Quelle aire est-il ?

Année 2013 - 2014

ROGER Valentin, CORNARD Vincent, BESSON Quentin, BALDERIOTTI Thomas, YOUINOU Perrine, élèves de 3e
CHABROUX Samuel et STRIANESE Quentin, élèves de 6e

Encadrés par : M GUICHETEAU et Mme Simond

Etablissement : Collège Pierre de Coubertin, Le Luc (Var)

Chercheur : Bernard ROUSSELET, université de Nice-Sofia-Antipolis

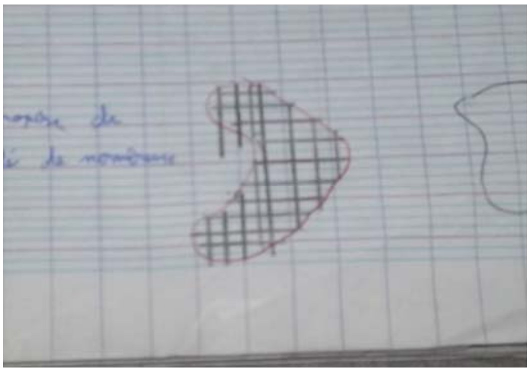
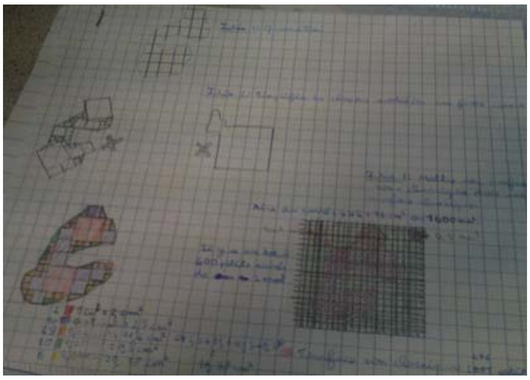
Présentation du sujet :

Tout au long de cette année, nous nous sommes efforcés de trouver un moyen de calculer la surface d'une figure non classique car contrairement à l'aire d'un carré, calculer la superficie d'une tache d'encre ou celle du Lac de Carcès est autrement plus ardues.

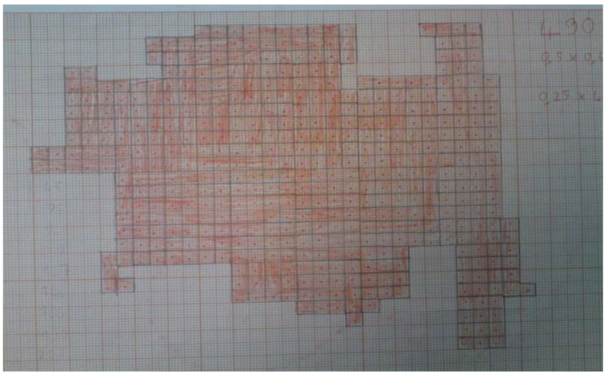
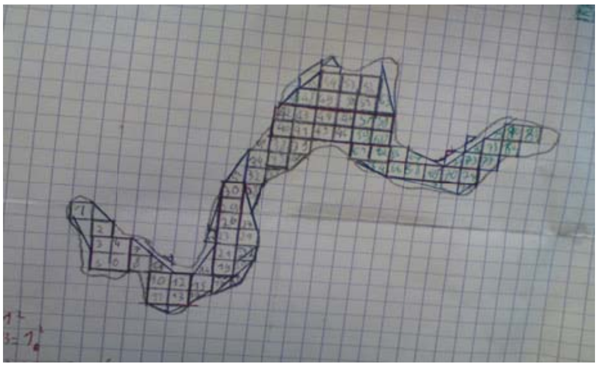
Le lac de Carcès se situe sur les communes de Carcès et de Cabasse dans le Var.

La technique du Quadrillage :

La première idée qui nous est venue à l'esprit est la technique du quadrillage, qui consiste à remplir la figure non classique de petits carrés. En calculant l'aire d'un petit carré et en multipliant cette aire par le nombre de carrés total, on trouvera la valeur approximative de cette superficie. Après avoir longuement travaillé sur diverses figures non classiques, nous avons enfin eu la bonne idée de rajouter des triangles.
Il y a deux défauts à cette technique : elle prend beaucoup de temps et il manque certaines parties de la figure malgré l'ajout des triangles.

