Les produits qui ne s'écrivent qu'avec des 1

2003

Le sujet de recherche :

Certains produits remarquables ne s'écrivent qu'avec des "1" .
Par exemple : $37 \times 3 = 111$
ou encore $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$

Peut–on en trouver d'autres ? Quelles règles peut–on trouver concernant ces produits ?

Travail réalisé par :

Vincent LAVIRON (1°S, lycée Pierre Paul Riquet)

Mehdi SLAMNIA , Michel Charles GIRON
(T CGIG , Lycée Ozenne)

Pierre POMERET , Olivier ZILIO , Cédric MOLINO
(1 S, Lycée Ozenne)

Convention d'écriture :

Dans la suite nous noterons *a* "1" le nombre qui s'écrit avec *a* caractères "1".

Et pour certaines démonstrations, (*a*" p"; *b*"n") le nombre écrit avec *a* caractères p suivis de *b* caractères n.

Par exemple 5 "1" = 11 111 et (3"1" ; 2 "0") = 11 100

Une première démarche :

Elle a consisté à s'intéresser aux paires de nombres *m* et *n* tels que $m \times n = p$ avec $p = k$ "1"

- Bien évidemment, on obtient les décompositions suivantes :
  $1 \times 1 = 1$
  $1 \times 11 = 11$
  $1 \times 111 = 111$ etc.

- Une démarche par tâtonnement donne plusieurs décompositions possibles, mais la programmation d'une calculatrice a permis d'obtenir des résultats plus complets .

  Voici donc toutes les décompositions autres que celles citée précédemment des nombres *a*"1", pour $a \leq 10$

1 et 11 n'en ont pas

$111 = 3\times37$

$1111 = 11\times101$

$11111 = 41\times271$

$111111 = 3\times37037$
$= 7\times15873$
$= 11\times10101$
$= 13\times8547$
$= 21\times5291$
$= 33\times3367$
$= 37\times3003$
$= 39\times2849$
$= 77\times1443$
$= 91\times1221$
$= 111\times1001$
$= 143\times777$
$= 231\times481$
$= 259\times429$
$= 273\times407$

$1111111 = 239\times4649$

$11111111 = 11\times1010101$
$= 73\times152207$
$= 101\times110011$
$= 137\times81103$
$= 803\times13837$
$= 1111\times10001$
$= 1507\times7373$

$111111111 = 3\times37037037$
$= 9\times12345679$
$= 37\times3003003$
$= 111\times1001001$
$= 333\times333667$

$1111111111 = 11\times101010101$
$= 41\times27100271$
$= 271\times4100041$
$= 451\times2463661$
$= 1981\times372731$
$= 9091\times122221$
$= 11111\times100001$

Conjectures :

L'observation des résultats obtenus nous a amené à formuler quelques conjectures :

1. les phénomènes de redondances

Nous observons une régularité dans les regroupements suivants :

- $3 \times 37 = 111$
- $3 \times 37\,037 = 111\,111$
- $3 \times 37\,037\,037 = 111\,111\,111$
- $3 \times 37\,037\,037\,037 = 111\,111\,111\,111$

- $37 \times 3 = 111$
- $37 \times 3\,003 = 111\,111$
- $37 \times 3\,003\,003 = 111\,111\,111$
- $37 \times 3\,003\,003\,003 = 111\,111\,111\,111$

- $7 \times 15\,873 = 111\,111$
- $7 \times 15\,873\,015\,873 = 111\,111\,111\,111$

- $15\,873 \times 7 = 111\,111$
- $15\,873 \times 7\,000\,007 = 111\,111\,111\,111$

- $41 \times 271 = 11\,111$
- $41 \times 27\,100\,271 = 1\,111\,111\,111$

- $271 \times 41 = 11\,111$
- $271 \times 4\,100\,041 = 1\,111\,111\,111$

Ce qui nous amène à conjecturer que, lorsqu'un produit s'écrit avec *k* "1", si on multiplie l'un de ses facteurs par $(1 + 10^k)$ on obtient comme produit le nombre *2k* "1"
par $(1 + 10^k + 10^{2k})$, on obtient *3k* "1"
par $(1 + 10^k + 10^{2k} + 10^{3k})$ on obtient *4k* "1" ….

