

Projet Autoroute

Année 2014 - 2015

Élèves : Mélissa VASSET, Clément HOUAMRIA, Théo QUILLET, Killian MEKHAREFF, Baptiste TIOUX, 6ème

Etablissement : Collège Pierre de Coubertin, Le Luc, Var

Professeure : Nelly SIMOND

Chercheur : Thierry CHAMPION, université Toulon Var (UTV)

Explication du sujet:

Nous devons placer une autoroute le plus proche possible de plusieurs villes. Ainsi, la consommation de carburant est minimale ainsi que les émissions de dioxyde de carbone. De plus, nous construisons les accès les plus petits possibles pour polluer le moins possible.

Notre résultat :

Nous sommes parvenus au résultat suivant. Lorsqu'il y a 3 villes, l'autoroute doit passer par deux des villes. Pour choisir lesquelles, on trace le triangle formé par ces trois villes.

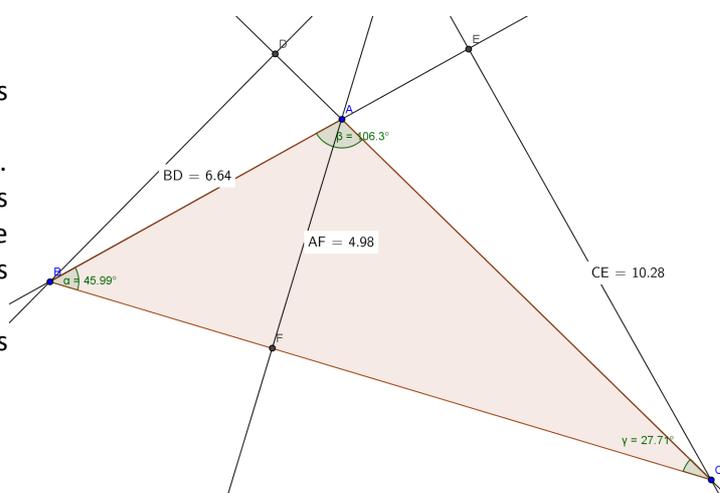
On compare les angles du triangle et l'autoroute doit passer par les villes où les angles sont les plus petits.

Exemple :

Dans cet exemple, les villes ont été représentées par les points A, B et C.

Nous avons mesuré les angles du triangle formé. Nous avons tracé les perpendiculaires aux côtés passant par le sommet opposé, ce qu'on appelle des hauteurs. Et nous avons mesuré les distances.

Nous expliquons pourquoi nous avons tracé les perpendiculaires dans nos recherches.



Voici nos recherches :

Pour faciliter le travail, nous avons schématisé les villes par des points et l'autoroute par une droite.

Avec deux points

Début de recherche : au début nous avons commencé avec un crayon à papier.

Notre première idée fut la médiatrice. Les villes étaient à égale distance mais pas plus proches de l'autoroute.

Nous nous sommes rendus compte que si l'autoroute passait par les deux villes, il n'y avait pas d'accès à construire.

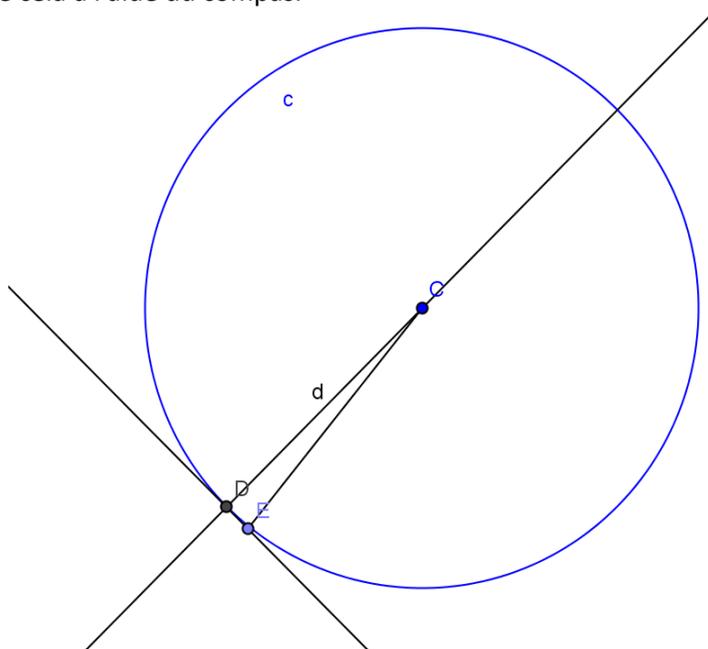
Résultat :

avec deux villes, il suffit de construire l'autoroute passant par ces villes.

Avec trois points

Remarque: Le chemin le plus court entre un point et une droite est la perpendiculaire à cette droite qui passe par ce point. (1)

Nous avons remarqué cela à l'aide du compas.



Si nous nous éloignons de ce point D en restant sur la droite, l'écartement avec le compas est plus grand. On dit que le cercle et la droite sont tangents. Ils n'ont qu'un seul point commun.