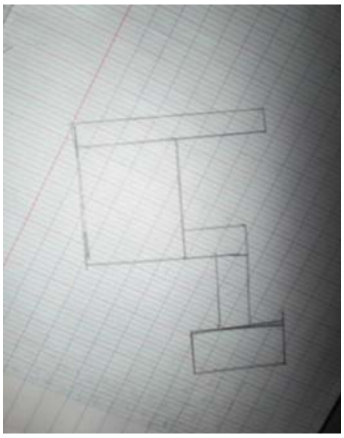



Quentin et Samuel ont élaboré des quadrillages qui ont été imprimés sur des feuilles transparentes pour pouvoir mieux lire.
Ils sont allés jusqu'à une feuille de papier millimétré mais ce n'était pas très lisible.

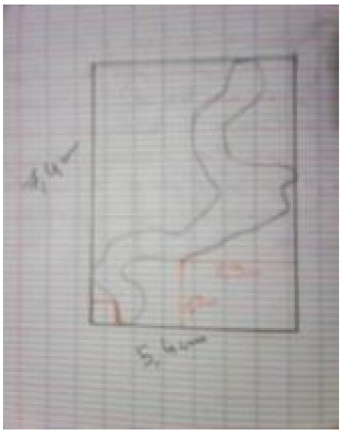
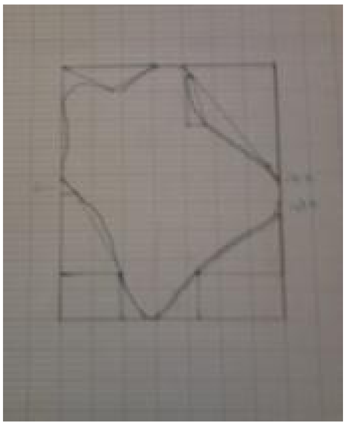
Simplification de la figure :

Nous avons ensuite essayé de simplifier la figure mais nous avons dû abandonner cette idée qui nous donnait une valeur vraiment trop approximative.



Conclusion :

Simultanément nous avons pensé à inclure la figure non classique dans une figure classique dont on connaît l'aire comme par exemple un rectangle.
Il suffisait alors d'enlever, de soustraire les plus grandes parties de cette figure à l'aire totale du rectangle pour obtenir une valeur approximative de la surface du lac.

Le Lac de Carcès :

Ici, nous avons calculé l'aire approximative du lac de Carcés :

- Il y a 15 carrés de 0.5x0,5= 0.25 cm^2 donc 15x0,25= 3,75 cm^2
- Il y a 32 carrés de 0.3x0,3=0.09 cm^2 donc 32x0,09= 2,88 cm^2
- Il y a 38 carrés de 0.2x0,2=0.04 cm^2 donc 38x0,04= 1,52 cm^2
- Il y a 91 carrés de 0.1x0,1= 0.01 cm^2 donc 91x0,01= 0,91 cm^2

On a additionné le tout :
3,75+2,88+1,52++0,91= 9,06 cm^2
Le lac à échelle réduite possède une aire d'environ 9,06 cm^2.

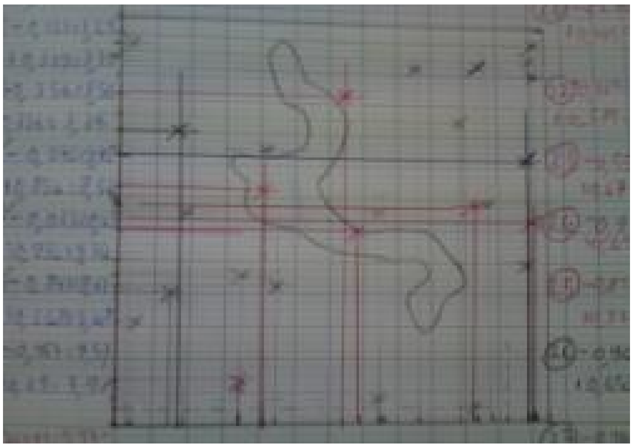
On l'a ensuite passé en taille réelle :
4,3 cm sur la feuille est égal à 121 600 cm en vrai soit 1 216 km. Pour passer de 4,3 à 121 600 cm, on a multiplié par 28 279,06977.
Il faut donc multiplier 9,06 par 28 279,0677 au carré (car les aires sont au carré) ce qui donne 7 245 334 431 cm^2 soit 724 533,4431 m^2 soit 0,7245334431 km^2.

