Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Propagation de rumeurs

Elèves :
Samuel BERTRAND : terminale S, Quitterie LUCAS, Gaétan FADAT, Nicolas MARTEAU, Marie SOULARD : seconde.

Lycée Saint Joseph, 4 rue du Docteur Brillaud, 79 300 BRESSUIRE

Enseignants :

Gilles MARECHAL, Alexandre PIN

Jumelage avec le Lycée Pilote Innovant International de Jaunay – Clan

Chercheur :

Julien MICHEL , Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées de l'Université de Poitiers

Année 2012-2013

Sujet :

Propagation de rumeurs : par des automates finis ou par une vision aléatoire, en fonction des paramètres du modèle, quel front de rumeur voit-on apparaître ?

Introduction

Une *rumeur* est une information qui se transmet de façon non maîtrisée.
Un *propagateur* est un porteur de la rumeur.
Un *contaminé* ou *informé* est une personne qui a connaissance de la rumeur, à son tour elle devient porteuse de la rumeur.

Nous nous sommes situés dans le cadre de la propagation d'une rumeur dans une file d'attente supposée de longueur infinie, c'est-à-dire que nous avons représenté les personnes par des points et la situation par une *droite avec des points régulièrement espacés*.
Nous sommes restés dans le cas où une personne informée devenait de façon certaine propagatrice à son tour.

1 – Propagation pépère

1.1 – Présentation du modèle

Lorsque la propagation se fait uniquement auprès des voisins directs nous parlons de *propagation pépère*, ou naturelle, elle est illustrée par la figure ci-dessous.

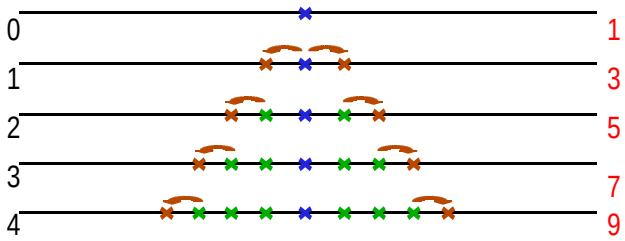


Figure 1 : propagation pépère

Sur la figure 1, l'étape est le nombre indiqué en noir, à gauche. Le nombre de contaminés est le nombre rouge noté à droite.
Ainsi à l'étape 0 une seule personne est informée (croix bleue), à l'étape 1 le propagateur va informer ses deux voisins (croix rouges) portant ainsi à 3 le nombre d'informés. A l'étape 2 on obtient 2 personnes informées en plus. Ainsi à l'étape n nous avons donc $2n+1$ personnes informées.
On obtient ainsi un *cône de propagation*.
En fonction des étapes dépendantes du temps, nous nous sommes intéressés au nombre de contaminés ainsi qu'à la vitesse de propagation de la rumeur, obtenue en divisant le nombre de contaminés par le nombre d'étapes.

1.2 – Vitesse

Nous notons C_n le *nombre de contaminés* à l'étape n et v_n la *vitesse de propagation* de la rumeur.

Ici on a donc, pour $n>0$, $v_n = \frac{C_n}{n} = \frac{2n+1}{n}$.

En transformant l'écriture on a $\frac{2n+1}{n} = 2+\frac{1}{n}$, ce qui explique que la vitesse tend vers 2.

En effet plus n sera grand, plus $\frac{1}{n}$ représentera un petit nombre, et ainsi, en ajoutant 2, plus la vitesse va se rapprocher de 2.
Cette modélisation pépère nous étant apparue assez loin de la réalité, nous l'avons améliorée en faisant déplacer le propagateur initial.

2 – Propagation avec sauts et de sens imposé

2.1 – Présentation du modèle

La figure 2 illustre ce qui se passe dans la nouvelle situation.
Rien ne change pour les étapes 0 et 1, mais entre les étapes 1 et 2 le propagateur se déplace, par exemple de 6 unités sur cette figure, vers la droite.

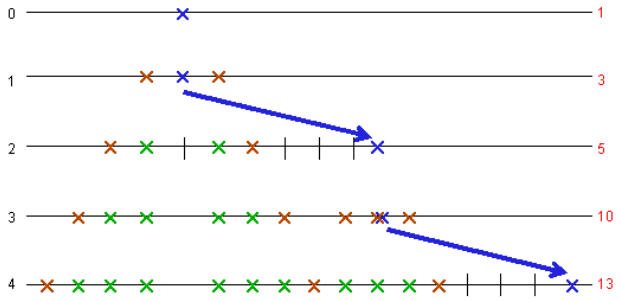


Figure 2 : Propagation avec un saut $k = 6$

On remarque qu'à l'étape 3 le propagateur a de nouveau diffusé la rumeur, commençant un nouveau cône de propagation.
En effet, il contamine ses deux voisins plus celui qu'il vient de côtoyer, cela n'empêchant pas pour autant les voisins extrêmes de la rumeur initiale de continuer à propager celle ci. En tout nous avons donc cinq nouveaux informés, ce qui porte le nombre de contaminés à 10.
A l'étape 4, le propagateur se déplace de nouveau de six unités dans le même sens, mais il ne contamine pas ses nouveaux voisins à cette étape.
Dans ce modèle on remarque que le contaminateur initial fait deux choses : d'abord il contamine, puis il se déplace.
On peut également constater qu'il n'y a que trois nouveaux contaminés (les 3 croix rouges à cette étape), seuls les voisins extrêmes recevant la rumeur ainsi qu'une personne à l'intersection des deux cônes de propagation.
On observe donc une certaine régularité : nous avons 5 contaminés supplémentaires aux étapes impaires alors que nous n'en avons que 3 aux étapes paires, pour un saut de longueur 6.

En faisant d'autres essais nous avons trouvé des formules pour comptabiliser le nombre de contaminés selon la longueur du saut et le numéro de l'étape.

2.2 – Résultats expérimentaux

En se plaçant donc dans l'hypothèse où la propagation se fait de façon pépère et où le porteur initial effectue des déplacements de longueur imposée, appelés *sauts*, toujours dans la même direction, on note :

- k la longueur du *saut*, on notera : *saut k*
- n le rang de l'étape, on notera : *étape n*
- F_n^k le nombre de personnes informées à l'étape n avec un saut k.

La figure 3 donne les résultats obtenus expérimentalement.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	7	7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14
5	11	11	11	13	15	17	18	19	20	21	21	21	21	21	21	21
6	13	13	13	15	17	19	21	23	24	25	26	27	27	27	27	27
7	15	15	15	18	21	24	26	28	30	32	33	34	35	36	36	36
8	17	17	17	20	23	26	29	32	34	36	38	41	41	42	43	44
9	19	19	19	23	27	31	34	37	40	43	45	47	49	51	52	53
10	21	21	21	25	29	33	37	41	44	47	50	54	55	57	59	61

Figure 3 : Tableau des résultats obtenus

Par exemple : si le propagateur effectue un saut de longueur 6, alors, après la 9ème étape, il y aura 34 personnes informées. Autrement dit : si $k = 6$ et $n = 9$ alors $F_n^k = 34$.

2.3 – Analyse des résultats

A partir de ces résultats, nous avons essayé de repérer et de déterminer des formules donnant F_n^k, en fonction de k et de n.

Les premiers résultats pour un saut k allant de 0 à 3 sont imposés par des contraintes concrètes.
Pour $k > 3$ les résultats F_n^k ont une certaine irrégularité, jusqu'à un certain rang de début d'une propagation régulière dépendant de la parité de k, puisqu'il y a ou non un point commun à l'intersection de 2 cônes de propagation.

2.3.1 – Cas où *k* est impair

2.3.1.1 – Rang de début de régularité

Pour les autres valeurs de k nous avons d'abord cherché à déterminer un rang n' à partir duquel une régularité apparaît dans l'évolution du nombre F_n^k (augmentation régulière mais en alternance de pair en pair ou d'impair en impair).

Suite à une observation du tableau précédent on est amené à repérer les cases coloriées en rouge. Les résultats sont regroupés en dessous :

k	5	7	9	11	13	15	17
	2*2+1	2*3+1	2*4+1	2*5+1	2*6+1	2*7+1	2*8+1
$\frac{k}{2}$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$E\left(\frac{k}{2}\right)$	2	3	4	5	6	7	8
n'	1	2	3	4	5	6	7

Figure 4 : Valeurs de début pour k impair

En nous appuyant sur ces observations, nous proposons que cette valeur de n' est, lorsque k est un entier impair supérieur ou égal à 5 : $n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1$.

Ces observations ont été confirmées par les résultats des simulations obtenues à l'aide du programme. (1) Ce résultat est donc notre conjecture de départ.