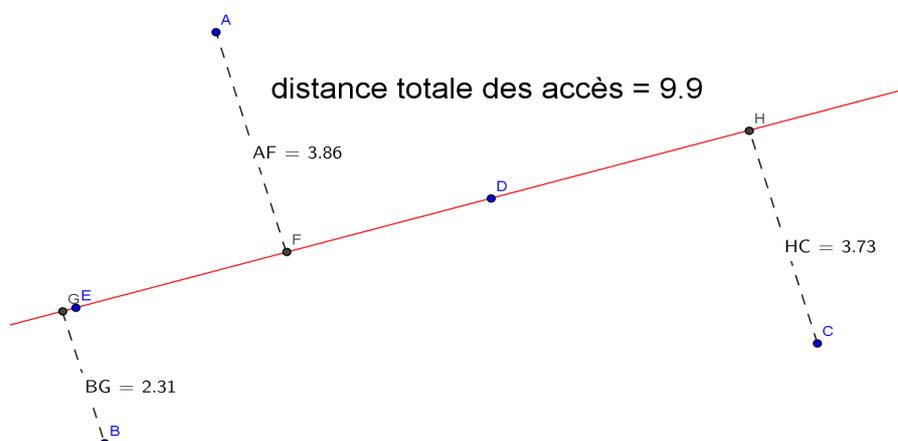
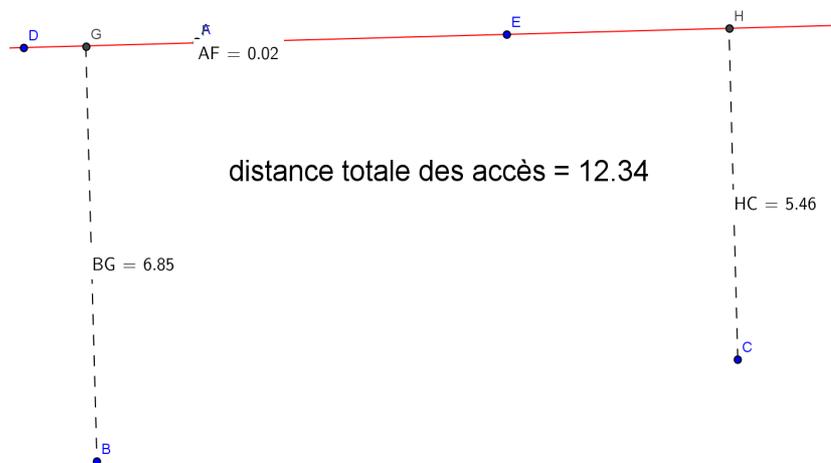
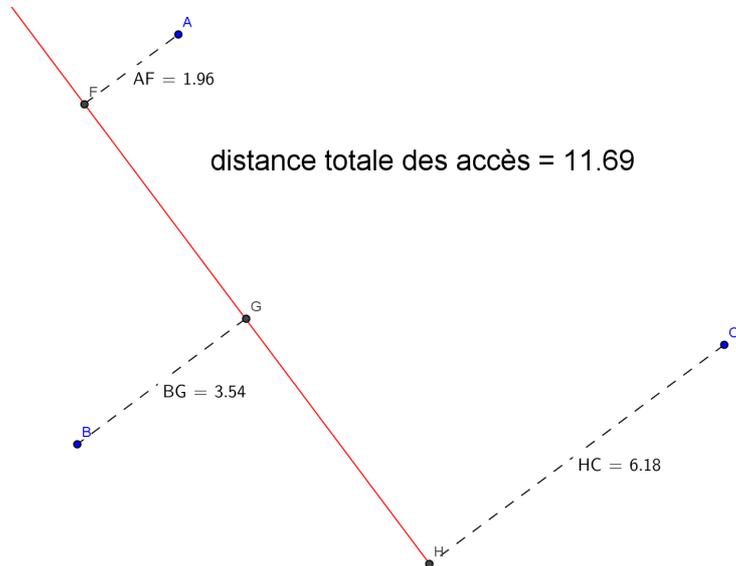
Pour la suite, la recherche papier avait un gros inconvénient, en effet, il fallait refaire des figures identiques un grand nombre de fois pour pouvoir comparer. Nous avons alors utilisé le logiciel GeoGebra.

Suite des recherches : utilisation de GeoGebra

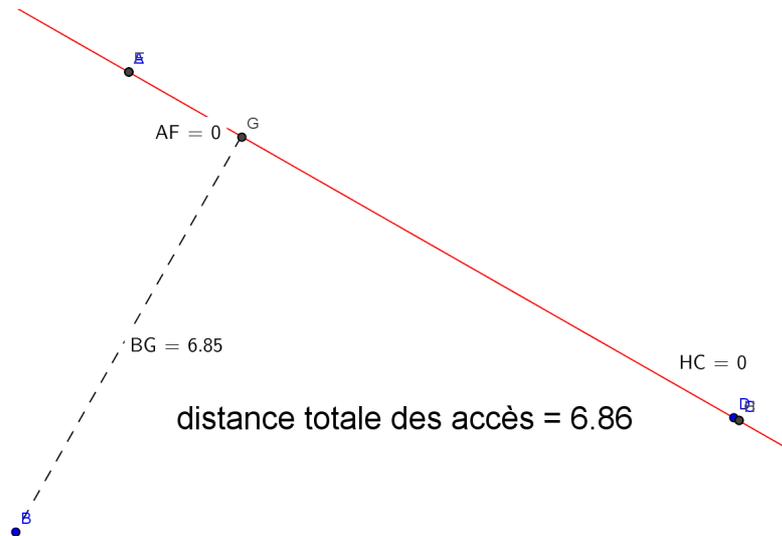
Avec GeoGebra, nous avons construit trois points qui représentent les villes, puis une droite pour l'autoroute. Nous avons ensuite tracé les perpendiculaires à l'autoroute passant par les villes qui représentent les accès. (2)

