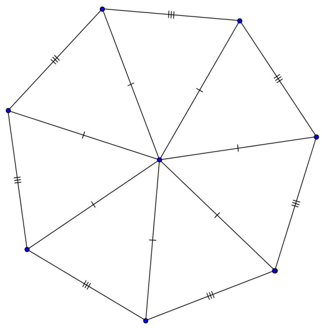

La pièce passe donc dans un distributeur, comme une pièce ronde .

## V) Les propriétés de la pièce :

Grâce aux constructions réalisées, nous avons obtenus plusieurs propriétés de la pièce de 20 pence (Certaines sans les bords arrondis de la pièce, d'autres avec).

**Propriété 1 :**
Tous les angles au centre ont la même mesure. L'angle vert est égal à $\frac{360}{7}$ . Nous avons trouvé cette mesure en divisant l'angle plein de 360$^{\circ}$ par 7 comme les 7 triangles sont identiques donc que chaque angle au centre sera le même.





**Propriété 2 :**
Tous les triangles sont identiques et isocèles.

**Propriété 3 :**

Le périmètre de l'heptagone, vaut 7 x 2sin( $\frac{180}{7}$ ) x $x$

Par contre, le périmètre de la pièce change légèrement car la pièce a les bords arrondis. Nous avons utilisé l'angle N pour pour trouver la portion que représente l'arc MI par rapport au grand cercle .

$$\frac{\frac{180}{7}°}{360}° = \frac{1}{14}$$

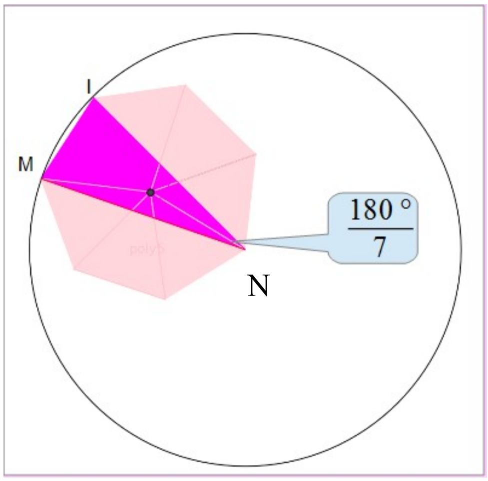
L'arc MI représente $\frac{1}{14}$ du grand cercle. Le périmètre de l'arc MI est égal au périmètre du grand cercle divisé par 14.

Le périmètre du grand cercle est de $4\pi x \times \sin(\frac{540}{7})$ donc

MI= $\frac{4\pi x}{14} \times \sin\left(\frac{540}{7}\right)$

Comme le périmètre de la pièce comporte 7 arcs identiques, je multiplie le périmètre de l'arc MI par 7 pour trouver le périmètre de la pièce.

Le périmètre de la pièce est égal à $2\pi x \times \sin\left(\frac{540}{7}\right)$




**Relation entre le périmètre de la pièce et de l'heptagone**

Périmètre de la pièce : $2\pi x \times \sin(\frac{540}{7})$

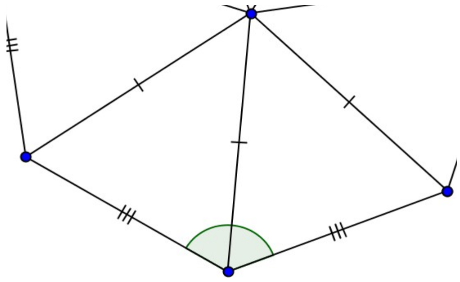
Périmètre de l'heptagone : 14$x$ x sin( $\frac{180}{7}$ )

je divise le périmètre de la pièce par le périmètre de l'heptagone :

$$\frac{P_{pièce}}{P_{heptagone}} = \frac{2\pi x \times \sin(\frac{540}{7})}{14x \times \sin(\frac{180}{7})} = 1{,}0084 = 100{,}84\,\%$$

Je trouve environ 1,0084 donc pour trouver le périmètre de la pièce arrondie, il faudra multiplier le périmètre de l'heptagone par environ 1,0084.

**Propriété 4**
Si on additionne les angles qui sont côte à côte (angle vert sur le schéma ci dessous), alors on obtient (180- $\frac{360}{7}$ ) c'est-à dire $\frac{900}{7}$ . Tous les angles de l'heptagone régulier mesurent $\frac{900}{7}$ .



**Propriété 5**
Il y a 7 axes de symétrie : La droite noire est le premier axe de symétrie, la droite verte représente le second, la droite bleue le troisième et il faut répéter cette action autant de fois qu'il y a de triangles, en l'occurrence 7.