Le rang de début n' de régularité dans la propagation à saut k est :

Pour k impair et $k > 3$

$$n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1 \quad (C_1)$$

Par la suite, on s'intéresse à la valeur de $F_{n'}^k$, nombre que nous noterons a_k. (2)

2.3.1.2 - Valeurs de début de régularité

Après avoir noté les différentes valeurs de a_k, nous avons cherché à les décomposer en produit de deux facteurs.

k	5	7	9	11	13	15	17
n'	1	2	3	4	5	6	7
a_k	3	5	10	14	21	27	36
	3×1	5×1	5×2	7×2	7×3	9×3	9×4

Figure 5 : Décomposition de a_k en produit

La recherche d'une formule donnant a_k se fait en deux temps.

a_k	3	5	10	14	21	27	36
	3×1	5×1	5×2	7×2	7×3	9×3	9×4
k	5	7	9	11	13	15	17
$\frac{k}{4}$	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
$E\left(\frac{k}{4}\right)$	1	1	2	2	3	3	4

Figure 6 : Formule pour le second facteur

Nous avons alors remarqué que le second facteur valait $E\left(\frac{k}{4}\right)$ dès que $k > 3$,

k	5	7	9	11	13	15	17
n'	1	2	3	4	5	6	7
Premier facteur	3	5	5	7	7	9	9
$k - n'$	4	5	6	7	8	9	10
$k - n'$ *si* n' *pair*		5		7		9	
$k - n' - 1$ *si* n' *impair*	3		5		7		9

Figure 7 : Formule pour le premier facteur

Le premier facteur du produit s'écrit $\begin{cases} k - n' \text{ si } n' \text{ pair} \\ k - n' - 1 \text{ si } n' \text{ impair} \end{cases}$.

En repartant du tableau initial de données, (figure 3) on a trouvé que le premier facteur peut encore s'écrire $k - 2E\left(\frac{k}{4}\right)$.

k	5	7	9	11	13	15	17
$E\left(\frac{k}{4}\right)$	1	1	2	2	3	3	4
$2E\left(\frac{k}{4}\right)$	2	2	4	4	6	6	8
Premier facteur	3	5	5	7	7	9	9

Figure 8 : Nouvelle formule du premier facteur

Par conséquent, notre seconde conjecture a été que la valeur a_k est :

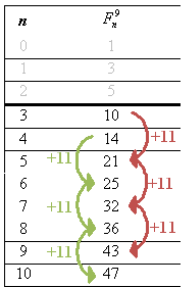
Pour k impair et $k > 3$

$$a_k = \left[k - 2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right) \quad (C_2)$$

2.3.1.3 - F_n^k selon k et la parité de n

Une fois obtenus le rang de début n' et la valeur de début de régularité a_k, F_n^k s'obtient en ajoutant à F_{n-1}^k une constante donnée, différente selon que n est pair ou impair.

On distingue alors deux écritures de F_n^k à partir de la valeur a_k de début de régularité. Après une série de tests sur des sauts k de différentes valeurs, il a été remarqué pour chaque saut k une régularité et une identité de l'augmentation de la valeur F_n^k d'étape paire en étape paire et d'étape impaire en étape impaire (flèches en dessous).



	n pair (n= 2p)	*n impair (n= 2p + 1)*
valeur de début	14	10
augmentation	+11	+11
p	≥ 2	≥ 1

Figure 9 : Obtention de F_n^9

Par exemple F_n^9 s'obtient par une augmentation de 11 personnes, toutes les deux étapes. Cela s'explique par le fait que le saut k s'effectue lors des étapes paires (les étapes impaires étant celles du déplacement du propagateur). Cette augmentation se décompose ainsi : seulement 4 personnes de plus sont informées en n pair (il s'agit de la propagation initiale lancée à l'étape 0 et non perturbée par les sauts). En revanche, lors des étapes impaires, 7 personnes de plus sont informées car la propagation initiale se poursuit et le propagateur en déplacement informe 3 autres personnes.

Ansi :

si $n = 2p$ alors $F_n^9 = 14 + (p-2)\times 11$

si $n = 2p+1$ alors $F_n^9 = 10 + (p-1)\times 11$

Il en est de même pour les autres sauts $k \geq 5$:

k	F_{2p}^k
5	$F_{2p}^5 = 5+(p-1)\times 7$ pour $p \geq 1$
7	$F_{2p}^7 = 5+(p-1)\times 9$ pour $p \geq 1$
9	$F_{2p}^9 = 14+(p-2)\times 11$ pour $p \geq 2$
11	$F_{2p}^{11} = 14+(p-2)\times 13$ pour $p \geq 2$
13	$F_{2p}^{13} = 27+(p-3)\times 15$ pour $p \geq 3$
15	$F_{2p}^{15} = 27+(p-3)\times 17$ pour $p \geq 3$

k	F_{2p+1}^k
5	$F_{2p+1}^5 = 3+(p-0)\times 7$ pour $p \geq 0$
7	$F_{2p+1}^7 = 10+(p-1)\times 9$ pour $p \geq 1$
9	$F_{2p+1}^9 = 10+(p-1)\times 11$ pour $p \geq 1$
11	$F_{2p+1}^{11} = 21+(p-2)\times 13$ pour $p \geq 2$
13	$F_{2p+1}^{13} = 21+(p-2)\times 15$ pour $p \geq 2$
15	$F_{2p+1}^{15} = 36+(p-3)\times 17$ pour $p \geq 3$

Figure 10 : Formules F_n^k *pour* $k \geq 5$

Ainsi, peut-on émettre les conjectures suivantes :

Valeurs de F_n^k
lorsque k est impair et $k > 3$ (C_3)

k	F_{2p}^k
$4l+1$	$F_{2p}^k = a_k + 2E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$
$4l+3$	$F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$
k	F_{2p+1}^k
$4l+1$	$F_{2p+1}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)+1\right](k+2)$
$4l+3$	$F_{2p+1}^k = a_k + k - 2E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$

2.3.2 – Formules dans le cas où *k* est pair

2.3.2.1 – Rang de début de régularité

A partir du tableau initial des résultats expérimentaux ou simulés

k	4	6	8	10	12	14	16	18
$E\left(\frac{k}{2}\right)$	2	3	4	5	6	7	8	9
n'	1	2	3	4	5	6	7	8

Figure 11 : valeurs de début de régularité

Face aux observations identiques à celles proposées précédemment dans la section 2.3.1.1, nous proposons comme valeur de départ : $n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1$.

Pour k impair et $k > 3$

$$n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1 \quad (C_1')$$

2.3.2.2 – Valeur de début de régularité

Soit a_k la valeur de début au rang n', on obtient de même qu'en section 2 – 3 - 1 :

k	4	6	8	10	12	14	16	18
a_k	3	5	10	14	21	27	36	
	3×1	5×1	5×2	7×2	7×3	9×3	9×4	11×4
$k+1$	5	7	9	11	13	15	17	19
$E\left(\frac{k}{4}\right)$	1	1	2	2	3	3	4	4

Figure 12 : Décomposition de a_k

Alors, on peut proposer comme valeur a_k de début : $a_k = \left[k + 1 - 2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$.

Pour k pair et $k > 3$

$$a_k = \left[k + 1 - 2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right) \quad (C_2')$$

2.3.2.3 – F_n^k selon le saut k et la parité

Par exemple pour $k = 6$ on a F_n^6,

n	F_n^6
0	1
1	3
2	5
3	10
4	13
5	18
6	21
7	26
8	29
9	34

	n pair ($n = 2p$)	n impair ($n = 2p+1$)
valeur de début	5	10
augmentation	+8	+8
p	≥ 2	≥ 1

si $n = 2p$ alors $F_n^6 = 5 + (p-1) \times 8$

si $n = 2p+1$ alors $F_n^6 = 10 + (p-1) \times 8$

Il en est de même pour les autres sauts $k \geq 4$:

k	F_{2p}^k
4	$F_{2p}^4 = 5 + (p-1) \times 6$ pour $p \geq 1$
6	$F_{2p}^6 = 5 + (p-1) \times 8$ pour $p \geq 1$
8	$F_{2p}^8 = 14 + (p-2) \times 10$ pour $p \geq 2$
10	$F_{2p}^{10} = 14 + (p-2) \times 12$ pour $p \geq 2$
12	$F_{2p}^{12} = 27 + (p-3) \times 14$ pour $p \geq 3$
14	$F_{2p}^{14} = 27 + (p-3) \times 16$ pour $p \geq 3$
16	$F_{2p}^{16} = 44 + (p-4) \times 18$ pour $p \geq 4$

k	F_{2p+1}^k
4	$F_{2p+1}^4 = 3 + (p-1) \times 6$ pour $p \geq 1$
6	$F_{2p+1}^6 = 10 + (p-1) \times 8$ pour $p \geq 1$
8	$F_{2p+1}^8 = 10 + (p-1) \times 10$ pour $p \geq 1$
10	$F_{2p+1}^{10} = 21 + (p-2) \times 12$ pour $p \geq 2$
12	$F_{2p+1}^{12} = 21 + (p-2) \times 14$ pour $p \geq 2$
14	$F_{2p+1}^{14} = 36 + (p-3) \times 16$ pour $p \geq 3$
16	$F_{2p+1}^{16} = 36 + (p-3) \times 18$ pour $p \geq 4$

Figure 15 : Formules F_n^k pour $k \geq 4$

Ainsi, peut-on émettre les conjectures suivantes :

Valeurs de F_n^k
lorsque k est pair et $k > 3$ $\quad (C_3')$

k	F_{2p}^k
$4l$	$F_{2p}^k = a_k + 2\left(\frac{k}{4}\right) + \left(p - \frac{k}{4} + 1\right)(k+2)$ (3)
$4l+2$	$F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$
k	F_{2p+1}^k
$4l$	$F_{2p+1}^k = a_k + \left(p - \frac{k}{4} + 1\right)(k+2)$
$4l+2$	$F_{2p+1}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$ (4)

2.3.3 – Reconstruction du tableau de valeurs

Nous avons alors cherché à reconstituer le tableau de résultats sous la forme d'un tableur

2.3.3.1 – Synthèse générale des conjectures

On considère le mode de propagation où le porteur initial de la rumeur se déplace d'un saut de valeur *k*. Le nombre de personnes informées de la rumeur est déterminé par *k* et l'étape *n*, donnant ainsi un nombre F_n^k de personnes informées.
Pour les valeurs des sauts compris entre 0 et 3, le nombre de personnes informées est établi par des contraintes concrètes en raison de l'irrégularité et l'hétérogénéité des valeurs.