Puis nous avons mesuré les longueurs des accès et nous les avons additionnées.
 Nous avons ensuite déplacé la droite pour essayer d'avoir une longueur d'accès totale la plus petite possible.
 Assez rapidement, nous avons pensé qu'il fallait que la droite passe par l'intérieur du triangle.

Voici quelques exemples :



La position minimale qu'on a trouvé :



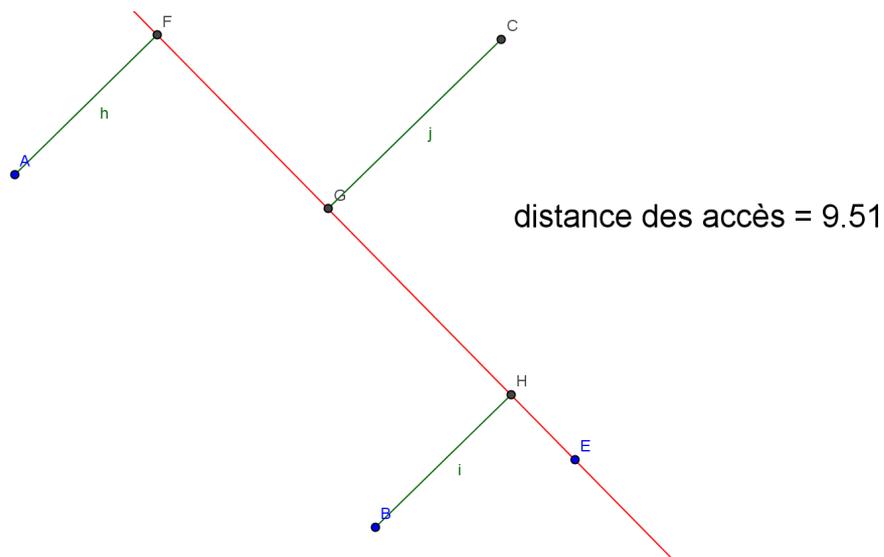
Ici, la droite passe par A et C.

Résultat : Il semblerait que l'autoroute doit passer par deux des villes.

Une autre question est soulevée : Par quelles villes doit elle passer ?

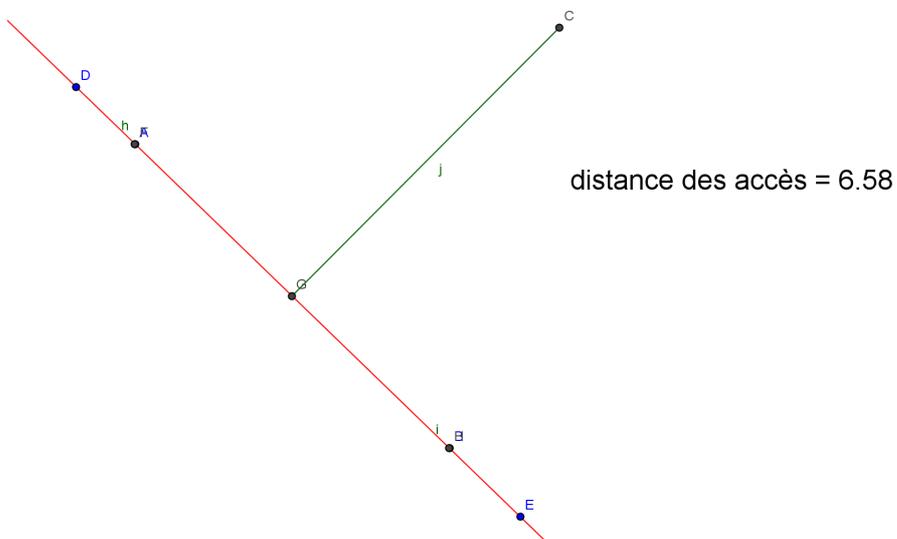
Il est difficile d'en être sûrs. Nous décidons donc d'essayer avec des villes qui forment un triangle particulier. Nous commençons par le triangle équilatéral.

Sur les figures ci-dessous, ABC sont nos villes, F, G et H sont les points d'intersections entre l'autoroute (rouge) et la perpendiculaire passant par les villes.

