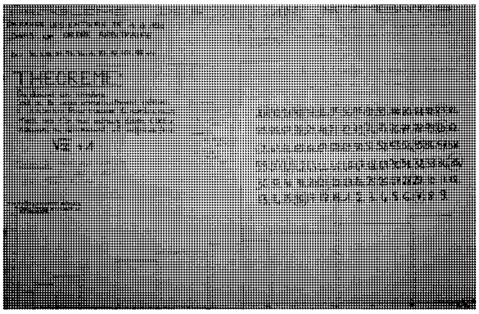
problème des …
… 101 nombres

par Emilie Davenne et Céline Robert, des lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon (69)

enseignants : Serge Betton, Marie-Claude Pontille

chercheur : Roland Assous



[traduction du panneau :]
On range les entiers de 1 à 101 dans un ordre arbitraire. [Ex : 90. 3. 12. 27. 72. 34. 1. 82. 10. 101. 97 etc.]

Est-il toujours possible d'extraire de ce rangement une suite croissante ou décroissante de 11 nombres n'étant pas nécessairement consécutifs ?

Théorème :
On choisit un nombre.
Soit x le carré immédiatement inférieur à ce nombre. Pour trouver le nombre minimum que l'on peut extraire dans l'ordre croissant ou décroissant, il suffit de faire $\sqrt{x} + 1$.

exemple : avec 101 nombres.

$$x = 100 = 10^2 \text{ donc } \sqrt{100} + 1 = 11$$

Une suite de 101 nombres ne contenant que 11 nombres dans l'ordre croissant ou décroissant :

101.90.91.**92**.93.94.95.96.97.98.99.100.80.81.82.**83**.84.85.86.87.88.89.70.71.72.73.**74**.75.76.77.78.79.**60**.61.62.63.64.65.66.67.68.69.50.51.52.53.54.**55**.56.57.58.59.40.**41**.42.43.44.45.46.47.48.49.30.31.323.33.34.**35**.36.37.38.39.20.**21**.22.23.24.25.26.27.28.29.10.11.12.13.14.15.**16**.17.18.19.1.2.3.4.5.6.**7**.8.9.

Voici le compte rendu de recherche, précédé d'un commentaire de Roland Assous, le chercheur qui les a accompagné.

présentation

Ce texte, en dépit de quelques maladresses de formulation, trouve tout son intérêt dans le fait qu'il retrace fidèlement le cheminement de deux élèves.

Une seule indication, encore bien loin de la solution pour leur niveau, a suffi pour relancer de façon décisive leur investigations.

La difficulté du problème aurait pu, à certains moments, les décourager définitivement, mais le climat de soutien psychologique (et volontairement non mathématique) créé par les enseignants qui les encadraient a été un élément déterminant dans la réussite de cette entreprise.

énoncé du problème

1, 2, 3, … 101

On range les nombres de 1 à 101 dans un ordre arbitraire. Par exemple :

72, 26, 3, 7, 14, 84, 101, … 92

Est-il toujours possible d'extraire de ce rangement 11 nombres dans l'ordre croissant ou décroissant ?

[Les 11 nombres ne sont pas nécessairement consécutifs.]

production des élèves

Prenons un exemple avec 5 nombres : on prend une suite de nombre rangés dans un ordre arbitraire :

3, 4, 1, 2, 5.

On a 3 nombres dans l'ordre croissant avec 3, 4, 5 ou 1, 2, 5 ; et 2 nombres dans l'ordre décroissant avec 4, 1 ou 3, 1 ou 4, 2 ou 3, 2.

Nous avons fait plusieurs essais :

• Avec une suite de 2 nombres : on a 2 combinaisons et on peut trouver au minimum 2 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant. (ex : 1, 2.)

• Avec une suite de 3 nombres : on a 6 combinaisons et on peut toujours trouver au minimum 2 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant.
exemple d'une suite : 1, 3, 2
1, 3 croissant 3, 2 décroissant

• Avec une suite de 4 nombres : on a 24 combinaisons ; on peut toujours trouver au minimum 2 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant.
exemple d'une suite : 1, 3, 4, 2
1, 3, 4 croissant 4, 2 décroissant

• Avec une suite de 5 nombres : on a 120 combinaisons ; on peut toujours trouver au minimum 3 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant.
exemple d'une suite : 1, 5, 3, 4, 2
1, 3, 4 croissant 5, 4, 2 décroissant

• Idem avec 6 : on a 720 combinaisons.
exemple d'une suite : 1, 4, 3, 6, 5, 2
1, 3, 6 croissant 6, 5, 2 décroissant