- Le rang de début *n'* de régularité dans la propagation à saut *k* est : $n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1$.

Pour la propagation à saut *k* impair, $k > 3$

- La valeur de début de régularité, noté a_k, s'écrit : $a_k = \left[k - 2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$.
- La valeur du nombre de personnes informées F_n^k selon le saut *k* et l'étape *n* s'écrit :

Si $k = 4l + 1$, pour $l \geq 0$

$$\begin{cases} F_{2p}^k = a_k + 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ pair} \\ F_{2p+1}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Si $k = 4l + 3$, pour $l \geq 1$

$$\begin{cases} F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ pair} \\ F_{2p+1}^k = a_k + k - 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Pour la propagation à saut *k* pair $k > 3$

- La valeur a_k de début de régularité se note : $a_k = \left[k + 1 - 2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$.
- F_n^k déterminé selon le saut *k* et l'étape *n* a pour valeurs :

Si $k = 4l$, pour $l \geq 1$

$$\begin{cases} F_{2p}^k = a_k + 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ pair} \\ F_{2p+1}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

Sinon, si $k = 4l + 2$, pour $l \geq 1$

$$\begin{cases} F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ pair} \\ F_{2p+1}^k = a_k + k + 1 - 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

2.3.3.2 – Reconstruction du tableau

Pour des contraintes édictées précédemment en section 2.3, on imposera les valeurs pour les sauts *k* compris entre 0 et 3 après les avoir déterminés selon deux procédés. Pour *k* compris entre 0 et 2, il faut appliquer les formules de propagation pépère ; pour *k* = 3, on remarque alternativement une augmentation de 2 et de 3 : il est alors établi que

pour $p \geq 1$, $F_{2p}^3 = 5 + 5 \times (p - 1)$

et pour $p \geq 0$, $F_{2p+1}^3 = 3 + 5 \times p$.

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1							
1	3	3	3	3							
2	5	5	5	5							
3	7	7	7	8							
4	9	9	9	10							
5	11	11	11	13							
6	13	13	13	15							
7	15	15	15	18							
8	17	17	17	20							
9	19	19	19	23							
10	21	21	21	25							
11	23	23	23	28							
12	25	25	25	30							
13	27	27	27	33							
14	29	29	29	35							
15	31	31	31	38							
16	33	33	33	40							
...											

Figure 16 : Remplissage des premières colonnes

Pour continuer à remplir le tableau il est nécessaire d'imposer aussi les valeurs précédant a_k ainsi que a_k.

On constate que tous les débuts de propagation sont semblables jusqu'à la première rencontre de deux cônes de propagation qui se situe au niveau n', d'où pour $k' \geq k$, $F_{n'}^{k'} = F_{n'}^k$ pour toute valeur de *n'*.

Ainsi, avec les formules des valeurs a_k en *k* pair ou impair et selon la valeur de l'étape de début *n'*, on obtient le tableau suivant. On fera une recopie horizontale à partir des premières cellules déterminées par les formules (cases colorées en rouge foncé).

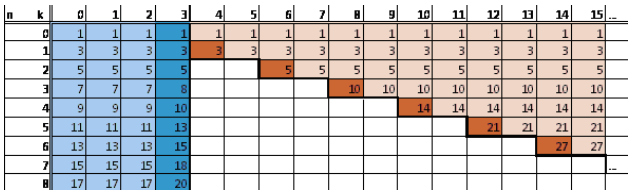


Figure 17 : Remplissage des débuts de colonnes

Enfin, l'ultime étape de construction exige l'insertion des formules de F_n^k selon la parité ou l'imparité des sauts k et des étapes n en effectuant un glissé vertical alternatif selon les formules.

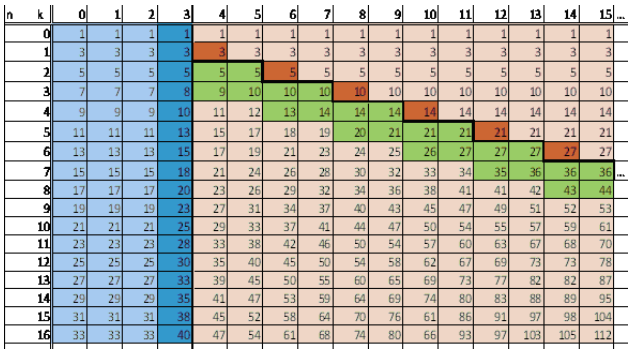


Figure 18 : Remplissage du reste du tableau

Après vérification, les résultats de l'exploitation des conjectures sont cohérents avec le comptage manuel effectué et le programme informatique : nous obtenons un tableau à l'identique du tableau initial.

2.4 – Variantes (conjecture sur les relations entre les a_k)

En observant le tableau initial et en le prolongeant avec les résultats précédents, en particulier les cases en rouge, on est amené à faire des observations nouvelles.

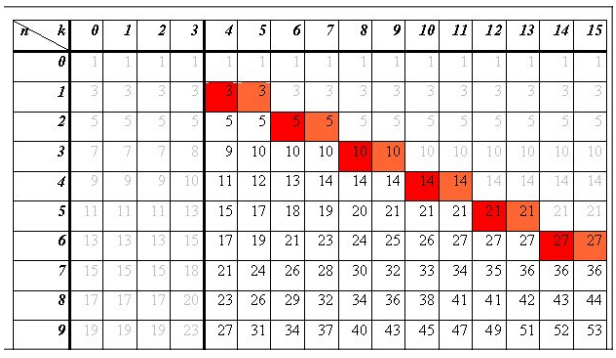


Figure 19 : Observations de résultats particuliers

2.4.1 – Observations

Dans le tableau initial des résultats on a relevé les résultats suivants :

n pair	n impair
$F_2^6 = F_1^4 + 2$	$F_3^8 = F_2^6 + 5$
$F_4^{10} = F_3^8 + 4$	$F_5^{12} = F_4^{10} + 7$
$F_6^{14} = F_5^{12} + 6$	$F_7^{16} = F_6^{14} + 9$

Figure 20 : Observations initiales

2.4.2 – Conjectures (C_4)

n pair	n impair
pour $n \geq 2$, $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n$	pour $n \geq 3$, $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n + 2$

2.4.3 – Démonstrations

2.4.3.1 Cas où *n* est pair

Dans le cas où n est pair ($n = 2p$) on a alors $F_n^{2n+2} = F_{2p}^{4p+2}$.

En se référant à la section 2.3.1 avec $k = 4p+2$ et n pair, $F_n^{2n+2} = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k+2)$

avec $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$, or ici on a $k = 4p+2$, donc,

$$F_n^{2n+2} = a_{4p+2} + \left[p - E\left(\frac{4p+2}{4}\right)\right](4p+2+2)$$

or $E\left(\frac{4p+2}{4}\right) = p$ donc $F_n^{2n+2} = a_{4p+2}$

or lorsque k est pair on a conjecturé que $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$ donc

$$a_{4p+2} = \left[4p+2+1-2E\left(\frac{4p+2}{4}\right)\right] \times E\left(\frac{4p+2}{4}\right)$$

$$a_{4p+2} = [4p+3-2p] \times p = [2p+3] \times p.$$

Donc $F_n^{2n+2} = 2p^2 + 3p$ pour n = 2p

Par ailleurs $F_{n-1}^{2n} + n = F_{2(p-1)+1}^{4p} + 2p$.

On obtient de même avec $k = 4p$ et $n-1 = 2p-1$ impair,

$$F_{n-1}^{2n} + n = a_k + \left[p - 1 - \frac{k}{4} + 1\right] \times (k+2) + 2p$$

avec $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{k}{4}\right)$ or ici on a $k = 4p,$ donc,

$F_{n-1}^{2n} + n = a_{4p} + \left[p-1-\frac{4p}{4}+1\right](4p+2)+2p$

d'où $F_{n-1}^{2n} + n = a_{4p} + 2p$, or lorsque *k* est pair on a conjecturé que $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{k}{4}\right)$

d'où

$a_{4p} = \left[4p+1-2E\left(\frac{4p}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{4p}{4}\right)$

$a_{4p} = [4p+1-2p]\times p = [2p+1]\times p = 2p^2 + p$

or $F_{n-1}^{2n} + n = a_{4p} + 2p$

d'où $F_{n-1}^{2n} + n = 2p^2 + 3p$.