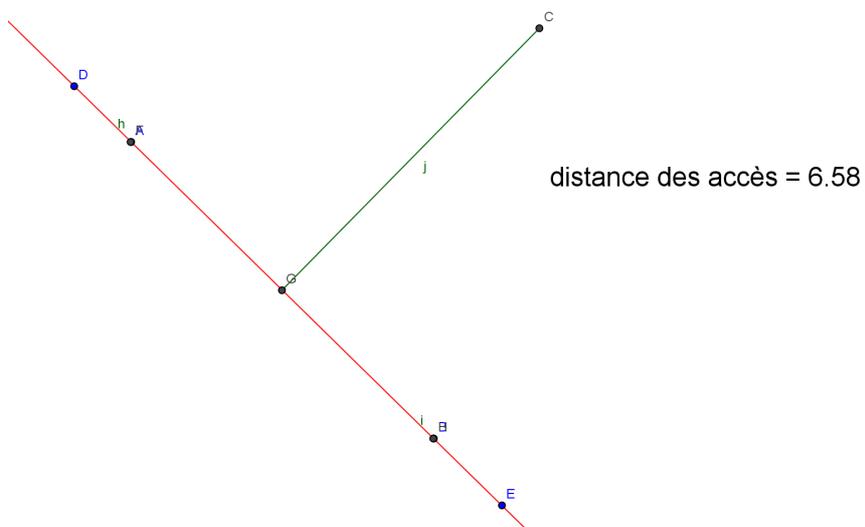


Nous avons déplacé l'autoroute pour minimiser la distance des accès.

Nous avons essayé de faire passer l'autoroute par deux des villes :

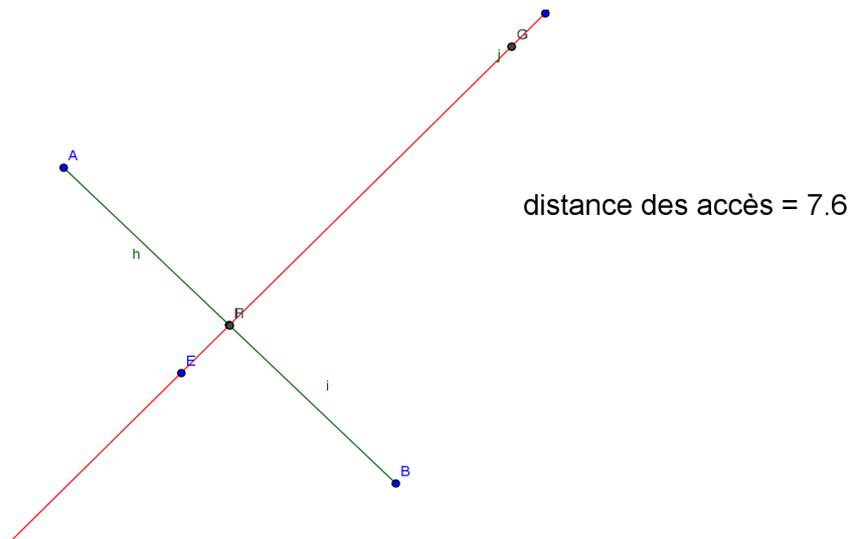


Puis par deux autres :



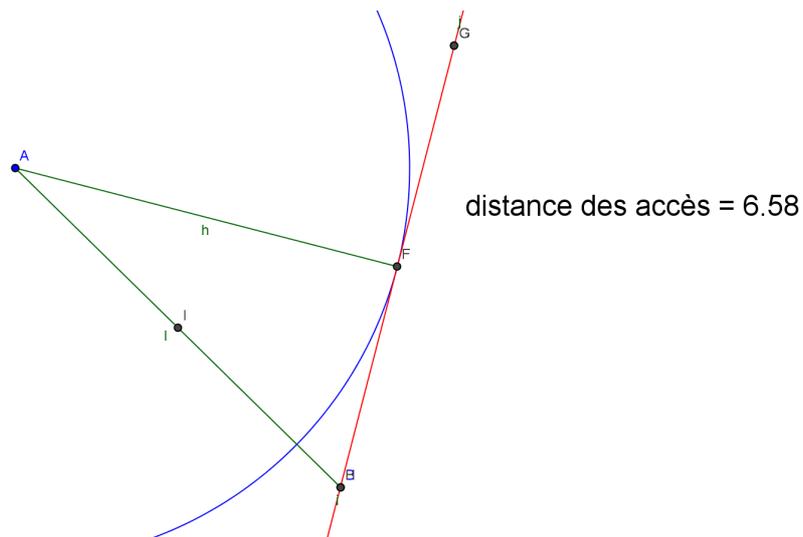
Nous remarquons que la distance est la même. Nous voyons que l'accès dans les deux cas passe par le milieu des deux autres villes. (3)

Nous décidons d'essayer de faire passer l'autoroute par le milieu du segment reliant les deux villes et par la troisième.



Nous remarquons que la distance est plus grande. Effectivement cela est normal car la longueur des accès est égale à la longueur d'un côté de notre triangle équilatéral.

Or dans le cas précédent :



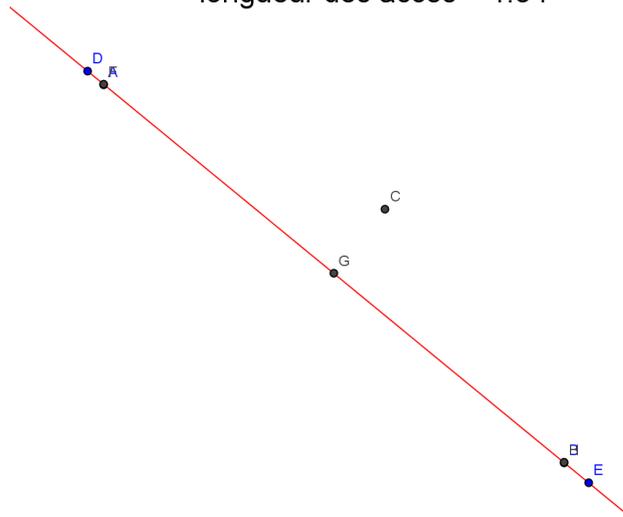
La longueur du côté AB est supérieure à la longueur de la hauteur AF.