Ou, plus formellement,

$$\textbf{Si } m \times n = k \text{ "1"}, \quad \textbf{alors pour tout } p > 0, \left(m \times \left(\sum_{i=0}^{p-1} 10^{ki}\right)\right) \times n = (p \times k) \text{ "1"}$$

2. Les nombres en 333….667:

A partir des trois résultats suivants :

$111 = 3 \times 37$ $\qquad 111\,111 = 33 \times 3367$ $\qquad 111\,111\,111 = 333 \times 333667$

on conjecture que, pour tout entier n > 0

$$\underbrace{333\ldots333}_{n \text{ " 3 "}} \times \underbrace{333\ldots333666\ldots667}_{n \text{ "3" suivis de } (n-1) \text{ "6" et un "7"}} = \underbrace{111\ldots111}_{3n \text{ "1"}}$$

3. Autre série de produits remarquables :

En comparant les deux résultats suivants :

$91 \times 1221 = 11\,111$ et $9091 \times 122221 = 1\,111\,111$

on conjecture que, pour tout entier n > 0

$$\underbrace{9090\ldots9091}_{n \text{ "90"} + 1} \times \underbrace{122\ldots221}_{n \text{ "22"}} = \underbrace{111\ldots\ldots111}_{(4n+2) \text{ "1"}}$$

Démonstrations :

1. les redondances

m, n et *k* sont trois entiers tels que $m \times n \;=\; k$ "1".

Alors, pour tout p > 0, $(m \times (\sum_{i=0}^{p-1} 10^{ki})) \times n = m \times n \times \sum_{i=0}^{p-1} 10^{ki}$

$$= \; k \text{"1"} \times \sum_{i=0}^{p-1} 10^{ki}$$

$$= (p \times k) \text{"1"}$$

2. Les nombres en 333….667

$$\underbrace{333\ldots333666\ldots667}_{n \text{ "3" suivis de } (n\text{-}1) \text{ "6" et un "7"}} \times \underbrace{333\ldots333}_{n \text{ " 3 "}} = \underbrace{111\ldots111}_{3n \text{ "1"}}$$

On calcule :

333…333666…667 × 333…333 =

$333\ldots333666\ldots667 \times \sum_{i=0}^{n-1} 3.10^{i} =$

$333\ldots333666\ldots667 \times \; 3 \times \sum_{i=0}^{n-1} 10^{i} =$

$(1 + 10^{n} + 10^{2n}) \times \sum_{i=0}^{n-1} 10i \; =$ (1)

$\sum_{i=0}^{n-1} (10^{i} + 10^{n+i} + 10^{2n+i}) \; = \; \sum_{i=0}^{3n-1} 10^{i} \; = \; 3n$ "1" , ce qui est bien le résultat annoncé.

$$\text{(1)} \quad \begin{array}{r} 333\ldots333\;666\;\ldots667 \\ \times \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline \underbrace{1000\ldots00}_{(n-1)\text{ "0"}}\underbrace{1000\ldots00}_{(n-1)\text{ "0"}}1 \end{array}$$

3. Autre série de produits remarquables :

$$\underset{n\ "22"}{\mathbf{122\ldots221}} \quad \times \quad \underset{n\ "90"+1}{\mathbf{9090\ldots9091}} \quad = \quad \underset{(4n+2)\ "1"}{\mathbf{111\ldots\ldots111}}$$

$\mathbf{a_n} \quad \times \quad \mathbf{b_n} \quad = \quad \mathbf{c_n}$ seront les notations utilisées

Démontrons ce résultat par récurrence:

- Pour n = 1 : $1221 \times 91 = 111\,111$
- Supposons l'égalité vraie pour un entier n ≥ 1 donné, et montrons qu'elle est alors vraie pour n+1

a_{n+1} s'écrit avec (n+1) "22" : $a_{n+1} = 12222...221$
$= 121.10^{2n+1} + 122...221$

on a donc $a_{n+1} = a_n + 121.10^{2n+1}$ et $b_{n+1} = b_n + 9.10^{2n+1}$

et on calcule alors :