En admettant comme vraie la conjecture donnant a_k, il est ainsi démontré que $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n$ si $n \geq 2$.

De plus obtient-on ainsi une autre formule, bien plus simple, de a_k lorsque *k* est pair : $a_{4p+2} = 2p^2 + 3p$ lorsque $k = 4p+2$, $a_{4p} = 2p^2 + p$ lorsque $k = 4p$.

2.4.3.1 Cas où *n* est impair

Dans le cas où *n* est impair $(n = 2p+1)$ on a $F_n^{2n+2} = F_{2p+1}^{4p+4}$

Ici *n* est impair, et $k = 4p+4$ est un multiple de 4, d'où $F_n^{2n+2} = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)+1\right](k+2)$

avec $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{k}{4}\right)$ car *k* est pair : $k = 4p+4$, donc,

$F_n^{2n+2} = \left[4p+4+1-2E\left(\frac{4p+4}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{4p+4}{4}\right)$

$+\left[p - E\left(\frac{4p+4}{4}\right)+1\right](4p+4)$

$F_n^{2n+2} = [4p+5-2(p+1)]\times(p+1)$

$+[p-(p+1)+1](4p+4)$ (6)

$F_n^{2n+2} = [2p+3]\times(p+1)$

donc $F_n^{2n+2} = 2p^2+5p+3$

Par ailleurs $F_{n-1}^{2n} + n + 2 = F_{2p}^{4p+2} + 2p + 3$, or ici $n-1$ est pair et $k = 4p+2$,

$F_{n-1}^{2n} + n + 2 = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2) + 2p + 3$

avec $a_k = \left[k+1-2E\left(\frac{k}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{k}{4}\right)$ car *k* est pair : $k = 4p+2$, donc,

$F_{n-1}^{2n} + n + 2 = \left[4p+3-2E\left(\frac{4p+2}{4}\right)\right]\times E\left(\frac{4p+2}{4}\right)$

$+\left[p - E\left(\frac{4p+2}{4}\right)\right](4p+4)+2p+3$

$F_{n-1}^{2n} + n + 2 = [4p+3-2p]\times p$

$+[p-p](4p+4)+2p+3$

$F_{n-1}^{2n} + n + 2 = [2p+3]\times p + 2p + 3$

donc $F_{n-1}^{2n} + n + 2 = 2p^2+5p+3$

En admettant comme vraie la conjecture donnant a_k ,il est ainsi démontré que $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n + 2$ si $n \geq 2$.

De plus obtient-on ainsi une autre formule, bien plus simple, de a_k lorsque *k* est pair : $a_{4p+4} = 2p^2+5p+3$ lorsque $k = 4p+4$, ce qui est donne bien $a_{4p} = 2p^2 + p$

$a_{4p+2} = 2p^2 + 3p$ lorsque $k = 4p+2$.

2.4.4 – Théorème

On vient donc de démontrer le théorème suivant : (*T*) (sous réserve d'avoir démontré les formules pour a_k)

n pair	*n* impair
pour $n \geq 2$, $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n$	pour $n \geq 3$, $F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n + 2$

3 – Propagation avec sauts de sens aléatoire

3.1 – Présentation du modèle

Après avoir étudié la propagation de rumeurs pépère et la propagation de rumeurs sans hasard, nous avons étudié comment une rumeur se propage avec l'utilisation du hasard, c'est-à-dire avec un saut de longueur fixe mais de sens aléatoire.

3.1.1 – Intervention du hasard

Le principe de propagation est différent de celui utilisé pour la propagation sans hasard. En effet, le contaminateur initial se déplace, avec un nombre de sauts, noté *k*, établi au départ, vers la gauche ou bien vers la droite.

Pour savoir de quel côté le sujet contaminateur se déplace, nous lançons une pièce de monnaie, si elle tombe sur face, nous allons vers la droite et si elle tombe sur pile, nous allons vers la gauche. C'est ce principe qui nous permet d'utiliser le hasard.

Nous avons ainsi réalisé un schéma simple pour illustrer cette nouvelle règle.

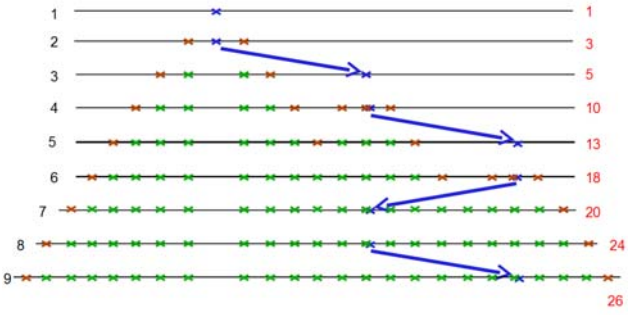


Figure 21 : Propagation avec sauts de longueur 6, de sens aléatoire

Nous avons symbolisé le déplacement du sujet contaminateur par une flèche bleue, les nouveaux contaminés par une croix rouge et les anciens par une croix verte.

Nous avons ensuite comptabilisé le nombre de contaminés à droite du schéma et inscrit le numéro de l'étape n à gauche.

Nous observons désormais l'utilisation du hasard car, au lieu de déplacer le sujet contaminateur toujours vers la droite ou toujours vers la gauche ici, il va, grâce à l'utilisation du hasard par la pièce, à droite, puis à droite, à gauche et retourne vers la droite.

3.1.2 – Mise en œuvre

Après avoir expliqué cette règle de propagation à l'aide d'un schéma, nous avons réalisé une dizaine de simulations de sauts *k* que nous avons répertoriées dans un tableau. Chaque simulation de longueur *k* donnée est constituée de 15 étapes. Nous avons regroupé, pour les observer, 10 simulations de sauts d'une même longueur.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons comptabilisé le nombre de personnes contaminées au fur et à mesure des étapes, donc du temps, ainsi que le sens que nous avons emprunté (c'est-à-dire si nous allions vers la droite ou vers la gauche).

Ce décompte nous a permis de comparer les résultats des simulations, le nombre de contaminés minimum, maximum, les différents changements de résultats en fonction du saut choisi … Ce moyen de comptage est donc plus pratique qu'un simple schéma qui n'est pas utilisable pour un nombre d'étapes et de simulations importants.

	1		2		3		4		5	
0	1		1		1		1		**1**	
1	3		3		3		3		**3**	
2	5	P	5	F	5	P	5	F	**5**	**F**
3	9		9		9		9		**9**	
4	11	P	11	F	11	F	11	P	**11**	**F**
5	13		15		13		13		**15**	
6	15	P	17	P	15	P	15	F	**17**	**P**
7	17		19		17		17		**19**	
8	19	F	21	F	19	F	19	F	**21**	**P**
9	21		23		21		21		**23**	
10	23	P	25	P	23	F	23	P	**25**	**F**
11	25		27		25		25		**27**	
12	27	P	29	P	27	F	27	F	**29**	**F**
13	29		31		29		29		**31**	
14	31	F	33	F	31	F	31	F	**33**	**P**
15	33		35		33		33		**35**	

Figure 22 : Tableau de 5 tests avec un sens de propagation aléatoire où k=4 et n=15

3.1.3 – Observation d'un exemple

Après la réalisation du schéma et du tableau, nous avons reporté, comme exemple, les résultats du 6^{ième} test dans un graphique où *n* est en abscisse. Le sens de lecture est différent puisque lorsque le sujet se déplace vers la droite, il se déplace sur le graphique dans les nombres positifs alors que s'il se déplace vers la gauche, il va vers les nombres négatifs.

Nous avons donc réalisé le tracé du sujet contaminateur d'après les résultats obtenus au

6ième test dans le tableau. Ainsi, le sujet va deux fois à droite, puis deux fois à gauche, deux fois à droite et une fois à gauche. Son trajet est représenté par le trait bleu.

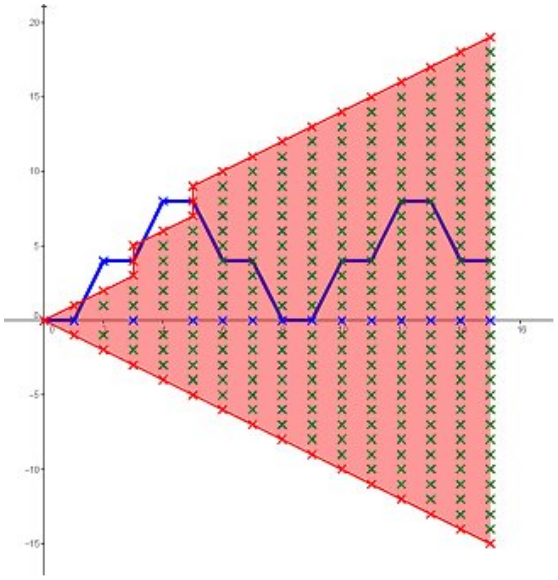


Figure 23 : *Déplacement du contaminateur en fonction des étapes avec k = 4* et *n* = 15

3.1.4 - Instants record

L'utilisation du graphique permet la mise en évidence de nouveaux phénomènes. Nous remarquons la présence de deux instants records.