Il semblerait que dans ce cas, l'autoroute doit passer par deux villes, peu importe lesquelles.

Nous avons alors essayé avec un triangle isocèle :

Nous avons essayé de faire passer l'autoroute par les deux villes les plus éloignées et c'est dans cette position que nous avons obtenu la longueur la plus petite.

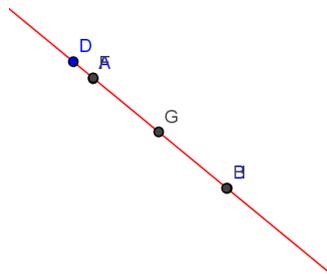
longueur des accès = 1.34



On s'est demandé alors ce qu'il se passerait si on choisissait un triangle isocèle avec les deux côtés de même longueur plus grand que la base :

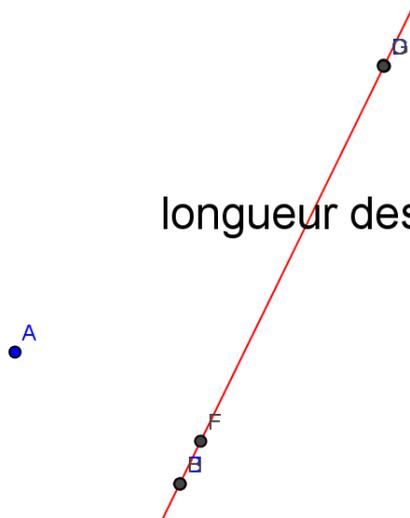
C

longueur des accès = 4.88



Dans ces cas là, nous allons essayer de faire passer l'autoroute par un des côtés de même longueur :

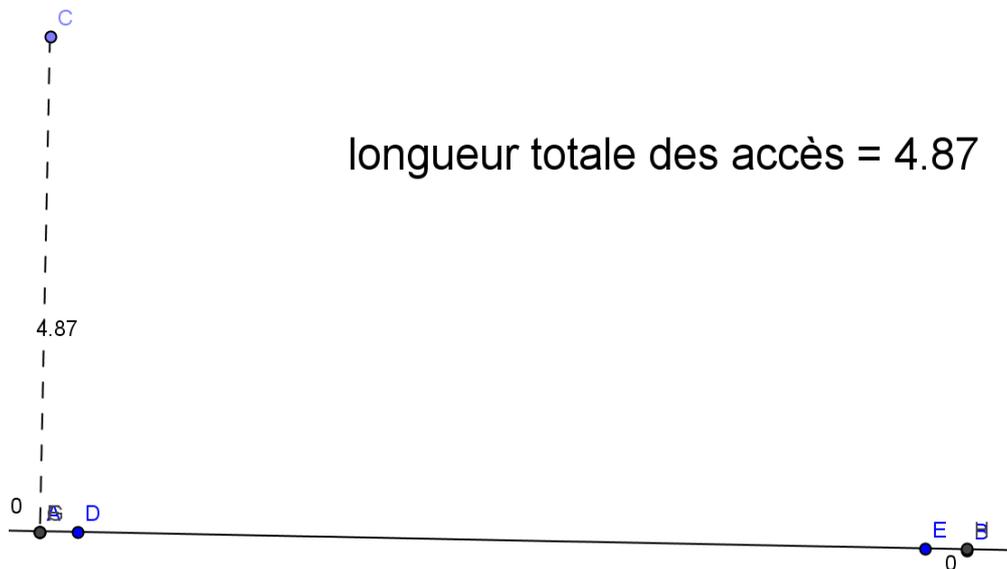
longueur des accès = 2.2



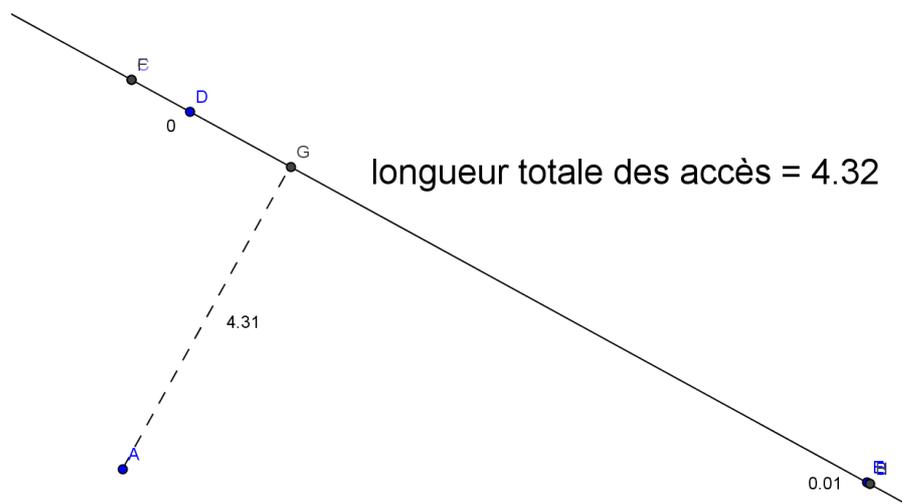
Encore une fois, c'est comme cela que nous avons la longueur des accès la plus petite.

