Puissances de 2 et restes de divisions euclidiennes

Année 2016 - 2017

Élèves de 3ème : Raphaël BERNAS, Noah LUNNEY, El Mehdi NFIFI, Alex TRAN VAN NHIEU

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.

Chercheur : Maxime INGREMEAU.

Le sujet :

Quand on effectue la division euclidienne d'un nombre par 5, on peut trouver un reste valant 0,1,2,3 ou 4. Essayons sur les différentes puissances de 2.

Puissances de 2	Résultat	Reste de la division euclidienne par 5
2^0	1	Reste 1
2^1	2	Reste 2
2^2	4	Reste 4
2^3	8	Reste 3
2^4	16	Reste 1
2^5	32	Reste 2
2^6	64	Reste 4
2^7	128	Reste 3

Il semble que la suite de restes se répète et qu'on obtienne tous les restes sauf 0. Pourquoi ?

Nos résultats : Après avoir répondu au sujet en démontrant que 0 ne pouvait être un reste et que la suite des autres restes se répète à l'infini, nous avons étendu le sujet en observant les restes des divisions euclidiennes de 2^n avec d'autres diviseurs que 5, puis en prenant d'autre dividendes. Nous avons réussi à démontrer que certaines suites de restes sont prévisibles.

I – Puissances de 2 divisées par 5

1) Pourquoi le reste ne peut-il pas être 0 ?

Prenons n un entier positif. La décomposition en facteurs premiers de 2^n ne contient que des 2 donc 2^n n'est pas divisible par 5 ; le reste de la division euclidienne (notée DE par la suite) de 2^n par 5 ne peut donc pas être 0 quel que soit le nombre n.

2) Répétition des restes

Lorsqu'on effectue une division euclidienne, la suite des restes se répète. Ici cette suite est : 1 – 2 – 4 – 3

Démonstration : Les 4 premiers restes sont 1 – 2 – 4 – 3 ; il nous faut donc démontrer que lorsqu'on avance de 4 rangs, le reste est toujours le même. Notons r le reste et q le quotient de la DE de 2^n par 5 ; r et q sont des entiers naturels.

On a : $2^n = 5q + r$ et $r < 5$. Pour regarder le reste 4 rangs plus loin, il faut multiplier chaque membre de cette égalité par 2^4. On obtient : $2^n 2^4 = (5q + r)\, 2^4$

$2^{n+4} = 80q + 16r$

$2^{n+4} = 80q + 15r + r$

$2^{n+4} = 5(16q + 3r) + r = 5q' + r$, où q' entier et $q' = 16q + 3r$.

Le reste est le même quatre rangs plus loin. La suite 1 – 2 – 4 – 3 de départ va donc se répéter indéfiniment.

II – Puissances de 2 et autres diviseurs

Changeons le diviseurs et observons les restes. Nos résultats sont récapitulés dans un tableau qui donne les restes des divisions euclidiennes des puissances de 2 inscrites dans la première colonne par des diviseurs de 2 à 19, inscrits sur la première ligne.(1)

Diviseurs / 2^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2^1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2^2	0	1	0	4	4	4	4	4	4	4	1	4	4	4	4	4	4	4
2^3	0	2	0	3	2	1	0	8	8	8	2	8	3	8	8	8	8	8
2^4	0	1	0	1	4	2	0	7	6	5	1	3	1	1	0	16	16	16
2^5	0	2	0	2	2	4	0	5	2	10	2	6	2	2	0	15	14	13
2^6	0	1	0	4	4	1	0	1	4	9	1	12	4	4	0	13	10	7
2^7	0	2	0	3	2	2	0	2	8	7	2	11	3	8	0	9	2	14
2^8	0	1	0	1	4	4	0	4	6	3	1	9	1	1	0	1	4	9
2^9	0	2	0	2	2	1	0	8	2	6	2	5	2	2	0	2	8	18
2^{10}	0	1	0	4	4	2	0	7	4	1	1	10	4	4	0	4	16	17
2^{11}	0	2	0	3	2	4	0	5	8	2	2	7	3	8	0	8	14	15
2^{12}	0	1	0	1	4	1	0	1	6	4	1	1	1	1	0	16	10	11
2^{13}	0	2	0	2	2	2	0	2	2	8	2	2	2	2	0	15	2	3

Remarques : soit n et k entiers positifs.

1) On trouve un reste de 0 uniquement lorsque les diviseurs sont aussi des puissances de 2. Nous l'avons déjà expliqué dans I, 2^n ne contient que des 2 dans sa décomposition en facteurs premiers donc ses diviseurs également.
Pour 2^n divisé par 2^k, les restes seront 0 à partir de $n = k$. Puis, lorsque le reste 0 apparaît, on obtient 0 pour tous les restes suivants.