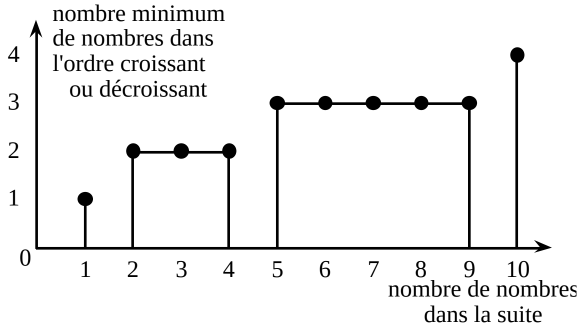
• Idem avec 7 : on a 5040 combinaisons.
exemple d'une suite : 7, 2, 1, 4, 3, 6, 5
2, 3, 6 croissant 7, 4, 3 décroissant

• Idem avec 8 : on a 40 320 combinaisons.
exemple d'une suite : 7, 8, 2, 1, 4, 3, 6, 5
1, 3, 5 croissant 8, 4, 3 décroissant

• Idem avec 9 : on a 362 880 combinaisons.
exemple : 7, 8, 9, 2, 1, 4, 3, 6, 5
7, 8, 9, croissant 9, 6, 5 décroissant

• Avec 10 nombres : on a 3 628 800 combinaisons ; on peut toujours trouver au minimum 4 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant.
exemple : 7, 10, 8, 9, 2, 1, 4, 3, 5, 6
1, 3, 5, 6 croissant 10, 9, 4, 3 décroissant

A partir de ces exemples, nous avons construit un graphique :



Puis à partir de ces résultats établis, nous avons énoncé une **conjecture** :

On choisit un nombre n. Soit $x(n)$ le carré immédiatement inférieur à ce nombre. Pour trouver le nombre minimum de nombres que l'on peut extraire dans cette suite de n nombres dans l'ordre croissant ou décroissant, il nous suffit de faire : $\sqrt{x(n)} + 1$.

Exemple, avec 101 nombres :

$$x(101) = 100 = 10^2 \ ; \sqrt{100} + 1 = 11$$

Dans une suite de 101 nombres rangés dans un ordre arbitraire, peut-on extraire 11 nombres dans l'ordre croissant ou décroissant ? Notre problème est de trouver un rangement de 101 nombres dans lequel on puisse extraire au minimum 11 nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

voici notre solution

[NDLR : en fait ceci est un “exemple critique” : on ne peut extraire une suite croissante, ou décroissante, de 12 termes.]

On prend tous les naturels de 1 à 100. On découpe cette suite en 10 parties égales de 10 nombres consécutifs en partant de 1.

exemple :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Cette partie est la première.

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
Cette partie est la troisième.

91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100
Cette partie est la dixième

Puis on range ces parties de la dixième à la première. On place 101 à la tête de la dixième partie ; on obtient alors l’arrangement de 101 nombres que nous recherchons :

101-***90***-*91-92-93-94-95-96-97-98-99-100*-**80**-81-82-83-84-85-86-87-88-89-**70**-71-72-73-74-75-76-77-78-79-**60**-61-62-63-64-65-66-67-68-69-**50**-51-52-53-54-55-56-57-58-59-**40**-41-42-43-44-45-46-47-48-49-**30**-31-32-33-34-35-36-37-38-39-**20**-21-22-22-23-24-25-26-27-28-29-**10**-11-12-13-14-15-16-17-18-19-**1**-2-3-4-5-6-7-8-9

La suite *italique* est un exemple de 11 nombres extraits dans l’ordre croissant.

La suite en **gras** est un exemple de 11 nombres extraits dans l’ordre décroissant.

Ici, nous étions satisfaits, mais le chercheur nous a demandé :

“peut-on faire moins ?”

Et peut-on savoir pourquoi il voulait une preuve ?

Nous avons beaucoup hésité et enfin il nous a soumis une proposition …

Soit une suite de n nombres. A chacun des nombres x de la suite on associe un couple $(C_x\,;D_x)$:

• C_x est le nombre de termes de la suite croissante se terminant par x

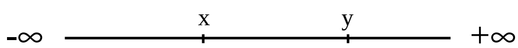
• D_x est le nombre de termes de la suite décroissante se terminant par x

On prend par exemple une suite de 10 nombres : 9, 7, 3, 5, 2, 4, 8, 1, 10, 6. Les couples seront :

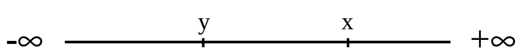
Pour la suite se terminant par 1 :	(1; 5)
Pour la suite se terminant par 2 :	(1; 4)
Pour la suite se terminant par 3 :	(1; 3)
Pour la suite se terminant par 4 :	(2; 4)
Pour la suite se terminant par 5 :	(2; 3)
Pour la suite se terminant par 6 :	(3; 3)
Pour la suite se terminant par 7 :	(1; 2)
Pour la suite se terminant par 8 :	(3; 2)
Pour la suite se terminant par 9 :	(1; 1)
Pour la suite se terminant par 10 :	(3; 1)

On remarque donc qu’il y a autant de couples que de nombres dans la suite initiale, et que les couples sont tous différents.