Ainsi, pour avoir une distance d'accès la plus petite, il faut faire passer l'autoroute par les deux villes les plus éloignées ; c'est à dire celles qui ont des angles les plus petits.

Nous avons alors essayé sur un triangle rectangle :



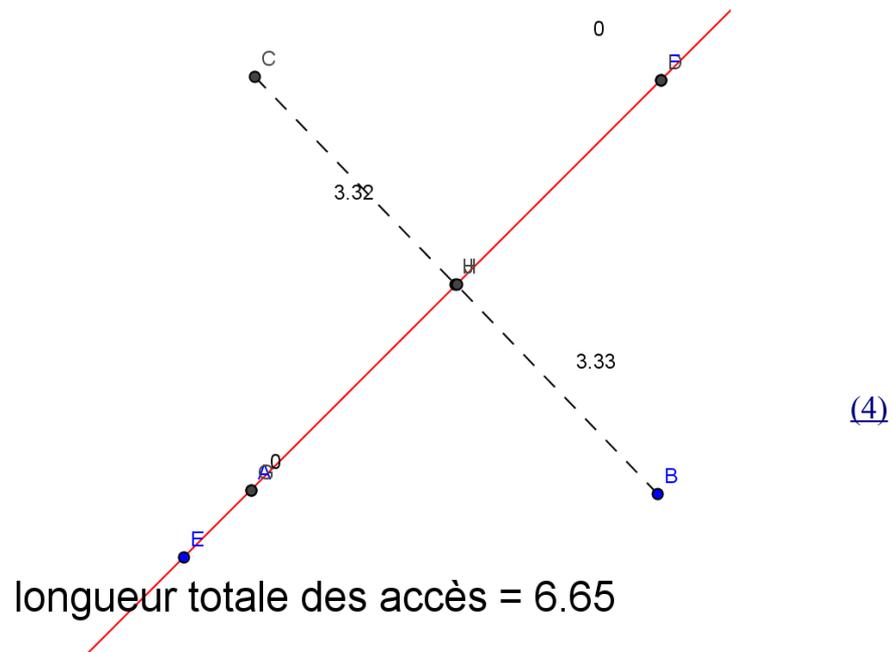
Ici encore, nous devons construire l'autoroute passant par les deux villes les plus éloignées c'est à dire celles qui forment les angles les plus petits.



Que se passe-t-il si on a quatre villes ?

Pour commencer, nous sommes partis d'un carré.

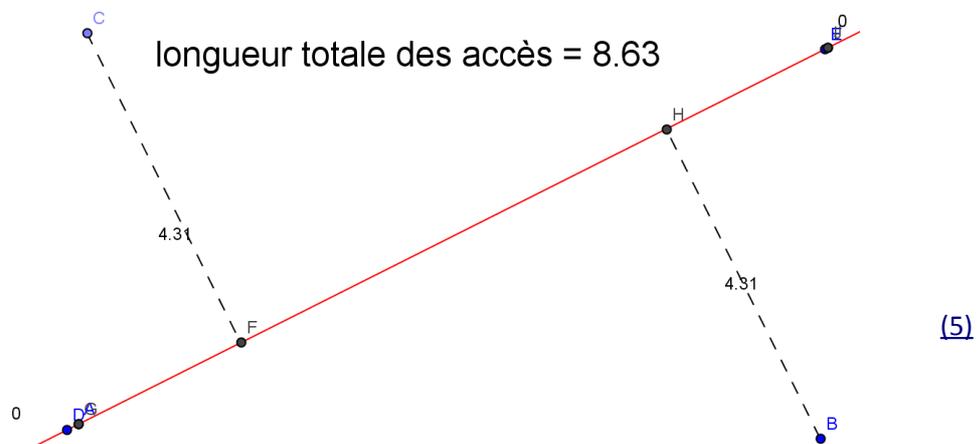
Comme précédemment, la longueur d'un côté étant plus grande que la demi-diagonale, nous pensons qu'il faut faire passer l'autoroute par une diagonale.



Nous allons chercher si on peut avoir mieux sans déplacer les points.
 Nous n'avons pas pu avoir des accès plus courts sauf par l'autre diagonale.

Que se passe-t-il pour le rectangle ?

Comme pour le carré, nous pensons au départ qu'il faut la faire passer par une diagonale du rectangle plutôt que par deux sommets consécutifs. En effet les deux accès tracés perpendiculaires seront plus courts que les deux petits côtés.



Pouvons-nous trouver mieux sans bouger les sommets ?