2) Lorsque le diviseur est un multiple de 2, 2^k, jusqu'à ce rang k, on aura les restes :
1 (= 2^0) / 2 (= 2^1) / 4 (= 2^2) / 8 (= 2^3) / .../ 2^{k-1} ; les restes suivants seront des 0.

Par exemple si le diviseur est $2^5 = 32$, les reste seront : 1 / 2 / 4 =2^2 / 8 = 2^3 / 16 = 2^4 / 0 / 0 / ...

3) Observation et conjecture sur les premiers restes.

- Après le diviseur 2 (2^1), la suite de restes commence par 1 puis 2 jusqu'au diviseur 2^2.

- Après le diviseur 4 (2^2), la suite de restes commence par 1 puis 2 puis 4 jusqu'au diviseur 2^3.

- Après le diviseur 8 (2^3) : 1 / 2 / 4 / 8 jusqu'au diviseur 2^4.

- Après le diviseur 16 (2^4) : 1 / 2 / 4 / 8 / 16 jusqu'à 2^5.

On pourrait généraliser cette conjecture :
Après le diviseur 2^k, la suite de restes commence par 2^0 / 2^1 / 2^2 / 2^3 / ... / 2^k jusqu'à 2^{k+1}.

Nous pouvons prévoir les restes lorsque le diviseur est aussi une puissance de 2 mais peut-on prévoir les autres ?

Autre conjecture que nous n'avons pas réussi à démontrer : en prenant les diviseurs qui ne sont pas des puissances de 2, si on fait la somme des restes qui se répètent, on arrive à un nombre qui est un multiple du diviseur.
Diviseur 3 : 1 + 2 = 3 = 3 x **1**
Diviseur 5 : 1 + 2 + 4 + 3 = 10 = 5 x **2**
Diviseur 6 : 2 + 4 = 6 = 6 x **1**
Diviseur 7 : 1 + 2 + 4 = 7 = 7 x **1**
Diviseur 9 : 1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 5 = 27 = 9 x **3**
Diviseur 10 : 2 + 4 + 8 + 6 = 20 = 10 x **2**
Diviseur 11 : 55 = 11 x **5**
Diviseur 12 : 12 = 12 x **1**
Diviseur 13 : 78 = 13 x **6**
Diviseur 14 : 14 = 14 x **1**
Diviseur 15 : 15 = 15 x **1**
Diviseur 17 : 68 = 17 x **4**
Diviseur 18 : 54 = 18 x **3**
Diviseur 19 : 171 = 19 x **9**
Diviseur 20 : 40 = 20 x **2**
Diviseur 21 : 42 = 21 x **2**
Diviseur 22 : 110 = 22 x **5**

Nous espérions pouvoir trouver une suite logique sur les facteurs qui multiplient les diviseurs (nombres en **gras**) **mais nous cherchons encore...**

III – Étude d'autres divisions euclidiennes

Nous avons voulu étudier les restes des divisions euclidiennes sur d'autres nombres que des puissances de 2. Nous avons mis ici quelques uns des tableaux que nous avons faits.

Diviseurs / 3^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3^1	1	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3^2	1	0	1	4	3	2	1	0	9	9	9
3^3	1	0	3	2	3	6	3	0	7	5	3
3^4	1	0	1	1	3	4	1	0	1	4	9
3^5	1	0	3	3	3	5	3	0	3	1	3
3^6	1	0	1	4	3	1	1	0	9	3	9
3^7	1	0	3	2	3	3	3	0	7	9	3
3^8	1	0	1	1	3	2	1	0	1	5	9
3^9	1	0	3	3	3	6	3	0	3	4	3
3^{10}	1	0	1	4	3	4	1	0	9	1	9
3^{11}	1	0	3	2	3	5	3	0	7	3	3
3^{12}	1	0	1	1	3	1	1	0	1	9	9
3^{13}	1	0	3	3	3	3	3	0	3	5	3

Diviseurs / 4^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4^1	0	1	0	4	4	4	4	4	4	4	4
4^2	0	1	0	1	4	2	0	7	6	5	4
4^3	0	1	0	4	4	1	0	1	4	9	4
4^4	0	1	0	1	4	4	0	4	6	3	4
4^5	0	1	0	4	4	2	0	7	4	1	4
4^6	0	1	0	1	4	1	0	1	6	4	4
4^7	0	1	0	4	4	4	0	4	4	5	4
4^8	0	1	0	1	4	2	0	7	6	9	4
4^9	0	1	0	4	4	1	0	1	4	3	4
4^{10}	0	1	0	1	4	4	0	4	6	1	4
4^{11}	0	1	0	4	4	2	0	7	4	4	4
4^{12}	0	1	0	1	4	1	0	1	6	5	4
4^{13}	0	1	0	4	4	4	0	4	4	9	4