Un *instant record* est le moment où la propagation pépère, représentée par un cône constitué des points en vert sur fond rouge, est dépassée par la propagation du sujet contaminateur. Le cône de propagation est alors élargi puisqu'il y a de nouveaux contaminés plus loin (sur la droite dans ce cas).

Nous avons remarqué qu'au fur et à mesure du temps, il y a de moins en moins d'instants records.

3.2 – Utilisation des probabilités

Nous nous sommes alors intéressés aux différents chemins possibles que le sujet propagateur ou contaminateur initial peut prendre.

3.2.1 – Nombre de chemins

On peut voir en rouge ci-dessous un chemin possible, que peut prendre le propagateur initial, parmi tous les chemins possibles en bleu.

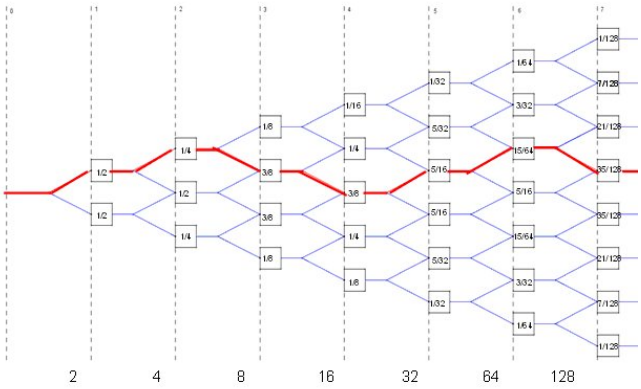


Figure 24 : Arbre et nombre de chemins possibles pour le propagateur initial

C'est le parcours étudié précédemment. A chaque fois que le contaminateur initial se trouve à une étape paire, il peut aller soit à gauche, soit à droite. A l'étape 2, il y a un chemin qui se divise en deux, ces deux nouveaux chemins vont à leur tour se diviser en deux pour porter le nombre de chemins, à l'étape 4, à 4, et ainsi de suite.

On peut trouver rapidement le nombre de chemins C_n pour toute étape n. Lorsque n est pair le nombre de chemins est doublé à la nouvelle étape.

Lorsque n est impair le nombre de chemins est conservé, puisque dans ce cas le contaminateur initial se déplace sur l'un des chemins créés précédemment.

On a ainsi $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 2$, $C_4 = 4 = 2^2$, $C_5 = C_4 = 4$, $C_6 = 2 \times C_5 = 2 \times C_4 = 2 \times 2^2 = 2^3$.

Par extension on conjecture $C_{2n} = 2^n$.

3.2.2 – Probabilités

Pour les étapes paires on pose $n = 2M$. Pour les probabilités, nous avons créés d'autres lignes imaginaires, nommées *G*, afin de pouvoir repérer ces probabilités.

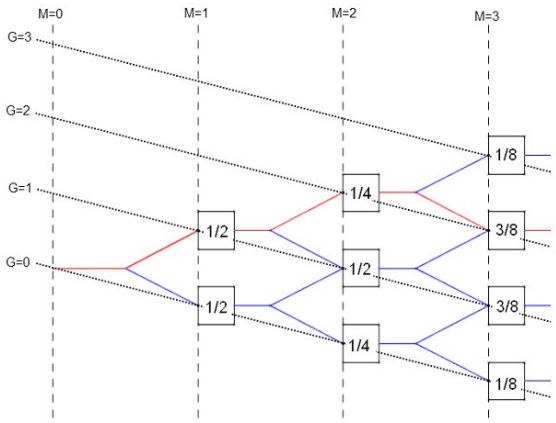


Figure 25 : Schéma pour le repérage des probabilités dans l'arbre

En chaque point (M,G) la probabilité est notée p_G^M.

Le propagateur initial part de façon certaine de (0;0) donc $p_0^0 = 1$.

Ensuite le chemin se sépare en deux avec une chance sur deux, à l'étape 2, c'est-à-dire pour $M = 1$ on a donc $p_0^1 = p_1^0 = 1/2$.

A l'étape 4, c'est-à-dire pour $M = 2$ on a $p_2^2 = p_2^0 = 1/4$ puisqu'il n'y a qu'un chemin qui va en (2;0) ou en (2;2) sur les quatre qui mènent à $M = 2$.

Pour (2;1), il y a deux chemins sur quatre qui y vont donc $p_1^2 = 1/2$, on retrouve ce résultat par le calcul suivant : $p_1^2 = \frac{1}{2}\times p_1^1 + \frac{1}{2}\times p_0^1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. On peut vérifier ensuite pour la probabilité d'arriver en (3;2) :

$p_2^3 = \frac{1}{2}\times p_2^2 + \frac{1}{2}\times p_1^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}+\frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

sur le schéma on vérifie qu'il y a bien 3 chemins sur les 8 qui mènent à ce point.

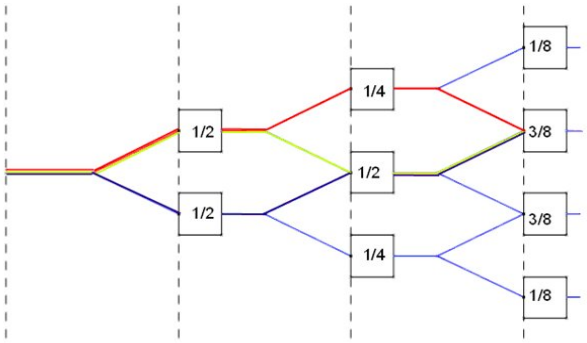


Figure 26 : Visualisation des 3 chemins menant au point (3;2)

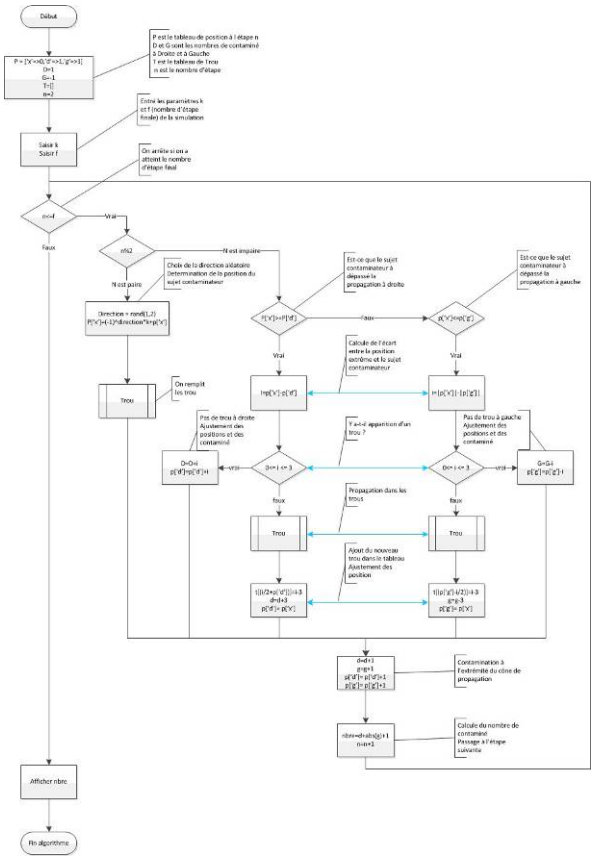
Il reste à généraliser.

3.3 Vitesse de propagation de la rumeur :

Pour faciliter le travail d'observations des résultats et pour obtenir des résultats avec des plus grands nombres nous avons créés deux algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard

3.3.1 – Algorithmes

Afin d'étudier l'influence des instants records sur la vitesse de propagation de la rumeur, nous avons créé deux algorithmes ci-dessous, permettant de simuler des propagations en faisant varier *k*.



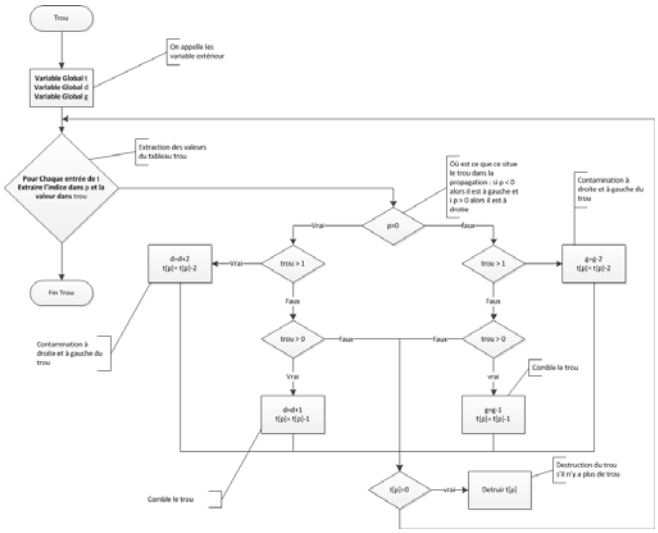


Figure 27 : Algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard du propagateur initial (reporté agrandi en annexe) (7) *et (8)*

3.3.2 – Observation de résultats

Puis nous l'avons implanté sur ordinateur sous la forme d'un programme et nous avons effectué plusieurs simulations afin d'observer l'influence des paramètres.