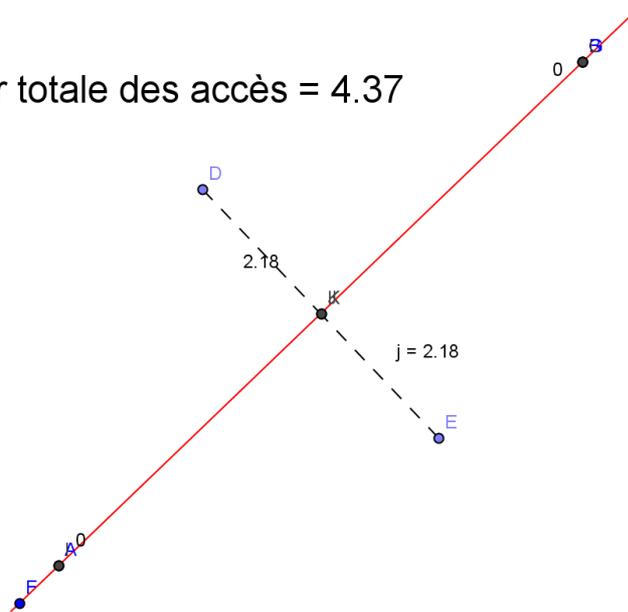
Non, nous ne sommes pas parvenus à trouver plus court. Au mieux nous sommes parvenus à trouver la même distance avec l'autre diagonale.

Ici aussi, il semblerait que ce soit en faisant passer l'autoroute par les villes les plus éloignées que nous obtenions le meilleur résultat.

Que se passe-t-il sur un losange ?

Si notre résultat précédent est vrai, notre autoroute devra passer par la diagonale la plus grande.

longueur totale des accès = 4.37



(6)

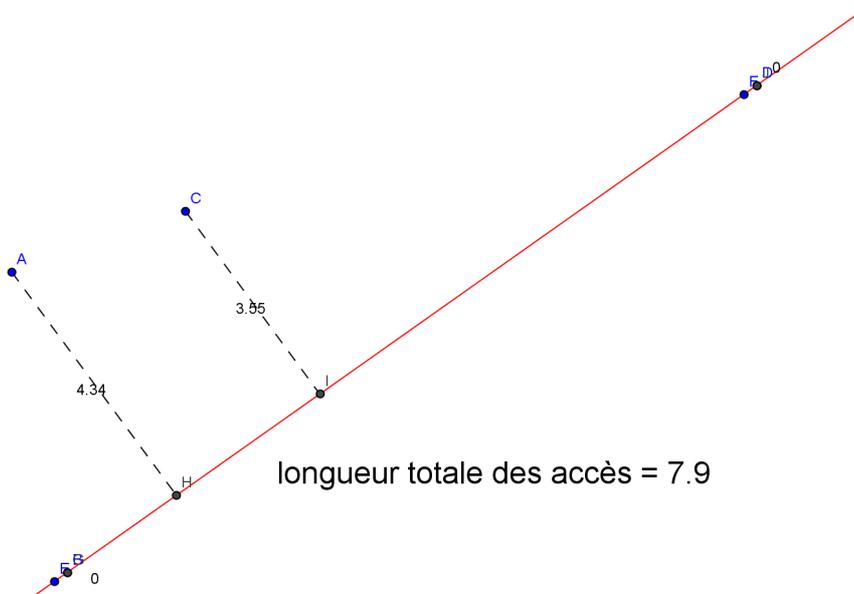
Pouvons-nous trouver mieux ?

Non, nous ne sommes pas parvenus à trouver mieux.

Que se passe-t-il si on prend quatre points au hasard ?

Pour avoir une longueur de référence et vérifier notre hypothèse, nous commençons par regarder quels sont les deux points les plus éloignés.

Puis nous regardons combien mesure la totalité des accès en passant par ces deux points.

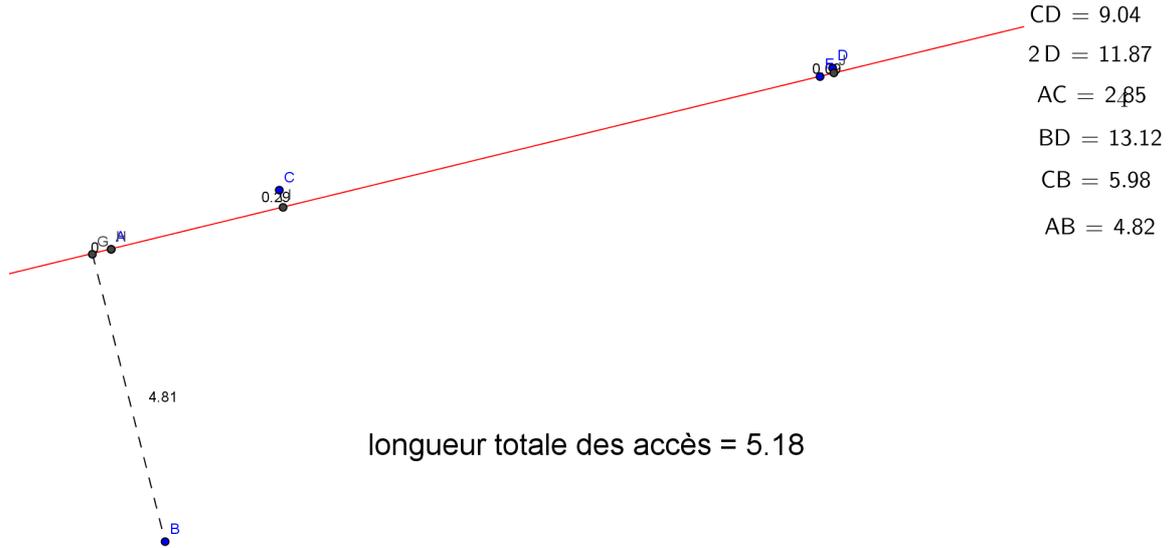


- CD = 9.04
- AD = 11.87
- AC = 2.85
- BD = 13.12
- CB = 5.98
- AB = 4.82

(7)

Ensuite, nous cherchons à trouver mieux.