Agrandissement :

Souhaitant trouver une valeur moins approximative, nous avons transformé les carrés de 0,1x0,1 cm en carrés de 0,5x0,5 cm. Malheureusement, il suffit de faire une erreur en comptant les carrés et cette technique ne marchera pas…

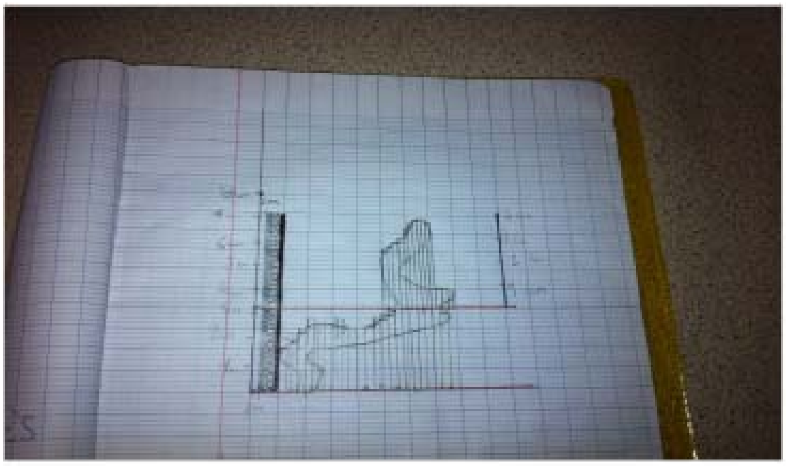
La technique de Monte-Carlo :

Pour vérifier qu'il n'y avait pas d'erreur dans nos calculs, nous avons utilisé une technique existante, la technique de Monte-Carlo, qui utilise la touche Ran de la calculatrice (cette touche nous donne un chiffre aléatoire entre 0 et 1). On l'utilise pour obtenir 2 chiffres que l'on multiplie par 10 nous donnant un nombre entre 0 et 10. On place le lac dans un carré de 10x10 cm et on place les chiffres obtenus avec la calculatrice. Le premier indique la longitude et le deuxième la latitude. Cela nous donne un point. Nous avons renouvelé cette opération 25 fois.
Au total, il n'y a que 2 points qui tombent dans le lac réduit. On effectue alors la technique suivante :
Probabilité = aire de figure/aire du carré (10 x 10 = 100) = 9,06/100 = Cas favorable/cas total = 2/25 = 8/100
Nous avons trouvé 9,06 cm^2 (9,06/100) avec le quadrillage et 8 cm^2 (8/100) avec les probabilités.

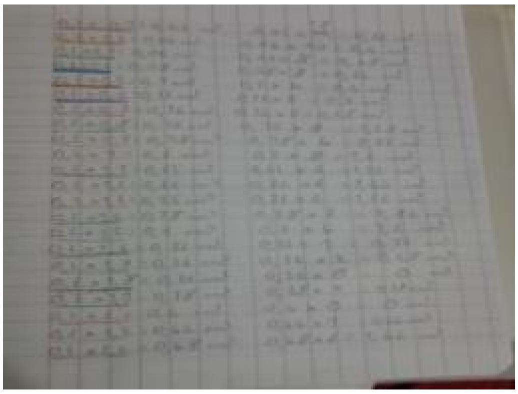


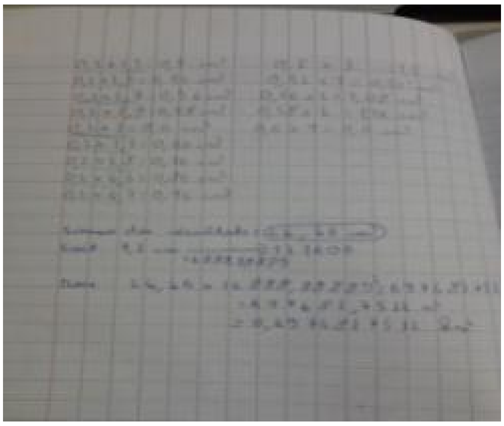
La technique Sup-inférieur :

Les trois premiers tests qui se sont révélés faux (ou inachevés) : (1)