Un exemple de schéma obtenu est donné ci-dessous :

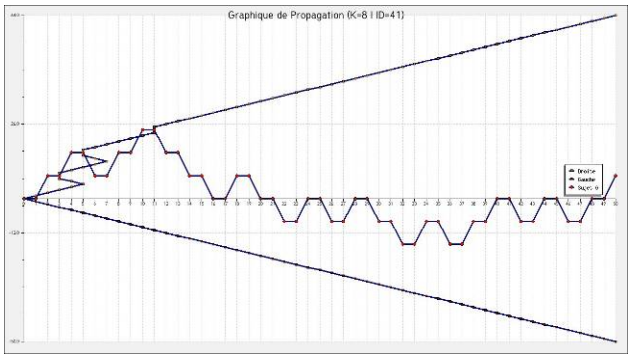


Figure 28 : Exemple de déplacement au hasard simulé

A la suite de l'élaboration du programme, nous avons simulé plusieurs propagations avec différentes valeurs du paramètre *k*.

Afin de mieux analyser les résultats, nous avons synthétisé les différents graphiques sous la forme de nuages de points, avec en abscisse *n*, et en ordonnée F_n^k, comme sur la figure ci-dessous :

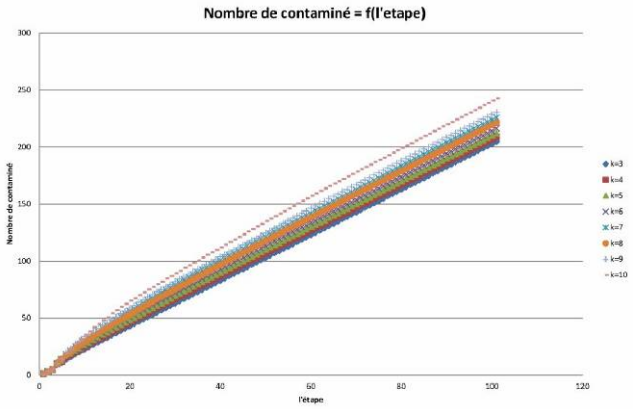


Figure 29 : F_n^k en fonction de n, selon plusieurs valeurs de k

Nous avons observé que ces courbes semblaient pouvoir être approchées par des droites.

3.3.3 – Importance de la vitesse

Nous nous sommes intéressés à la vitesse de propagation : $v(n,k)$.

Le graphique ci-contre, traduit la vitesse de propagation en fonction de *n* et pour certaines valeurs de *k*.

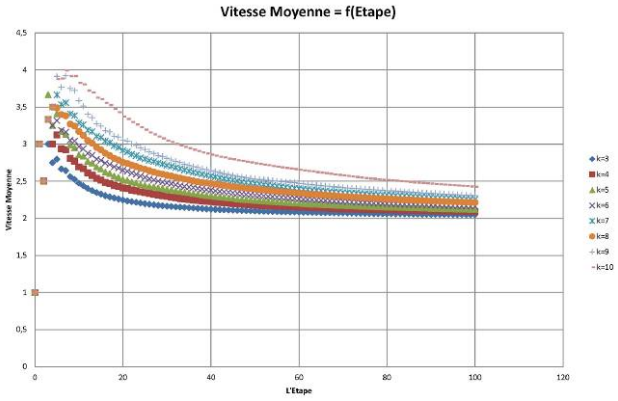


Figure 30 : Vitesse de propagation en fonction de n et de k

On remarque que plus *k* est grand, plus la convergence est « lente ». Néanmoins, lorsque le nombre d'étapes est faible, on remarque aussi un pic avec une amplitude d'autant plus grande que *k* est grand.
Ce résultat explique la modélisation de la courbe du nombre de contaminés par une droite : la vitesse de propagation converge rapidement vers 2 ce qui donne l'impression d'une droite.
Pourquoi ce phénomène se produit-il ?

3.3.4 – Instants record

Lorsque le sujet contaminateur se déplace sur la ligne et dépasse une borne de la propagation, on appelle ce point, un *instant record*.

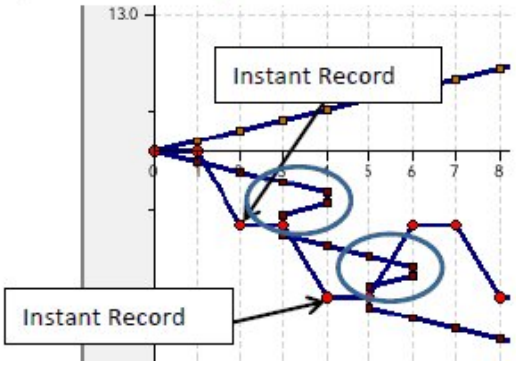


Figure 31 : Obtention d'instants records

Sur la figure, on remarque que le sujet contaminateur a dépassé une borne de la propagation à 2 instants, il y a donc 2 instants records. Ces instants sont à l'origine des trous dans la propagation (bulle bleue).

Sur cet extrait de graphique, on remarque qu'il y a 4 déplacements dont 2 sont des instants records. Statistiquement parlant, la fréquence pour qu'un instant record apparaisse est très forte au début de la propagation : elle est même sûre pour le premier déplacement dès que $k \geq 5$. Plus on avance dans la propagation, plus le nombre d'étapes est grand, plus la fréquence d'un instant record est faible.

Figure 32 : Répartition des instants records

Le graphique ci-dessus, illustre cette notion de fréquence.

Au début de la propagation (à gauche du graphique dans le cadre rouge) on remarque qu'il y a beaucoup d'instants records : sur ce graphique il y 12 instants records sur 36 déplacements, la fréquence d'apparition des instants records dans le cadre rouge est environ de 33 %.

Si on avance dans le graphique, on constate que le sujet contaminateur se déplace dans le cône de propagation, il n'y a pas d'instant record. On remarque que d'autres instants records se produisent au niveau du cadre orange : il y a 7 instants records sur 70 déplacements soit une fréquence locale de 10% (à l'intérieur du cadre orange).

De manière générale, il y a eu 20 instants records sur 180 déplacements soit une fréquence de 11% environ. On remarque bien que la fréquence diminue au fur et à mesure que la propagation avance.

Dans le cadre vert, il n'y a pas d'instants record : le sujet contaminateur se déplace dans le cône de propagation. Donc au final dans ce graphique, la fréquence d'apparition d'un instant record est d'environ seulement 2%.

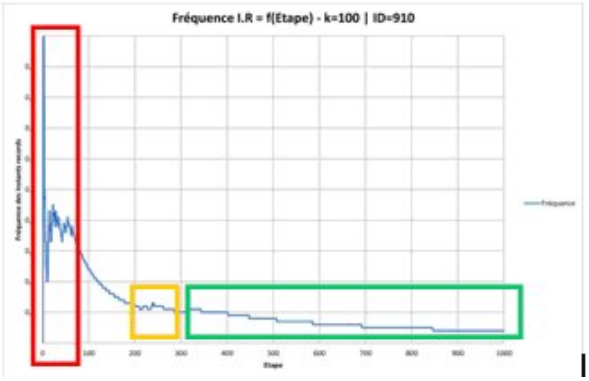


Figure 33 - Fréquence d'apparition des instants records en fonction de n

Dans le graphique on voit bien que cette fréquence d'apparition f est assez élevée, avec, $f \in [0{,}3;1]$ dans le cadre rouge qui se situe au début de la propagation.

Plus la propagation avance, plus la fréquence diminue : dans le cadre orange on a $f \in [0{,}1;0{,}3]$.

Dans le cadre vert on a seulement $f \in [0;0{,}1]$.

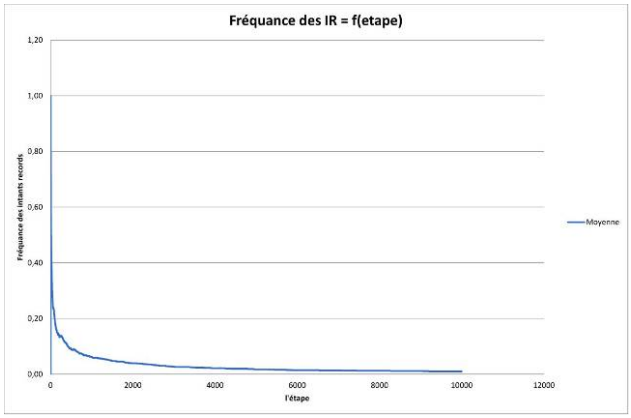


Figure 34 : Fréquence d'apparition des instants records en fonction de n

Au final, on constate bien que la fréquence d'apparition des instants record converge vers 0, et donc qu'elle a de moins en moins d'influence sur la vitesse de propagation.

3.3.5 – Instants records et sauts

Comment la fréquence d'apparition des instants records est liée avec *k* et quel est son impact sur la vitesse ?