Diviseurs 5^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5^1	1	2	1	0	5	5	5	5	5	5	5
5^2	1	1	1	0	1	4	1	7	5	3	1
5^3	1	2	1	0	5	6	5	8	5	4	5
5^4	1	1	1	0	1	3	1	4	5	9	1
5^5	1	2	1	0	5	2	5	2	5	1	5
5^6	1	1	1	0	1	1	1	1	5	5	1
5^7	1	2	1	0	5	5	5	5	5	3	5
5^8	1	1	1	0	1	4	1	7	5	4	1
5^9	1	2	1	0	5	6	5	8	5	9	5
5^{10}	1	1	1	0	1	3	1	4	5	1	1
5^{11}	1	2	1	0	5	2	5	2	5	5	5
5^{12}	1	1	1	0	1	1	1	1	5	3	1
5^{13}	1	2	1	0	5	5	5	5	5	4	5

Diviseurs 8^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8^1	0	2	0	3	2	1	0	8	8	8	8
8^2	0	1	0	4	4	1	0	1	4	9	4
8^3	0	2	0	2	2	1	0	8	2	6	8
8^4	0	1	0	1	4	1	0	1	6	4	4
8^5	0	2	0	3	2	1	0	8	8	10	8
8^6	0	1	0	4	4	1	0	1	4	3	4
8^7	0	2	0	2	2	1	0	8	2	2	8
8^8	0	1	0	1	4	1	0	1	6	5	4
8^9	0	2	0	3	2	1	0	8	8	7	8
8^{10}	0	1	0	4	4	1	0	1	4	1	4
8^{11}	0	2	0	2	2	1	0	8	2	8	8
8^{12}	0	1	0	1	4	1	0	1	6	9	4
8^{13}	0	2	0	3	2	1	0	8	8	6	8

Remarques :

a) La règle des zéros

On retrouve la remarque faite sur 2^n avec les diviseurs 2^k ; lorsqu'on divise les a^n par a^k, alors à partir d'une certaine étape (étape k), tous les restes valent 0 et les premiers restes non nuls sont :1 ; a ; a^2 ; … ; a^{k-1}.

Par exemple, pour les puissances de 3 :

Pour le diviseur 3 (3^1) : les restes seront 1 (3^0) / 0 / 0...

Pour le diviseur 9 (3^2) : les restes seront 1 (3^0) / 3 (3^1) / 0 / 0 ...

Pour le diviseur 27 (3^3): les restes seront 1 (3^0) / 3 (3^1) / 9 (3^2) / 0 / 0 ...

b) Le début des restes est :

-Pour les diviseurs qui suivent 3 (3^1), la suite des restes commence par 1 ; 3 jusqu'au diviseur 3^2.

-Pour les diviseurs qui suivent 9 (3^2),la suite des restes commence par : 1 / 3 / 9 jusqu'au diviseur 3^3.

-Pour les diviseurs qui suivent 27 (3^3), la suite des restes commence par : 1 / 3 / 9 / 27 jusqu'au diviseur 3^4.

On peut généraliser cette remarque et conjecturer une partie des restes. Les cases grises sont les restes que l'on ne peut prévoir avec cette conjecture.

Diviseurs / a^n	Diviseurs entre 1 et a	a	Diviseurs entre a et a^2	a^2	Diviseurs entre a^2 et a^3	a^3	Diviseurs entre a^3 et a^4	a^4	Diviseurs entre a^4 et a^5	a^5
a^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^1		0	a	a	a	a	a	a	a	a
a^2		0		0	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2
a^3		0		0		0	a^3	a^3	a^3	a^3
a^4		0		0		0		0	a^4	a^4
a^5		0		0		0		0		0
a^6		0		0		0		0		0
a^7		0		0		0		0		0
a^8		0		0		0		0		0
a^9		0		0		0		0		0
a^{10}		0		0		0		0		0
a^{11}		0		0		0		0		0
a^{12}		0		0		0		0		0
a^{13}		0		0		0		0		0

c) La somme des restes

Si on effectue la somme des restes qui vont se répéter, c'est encore **un multiple (ou un diviseur) du diviseur** dans la plupart des cas.