$a_{n+1} \times b_{n+1} = (a_n + 121.10^{2n+1}) \times (b_n + 9.10^{2n+1})$
$= a_n \times b_n + 9\, a_n .10^{2n+1} + 121\, b_n.10^{2n+1} + 121\times9.10^{4n+2}$

Décomposons le calcul :

♦ $a_n \times b_n = c_n = (4n+2)$ "1"

(2)	1222...2221
	× 9
	10999...9989

♦ $9\, a_n = 11.10^{2n+1} - 11$ (2)

♦ $121\, b_n = 11\times11\times (90...9\,090 + 1)$
$= 11 \times 999...9990 + 121$ 2n "9" suivis d'un "0"
$= 999...9\,990 + 9\,999...9\,900 + 121$
$= 11.10^{2n+1} + 11$ (3)

(3)	999...990
	+ 9999...900
	+ 121
	11000...011

♦ $121 \times 9.10^{4n+2} = 1089.10^{4n+2}$

On obtient donc :

$a_{n+1} \times b_{n+1} = c_n + (11.10^{2n+1} - 11 + 11.10^{2n+1} + 11).10^{2n+1} + 1089.10^{4n+2}$
$= c_n + 2 \times 11.10^{4n+2} + 1089.10^{4n+2}$
$= c_n + (22 + 1089).\ 10^{4n+2}$
$= 111 \ldots 111 + 1111000...000$
$= (4n+2)$ "1" + (4 "1"; (4n+2) "0")
$= (4n+6)$ "1"
$= c_{n+1}$

on a bien prouvé que , pour tout entier n >0,
si $a_n \times b_n = c_n$, alors $a_{n+1} \times b_{n+1} = c_{n+1}$.

La règle énoncée est donc prouvée.

III Autre interprétation du problème

Partant d'un entier *m* peut-on trouver un entier *n* tel que $m \times n$ ne s'écrit qu'avec des "1" ?

Remarque :
pour que le produit $m \times n$ finisse par un 1, m ne doit être multiple ni de 2, ni de 5 .

Algorithme utilisé pour trouver le nombre *n*.

On choisit m ni pair, ni multiple de 5.

On trouve n petit à petit, en commençant par le chiffre des unités (appelé n_0), puis le chiffre des dizaines (appelé n_1) .

On aura donc $n = n_0 \times 10^0 + n_1 \times 10^1 + ... + n_x \times 10^x$
Pour bien comprendre le fonctionnement de la méthode, il est simple de la présenter à l'aide d'un exemple, lorsque $m = 7$:

Exemple	Multiplication à poser	Cas général
On cherche n pour que $n \times 7 = k$ "1" Il faut donc que $n_0 \times 7$ finisse par un 1 Or $7 \times 3 = 21$ On note r_0 le "reste" qui est ici le nombre 2	7 × 3 21	On cherche n_0 tel que $n_0 \times m$ finisse par un 1 $r_0 = (n_0 \times m - 1) / 10$
On cherche n pour que $n \times 7 = k$ "1" Il faut donc que $(n_1 \times 10 + n_0) \times 7$ finisse par 11 C'est–à–dire que $n_1 \times m + r_0$ finisse par un 1 Or $7 \times 7 + 2 = 51$ On note r_1 le "reste" qui est ici le nombre 5	7 × 73 21 511	On cherche n_1 tel que $n_1 \times m + r_0$ finisse par un 1 $r_1 = (n_1 \times m + r_0 - 1) / 10$
On cherche n_2 tel que $n_2 \times m + r_1$ finisse par un 1 Or $7 \times 8 + 5 = 61$ On note r_2 le "reste" qui est ici le nombre 6	7 × 873 21 511 6111	On cherche n_2 tel que $n_2 \times m + r_1$ finisse par un 1 $r_2 = (n_2 \times m + r_1 - 1) / 10$