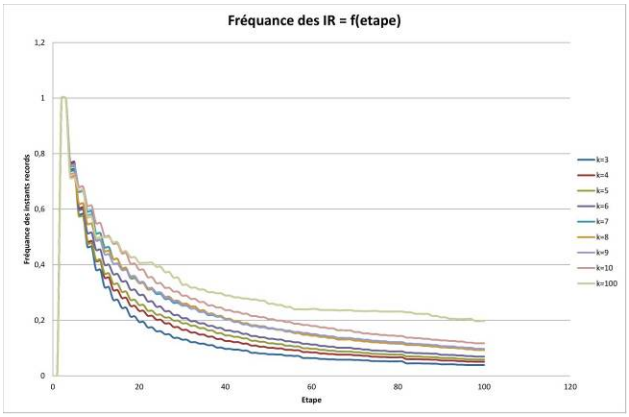


Figure 35 : Fréquence des instants record et valeurs de k

Ce graphique ci-dessus est en lien direct avec un précédent car il représente l'évaluation des instants records en fonction de *n* et de *k*. On voit que plus *k* est grand, plus la fréquence est élevée, néanmoins on remarque aussi la convergence de la fréquence vers 0.

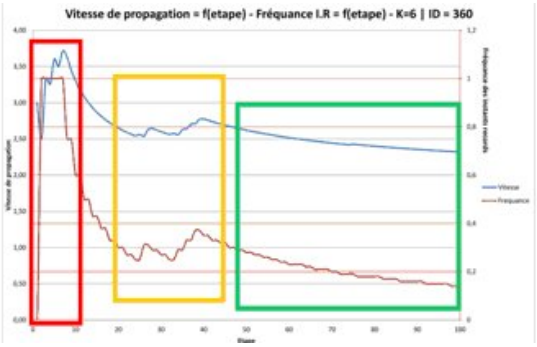


Figure 36 : Pour $k = 6$ corrélation entre vitesse et fréquence

Ici on voit l'influence qu'ont les instants records sur la vitesse de propagation : dès de la fréquence de leur apparition augmente, la vitesse augmente, et lorsque celle-ci diminue, la vitesse diminue.

Figure 37 : Nombre de contaminés en fonction du nombre d'étapes

On peut en conclure que la vitesse de propagation est fonction de la probabilité d'apparition des instants records.

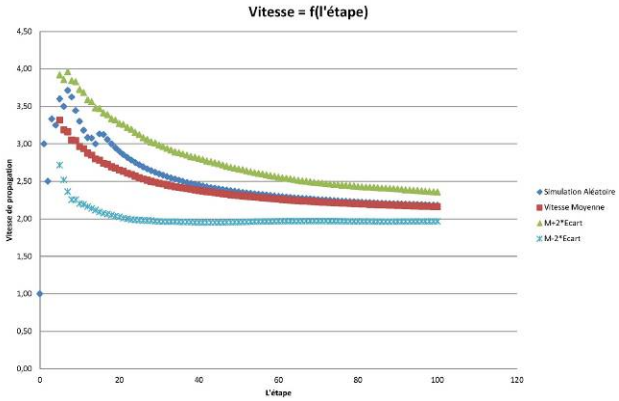


Figure 38 : Répartition des vitesses

Le graphique ci-dessus montre la répartition de la vitesse au sein d'un échantillon. La courbe rouge représente la moyenne de cet échantillon encadré par +/- 2 écarts type *e* (courbes bleu clair et verte). La courbe bleu foncé représente une simulation
On constate que l'écart qu'il y a entre $m+2e$ et $m-2e$ diminue au fil des étapes pour converger vers 0.
En bleu est la courbe représentative d'une simulation. On remarque que sa vitesse oscille dans l'intervalle $[m-2e;m+2e]$ pour se rapprocher de la limite lorsque le nombre d'étapes augmente.

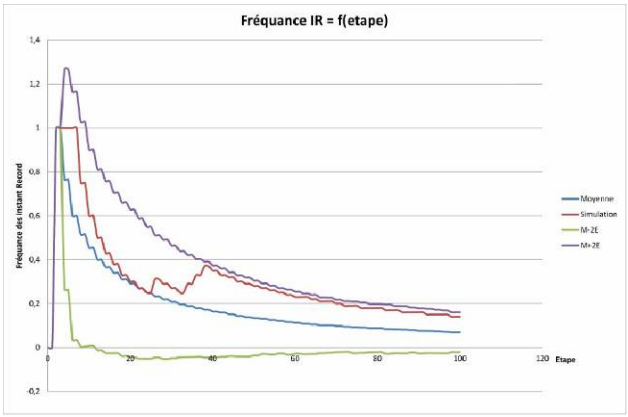


Figure 39 : Fréquence des instants records et vitesse

Dans le graphique au dessus, on remarque que la fréquence des instants records se répartit comme la vitesse, ainsi qu'une convergence vers 0.

3.3.6 – Conclusion

Au final, la vitesse de propagation est fonction de la fréquence d'apparition des instants records. Ces derniers sont eux-mêmes fonctions des paramètres *k* et *n*. Ainsi donc, les paramètres influant sur la propagation d'une rumeur sur une droite avec saut aléatoire sont la longueur du saut *k*, et l'étape *n* où on se situe.
On peut ainsi conclure que, quel que soit le sens que le sujet contaminateur va suivre :
- au début il y a une forte probabilité d'aller au-delà des contaminés par la rumeur pépère,
- mais à la fin, il ne pourra presque jamais se déplacer au delà des contaminés par la propagation pépère de la rumeur, car la probabilité d'instants records devient nulle lorsque le nombre d'étapes est très grand.

Le meilleur moyen de contaminer le plus de gens en très peu de temps et d'avoir un ou plusieurs sauts très grands au début, et ensuite de laisser la rumeur pépère faire le reste.

Notes d'édition

(1) Il s'agit d'un programme qui a permis de réaliser le tableau de la figure 3

(2) a_k est la valeur de début de régularité

(3) cette formule semble inexacte (par exemple non vérifiée pour k = 4, et p = 4) ce serait plutôt :

$$F_{2p}^{k} = a_k + 2\left(\frac{k}{4}\right) + \left(p - \frac{k}{4}\right)(k+2)$$

(4) cette formule semble inexacte, ce serait plutôt :

$$F_{2p+1}^{k} = a_k + k + 1 - 2\times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right]\times(k+2) \text{ si } n \text{ impair}$$

(5) erreur aussi dans la formule donnant F_{2p}^{k}
Il faut supprimer le terme (+1) à l'intérieur des crochets.

(6) on est dans le cas $k = 4p + 4$ donc le terme entre parenthèses (k+2) devient $4p + 6$.
Le résultat final est exact.

Les notes (7) et (8) se rapportent aux algos des figures 27 reproduites en annexe pages 16 et 17

(7) Algo 1 figure 27 (annexe page 16)

(a) ici, plus formellement, P et T ne sont pas des tableaux mais des dictionnaires : ils associent à une «clé» une «valeur». Un dictionnaire peut donc par exemple fournir des valeurs pour les clés {1,2,7,9} sans pour autant contenir de valeur associée à la clé 5. Dans un dictionnaire, les clés ne sont également pas nécessairement des entiers, et peuvent par exemple être des mots. Par comparaison, un tableau a une taille n, et fournit une valeur à chaque entier compris entre 0 et n-1 (ou entre 1 et n dans certains langages de programmation). De plus, la valeur d la variable «nbre» affichée à la fin n'est pas initialisée. Elle devrait valoir 1.

(b) il manque ici un fil d'exécution, pour décrire le cas où le test p['x']≤p['g'] est faux. Dans ce cas, le propagateur a bougé, mais se trouve à l'intérieur du cône de propagation. L'exécution devrait donc remplir les trous, puis rejoindre le reste des calculs au niveau de la boîte indiquée en (c).

(c) d'après la propagation choisie, la propagation à gauche devrait être faite en nombres négatifs, et donc il devrait plutôt y avoir g = g-1 et p['g'] = p['g']-1 dans cette boîte.

(8) Algo 2 figure 27 (annexe page 17)

(a) les variables globales devraient plutôt être en majuscule : T, D et G

(b1) et (b2) Attention, ici la flèche marquée (b1) ne signifie pas qu'une nouvelle boucle décrite par la boîte (b2) est lancée, mais que l'exécution passe à l'itération suivante de la boîte (b2).

(c) il manque un fil d'exécution après avoir détruit le trou t[p]. Une ligne devrait sortir de cette boîte pour rejoindre la flèche marquée (b1).