Par exemple, dans le tableau des puissances de 8, si nous regardons le diviseur 11, la somme des restes qui vont se répéter est : 1 + 8 + 9 + 6 + 4 + 10 + 3 + 2 + 5 + 7 = 55, c'est un multiple de 11.

Il y a quelques diviseurs pour lesquels cette remarque n'est pas vérifiée. Par exemple, pour le diviseur 8 dans le tableau des puissances de 5, la somme des restes qui vont se répéter est :

1 + 5 = 6 ; 6 n'est ni un multiple ni un diviseur de 8.

d) Nous avons aussi remarqué des suites de restes particulières sur les nombres précédents les diviseurs a^k des a^n.

Cette suite est : $a^0; a^1 ; a^2 ; a^3 ; \dots ; a^{k-1} ; a^{k-2} ; a^0; a^1 ; a^2 ; a^3 ; \dots ; a^{k-1} ; a^{k-2} ; \dots$

Diviseurs / 2^n	3	4	7	8	15	16
2^0	1		1		1	
2^1	2		2		2	
2^2	1		4		4	
2^3	2		1		8	
2^4	1		2		1	
2^5	2		4		2	
2^6	1		1		4	
2^7	2		2		8	
2^8	1		4		1	
2^9	2		1		2	
2^{10}	1		2		4	

Diviseurs / 3^n	2	3	8	9	26	27
3^0	1		1		1	
3^1	1		3		3	
3^2	1		1		9	
3^3	1		3		1	
3^4	1		1		3	
3^5	1		3		9	
3^6	1		1		1	
3^7	1		3		3	
3^8	1		1		9	
3^9	1		3		1	
3^{10}	1		1		3	

e) Si le diviseur est le nombre entier qui suit le nombre dont on prend les puissances dans le dividende, la suite comportera deux restes en alternance : le nombre élevé à la puissance dans le dividende et 1. De plus, la suite des restes pour le diviseur précédent est formée uniquement de 1.

Diviseurs / 5^n	4	5	6
5^0	1	1	1
5^1	1	0	5
5^2	1	0	1
5^3	1	0	5
5^4	1	0	1
5^5	1	0	5
5^6	1	0	1
5^7	1	0	5
5^8	1	0	1
5^9	1	0	5
5^{10}	1	0	1
5^{11}	1	0	5
5^{12}	1	0	1
5^{13}	1	0	5

Diviseurs / 8^n	7	8	9
8^0	1	1	1
8^1	1	0	8
8^2	1	0	1
8^3	1	0	8
8^4	1	0	1
8^5	1	0	8
8^6	1	0	1
8^7	1	0	8
8^8	1	0	1
8^9	1	0	8
8^{10}	1	0	1
8^{11}	1	0	8
8^{12}	1	0	1
8^{13}	1	0	8

Démonstration de la règle des suivants (2): on regarde les restes de la DE des a^n par $a+1$ où a est un entier naturel non nul.
Le premier reste est 1 puisque $a^0=(a+1)\times 0+1$
On suppose qu'à une étape n, on a un reste 1, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que :
$a^n=(a+1)\times q+1$
On veut démontrer qu'à l'étape suivante, on aura un reste a.
On a : $a^{n+1}=((a+1)\times q+1)\times a=a(a+1)\times q+a=(a+1)\times q'+a$ où $a < a+1$ et $q'=aq$, q' est un entier naturel. Le reste est donc bien a.

Maintenant on doit démontrer que lorsqu'on a un reste a à une étape n, alors à l'étape suivante on aura un reste de 1. On suppose donc que : $a^n=(a+1)\times q+a$
On a : $a^{n+1}=((a+1)\times q+a)\times a=a(a+1)\times q+a^2=(a+1)\times q'+a^2$ où $q'=aq$, entier naturel.
$a^{n+1}=(a+1)\times q'+a^2+1-1=(a+1)\times q'+(a+1)(a-1)+1=(a+1)\times q''+1$
où $q''=q'+a-1$, entier naturel.

Le reste est bien 1. Donc on a bien démontré que la suite des restes est alternativement 1 et a.

Démonstration de la règle des précédents (3): on regarde les restes de la DE des a^n par $a-1$; a est un entier naturel non nul supérieur strictement à 2.
Le premier reste est 1 puisque $a^0=(a-1)\times 0+1$
On suppose qu'à une étape n, le reste est 1 ; il existe un entier naturel q tel que : $a^n=(a-1)\times q+1$. On veut démontrer qu'à l'étape suivante le reste est encore 1.
On a :
$a^{n+1}=((a-1)\times q+1)\times a=a(a-1)\times q+a=(a-1)\times q'+a-1+1=(a-1)\times q''+1$
où $q'=aq$ et $q''=q'+1$ sont des entiers naturels.
Le reste est bien 1. Nous avons démontré que la suite des restes ne contient bien que des 1.