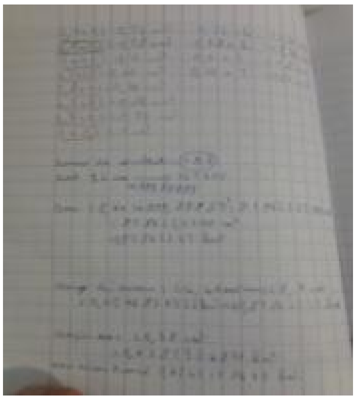
Inférieur :





La valeur inférieure est de 24,46 cm²

Supérieur :



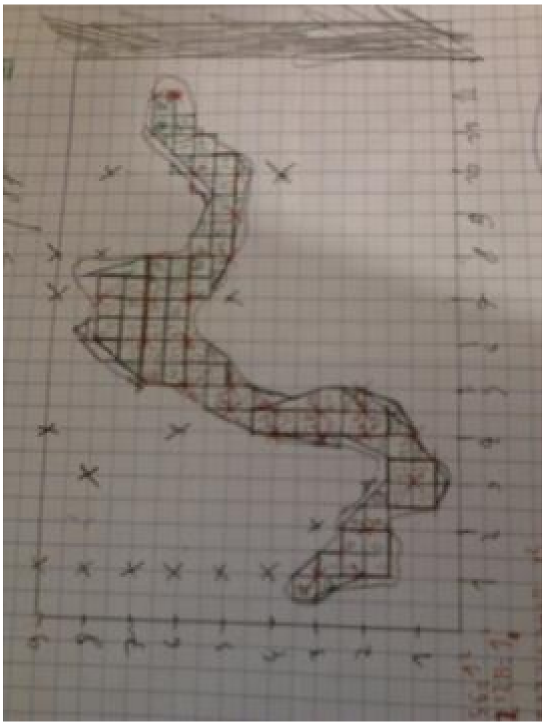
La valeur supérieure est de 28,7 cm².

Nous les avons ensuite passées en taille réelle.
7,2 cm est égal à 121 600 cm. Pour passer de l'un à l'autre, on a multiplié par 16 888,88889.

Il faut donc multiplier 24,46 par 16 888,88889 au carré (car les aires sont au carré) ce qui donne 6 976 837 532 cm2 soit 697 683,7532 m2 pour la valeur inférieure.
Il faut donc multiplier 28,7 par 16 888,88889 au carré (car les aires sont au carré) ce qui donne 8 186 232 100 cm2 soit 818 623,21 m2 pour la valeur supérieure.

Cela nous a permis d'obtenir une marge d'erreur entre 697 683,7532 m2 et 818 623,21 m2.
Nous avons calculé la moyenne qui est de : 758 153,4816 m2.
Nous avions trouvé 724 533, 4431 m2. Notre résultat se situe dans notre marge d'erreur. (2)

Variante des probabilités :



Nous avons élaboré une variante des probabilités. Celle-ci consiste à déduire tous les cas possibles. Dans notre rectangle de 13 x 9 = 117 cm^2, il y a 30 chances sur 117 de tomber dans le lac à échelle réduite. Etant donné que ce sont des probabilités, notre marge d'erreur se situe entre 20 et 40. (3)

Conclusion :

Grâce à toutes ces techniques, nous avons abouti à un résultat approximatif de la surface du lac de Carcès qui est de 724 533, 4431 m^2. Nous devons cette valeur à notre meilleure technique, le quadrillage. Nous possédons d'autres techniques très intéressantes telles que la technique que nous avons baptisée « sup-inférieur » qui, comme son surnom l'indique, nous donne une valeur supérieure et une autre inférieure à la surface de la figure non classique. Ces différentes techniques ont toutes le même but, calculer l'aire d'une figure non classique le plus précisément possible.

Cette aventure a été enrichissante pour la raison suivante : nous avons pu construire notre raisonnement en partant de presque rien, seulement de nos hypothèses. Merci à M.GUICHETEAU et à Mme SIMOND, nos professeurs de Mathématiques qui nous ont soutenus tout au long de l'année.

Notes d'édition

(1) Cette phrase semble en trop dans l'article.
(2) Avec leur méthode sup-inf, les auteurs ont redécouvert la « méthode des rectangles » pour approcher une intégrale (c'est-à-dire l'aire sous une courbe).
(3) Nous pensons qu'il y a eu 107 tirages aléatoires, dont 13 tombent dans le lac, et il faudrait mieux expliquer comment la marge d'erreur est obtenue.
(4) Il est intéressant de se demander s'il faut donner un nombre si précis alors qu'il s'agit d'une approximation.