On cherche n_3 tel que $n_3 \times m + r_2$ finisse par un 1 Or $7 \times 5 + 6 = 41$ On note r_2 le "reste" qui est ici le nombre 4	7 $\times$ 5873 21 511 6111 41111	...
On cherche n_4 tel que $n_4 \times m + r_3$ finisse par un 1 Or $7 \times 1 + 4 = 11$ On note r_4 le "reste" qui est ici le nombre 1 Or r_4 n'est composé que de "1", on s'arrête ici	7 $\times$14873 21 511 6111 41111 111111	On cherche n_x tel que $n_x \times m + r_{x-1}$ finisse par un 1 $r_x = (n_x \times m + r_{x-1} - 1) / 10$ Or r_x n'est composé que de 1

Lorsqu'on s'arrête, on a le plus petit n possible associé à m, on peut en trouver d'autre à l'aide des redondances.

<u>Question de l'existence et de l'unicité de *n*</u>

Lorsqu'on cherche un n_a quelconque, on le cherche tel que $n_a \times m + r_{a-1}$ finisse par un 1, c'est à dire que le produit $n_a \times m$ se termine par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 suivant r_{a-1}.

Nous avons au début précisé que m ne peut être choisi ni pair, ni multiple de 5. Par élimination, m ne peut se terminer qui par 1, 3, 7 ou 9 .

Nous admettons que, quels que soient les chiffres e et f, si g et h ont respectivement pour chiffre des unités e et f, alors les produits $e \times f$ et $g \times h$ auront le même chiffre des unités.
(C'est-à-dire que, par exemple 15367...53 × 1987...66 comme 3 × 6 , se finira par un 8).

Nous allons donc étudier les cas de 1, 3, 7 et 9, et cela s'appliquera pour tous les entiers positifs (ni pairs, ni multiples de 5).

Si $m = 1$

On cherche $m \times n_a$ finissant par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
et alors n_a est égal à	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Si $m = 3$

On cherche $m \times n_a$ finissant par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
et alors n_a est égal à	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3

Si $m = 7$

On cherche $m \times n_a$ finissant par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
et alors n_a est égal à	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Si $m = 9$

On cherche $m \times n_a$ finissant par	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
et alors n_a est égal à	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

On constate dans ces tables que lorsqu'on recherche un $m \times n_a$ finissant par un chiffre donné (ce qui est tout le temps le cas), on trouve toujours un, et un seul n_a possible.
De cela, on en déduit :

* que l'algorithme n'est jamais "bloqué",
* **Mais surtout, on en déduit qu'il n'existe qu'un seul *n* possible (avec ses redondances) pour un *m* donné.**

Comme il peut être fastidieux de calculer ce nombre *n* à l'aide de la méhode ci–dessus, nous avons réalisé un programme informatique sous EXCELL dont le but est de trouver « *m* » en fonction de « *n* » et que l'on peut trouver sur le site que nous avons créé.

Ce programme repose sur une batterie de test permettant de trouver à chaque passage de la boucle le nombre « a » tel que multiplié par « *m* » et additionné à « r » termine par « 1 ». « r » étant le surplus de la multiplication précédente et « a » un nombre compris entre 0 et 9. Le programme est donc quitté lorsque r = 1.

Le principe repris ici est celui de l'algorithme décrit plus haut, avec comme avantage une bien plus grande vitesse d'exécution.
Le résultat est présenté sous forme de chaîne de caractère pour 2 raisons :
- Concaténer les « a » successifs (c'est à dire les assembler bout à bout).
- Les chaînes de caractères offrent une plus grande capacité de stockage.

Nous avons volontairement limité le programme à 50 000 chiffres, la compréhension d'un tel nombre étant de toute manière très complexe.

De plus, il s'agit d'avantage d'une vérification expérimentale du théorème que de la recherche de toutes les solutions.

Nous n'avons trouvé aucun cas ou le *n* est infini, soit qu'il se répète en boucle, soit que l'on obtienne une suite quelconque de chiffres sans qu'aucun reste ne soit composé uniquement de "1". Mais nous n'avons pas réussi à le prouver, la question reste ouverte ....