Astuce pour calculer les restes très rapidement (4)
Au cours de nos recherches, nous avons trouvé une méthode pour calculer rapidement les restes, et donc trouver les suites de restes qui se répètent.
Prenons comme dividende les puissances de 3 et comme diviseur 7 :

Diviseurs / 3^n	7
3^0	1
3^1	3
3^2	2
3^3	6
3^4	4
3^5	5
3^6	1
3^7	3
3^8	2
3^9	6
3^{10}	4
3^{11}	5
3^{12}	1
3^{13}	3

On part de l'étape 0 avec un reste 1.
A chaque étape, on multiplie le reste de l'étape précédente par 3 et on enlève le plus grand multiple de 7 au résultat ; on obtient le nouveau reste.

Par exemple, pour 3^3, nous avons un reste de 6. Pour trouver le reste suivant, on multiplie 6 par 3, ce qui donne 18 qui contient 14 (le plus grand multiple de 7 dans 18). Le reste suivant sera donc : 18 -14 = 4.

IV – Etude des sommes de restes

Nous avons classer dans un tableau la somme des restes se répétant.(5)

diviseur / x^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	3	0	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1	3
4	0	4	0	1	0	4	0	1	0	4	0	1	0	4	0	1
5	10	10	5	0	1	10	10	5	0	1	10	10	5	0	1	10
6	6	3	4	6	0	1	6	3	4	6	0	1	6	3	4	6
7	7	21	7	21	7	0	1	7	21	7	21	7	0	1	7	21
8	0	4	0	6	0	8	0	1	0	4	0	6	0	8	0	1
9	27	0	12	27	0	12	9	0	1	27	0	12	27	0	12	9
10	20	20	10	5	6	20	20	10	0	1	20	20	10	5	6	20
11	55	22	22	22	55	55	55	22	11	0	1	55	22	22	22	55
12	12	12	4	6	0	8	12	9	4	12	0	1	12	12	4	6
13	78	13	39	26	78	78	26	13	39	78	13	0	1	78	13	39
14	14	42	14	42	14	7	8	21	42	2	42	14	0	1	14	42
15	15	30	5	15	6	25	15	15	10	12	30	25	15	0	1	15
16	0	24	0	28	0	8	0	10	0	24	0	28	0	16	0	1

Nous observons que ce tableau contient des symétries par rapport aux nombres placés sur la diagonale. On constate que pour le diviseur *n*, il y a *n* termes dans la suite. De plus, il y a une relation entre le diviseur et les termes de la suite. La plupart du temps, ils font partie de la même table(6).

Exemple : Pour le diviseur 2 : 0 1
Pour le diviseur 3 : 3 0 1
Pour le diviseur 4 : 0 4 0 1
Pour le diviseur 5 : 10 10 5 0 1

Nous avons observé des suites qui pourraient justifier les étrangetés qui apparaissaient lors de nos recherches. Par exemple, dans un carré dessiné, il y a un nombre au centre, avec à sa droite, au-dessus et en dessous son consécutif. A sa gauche, en revanche, se situe son double.

Nous n'avons pas eu le temps de finir nos recherches sur ce tableau qui semble encore cacher bien d'autres résultats intéressants.

Notes d'édition

(1) Les restes sont à revoir pour les colonnes 12 et 14 ...

(2) L'énoncé de cette règle n'est pas donnée : la « règle des suivants » dit que la suite des restes dans la division euclidienne de a^n par *a*+1 est alternativement formée de 1 et de *a.*

(3) Et la « règle des précédents » dit que la suite des restes dans la division euclidienne de a^n par *a*-1 n'est formée que de 1

(4) Il serait bien de montrer que cette « astuce » est juste : bon exercice pour le lecteur et la lectrice ...

(5) Le code des couleurs dans ce tableau est mystérieux.

(6) Pour préciser cette remarque des auteurs : on constate que la « suite des sommes de restes » se répète après la diagonale quand on les considère ligne par ligne (ainsi ligne du diviseur 5 on a 10, 10, 5, 0, 1 puis la séquence se répète indéfiniment). Cela s 'explique simplement par le fait que si *a* et *b* ont même reste il en est de même pour a^n et b^n pour tout *n*. Donc les suites des restes elles-mêmes sont les mêmes et par conséquent leurs sommes aussi. Par exemple la somme des restes de 2^n et de 7^n est la même (égale à 10) pour le diviseur 5.