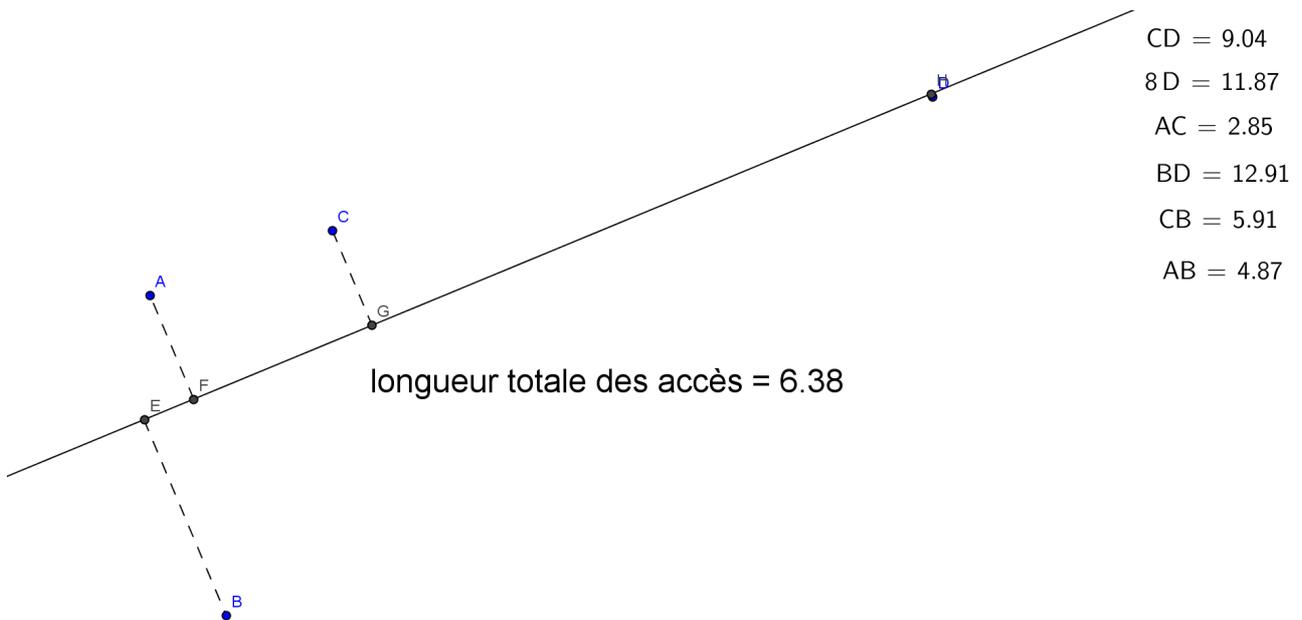
Nous avons trouvé mieux :



donc ce qui nous semblait vrai pour les cas précédents, ne l'est plus ici.

Notre hypothèse n'est pas correcte pour quatre points.

En faisant nos constructions, nous avons vu un icône « droite d'ajustement » qui pourrait nous faire penser à notre problème. Nous avons décidé de l'utiliser pour voir ce que cela donne.



Cela ne nous donne pas une meilleure solution.

Nos recherches en sont restées là par manque de temps... nous pensons avoir trouvé pour 3 points mais pas pour 4. (8)

Notes d'édition

- (1)** Ce résultat résout la question des accès à l'autoroute : la route la plus courte pour rejoindre l'autoroute depuis une ville est tracée par la perpendiculaire à l'autoroute passant par la ville.
- (2)** Les trois villes sont représentées par les points A, B et C. L'autoroute est représentée par la droite (DE). Les points A, B et C se projettent sur (DE) respectivement sur les points F, G et H.
- (3)** Le raccourci peut prêter à confusion : il s'agit du milieu du segment reliant les deux villes. Cette propriété résulte du fait que dans un triangle équilatéral, la médiatrice d'un côté se confond avec la hauteur du sommet opposé.
- (4)** Dans cette figure, les villes sont représentées par les points A, B, C et D ; l'autoroute est la droite en rouge.
- (5)** Dans cette figure, les villes sont représentées par les points A, B, C et E. L'autoroute est indiquée par la droite rouge.
- (6)** Dans cette figure, les villes sont représentées par les points A, B, D et E. L'autoroute est indiquée par la droite rouge.
- (7)** Dans les figures qui suivent, les villes sont représentées par les points A, B, C et D. L'autoroute est indiquée par la droite rouge ou en trait plein, et les accès en pointillés.
- (8)** Malgré le manque de temps, un beau résultat a pu être établi car c'est effectivement une propriété de cette droite (autoroute) de devoir passer par deux points (villes).