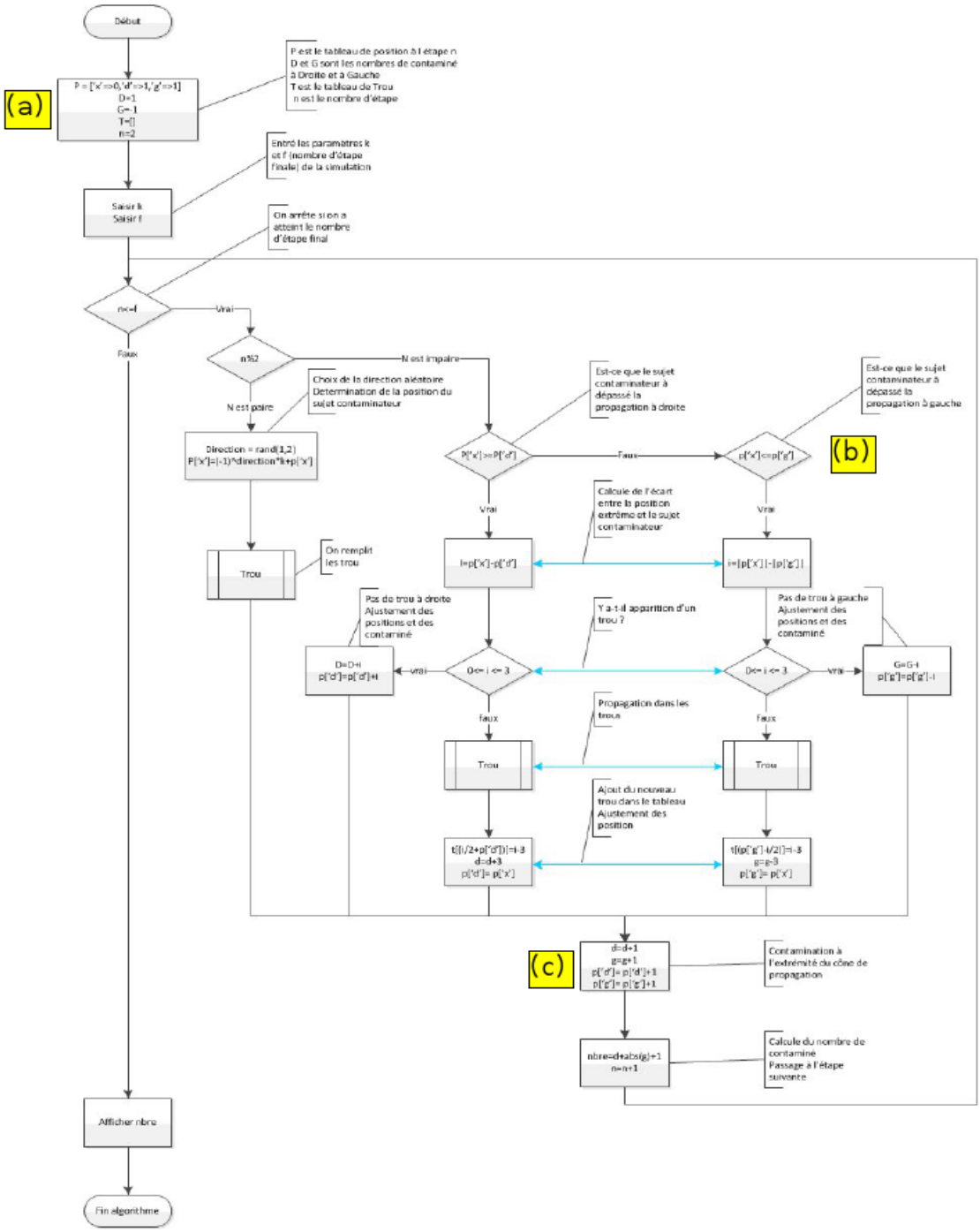


Figure 27 : Algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard du propagateur initial

Algo 2

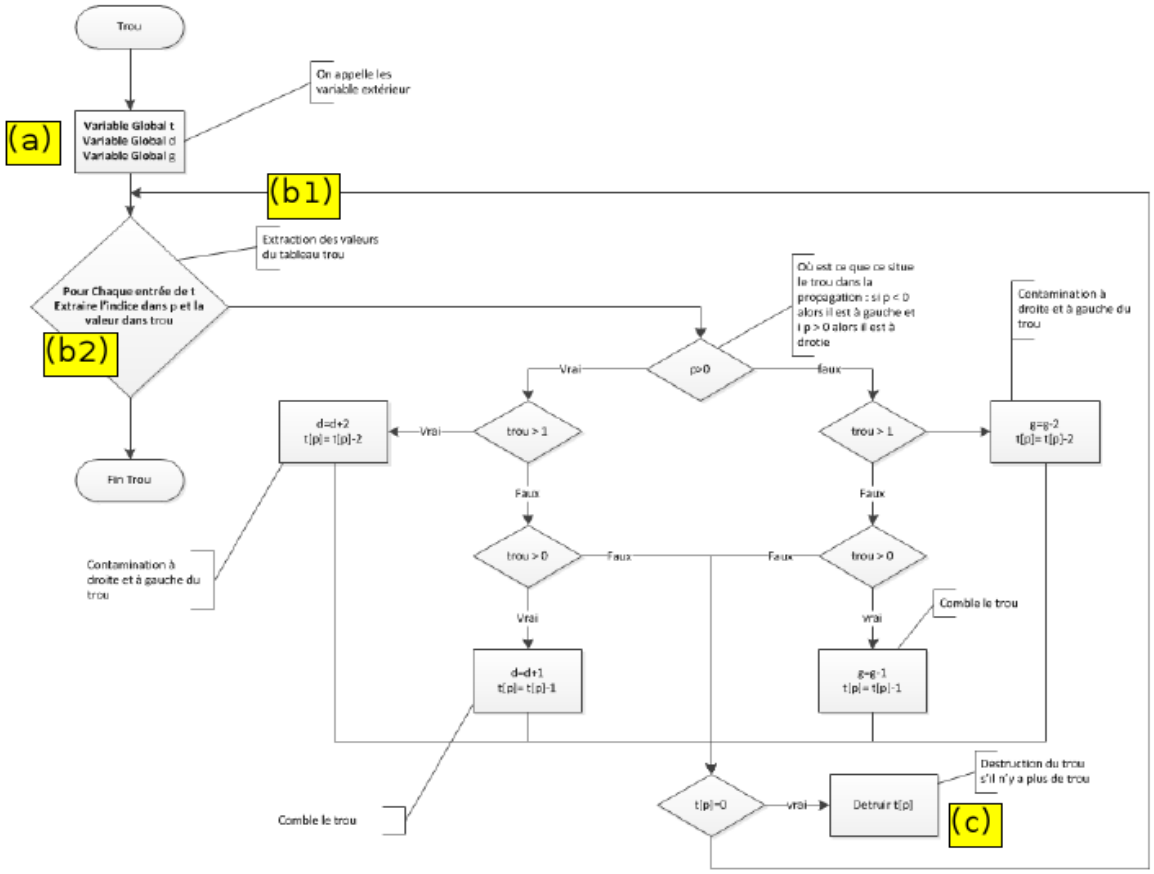


Figure 27 : Algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard du propagateur initial

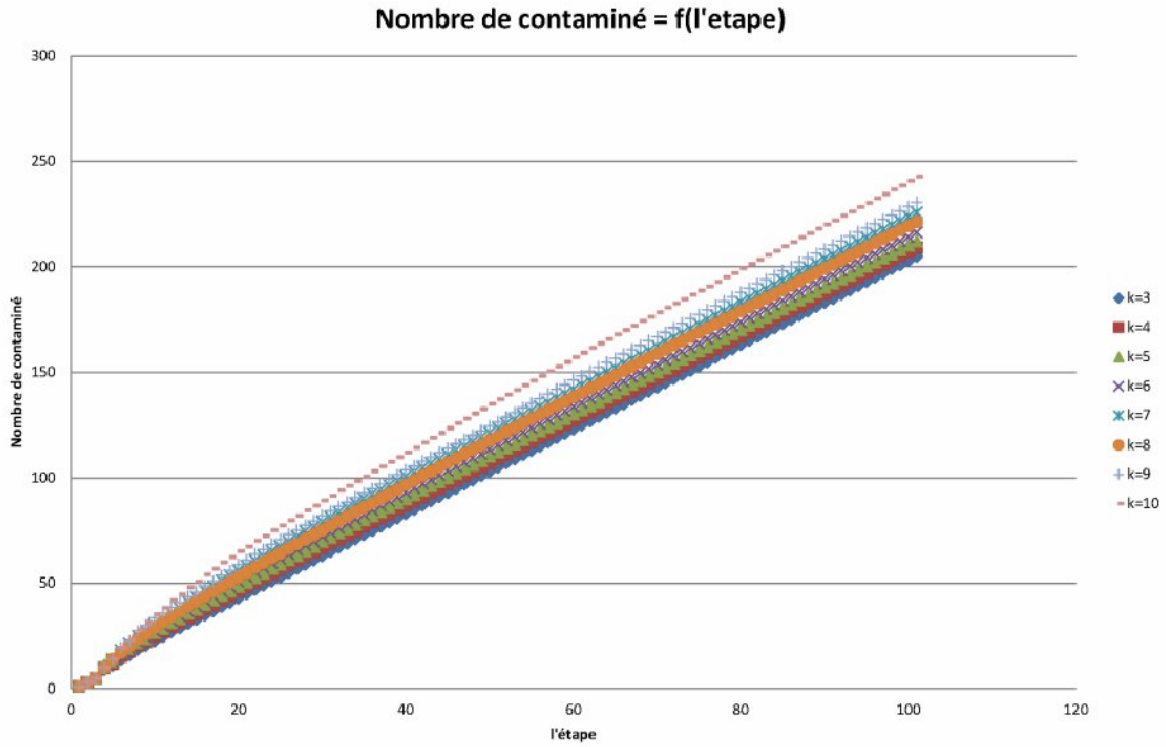


Figure 29 : Fn en fonction de n, selon plusieurs valeurs de k