En effet, soit x et y deux réels : $x < y$.

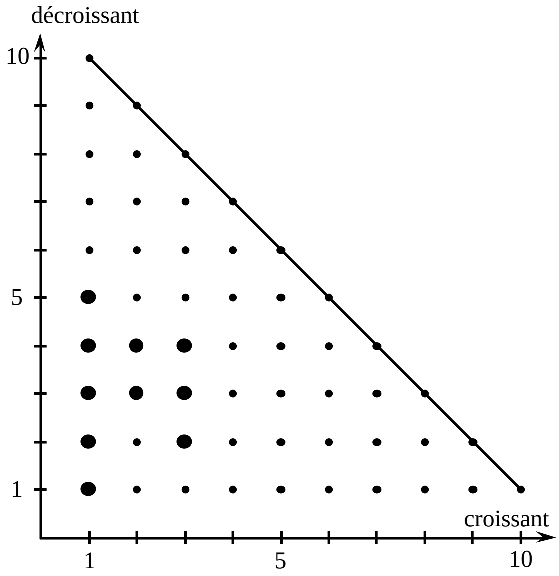


Pour y il y aura au moins un nombre de plus dans la suite de nombres dans l’ordre croissant que dans celle de x.



Idem avec x qui a plus de nombres dans sa suite croissante que y.

On peut représenter ces couples sur un graphique …



On peut remarquer que tous les points correspondant à tous les couples possibles de toutes les suites de 10 nombres sont dans un demi-plan (frontière comprise).

Par exemple, on ne peut pas trouver le couple (2 ; 10) dans une suite de 10 nombres car si on considère le nombre *x*, dans une suite de 10 nombres, auquel est associé ce couple (2 ; 10) cela veut dire que :

• 1 nombre inférieur à *x* est placé avant lui ;
• 9 nombres supérieurs à *x* sont placés après lui.

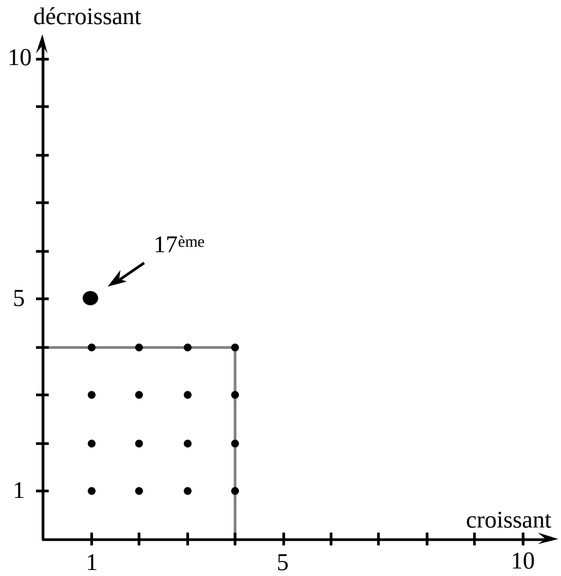
Donc au total il y aurait 11 nombres (1+9+*x*) nombres dans la suite. C'est donc impossible.

Tous les points marqués • sur le graphique sont donc tous les couples existants, correspondants à toutes les suites de 10 nombres : il y en a 55.

On peut remarquer que pour que le couple existe, il faut que la somme de l'ordonnée et de l'abscisse du couple ne dépasse pas le nombre de couples dans la suite choisie + 1.

Se rendant compte que tous les couples étaient uniques, nous avons essayer de les regrouper le plus possible sur le graphique de façon à ce que l'ordonnée et l'abscisse des couples soient les plus petites possibles.

Cela donne sur le graphique :



On considère une suite de 10 nombres. Donc il y a 10 couples. Ces 10 couples peuvent tenir dans un carré de 4×4.

On remarque que si on prend une suite de 16 nombres (16 couples), les couples pourront toujours s'inscrire dans ce même carré de 4×4.

Si on prend une suite de 17 nombres (17 couples), les couples tiendront dans un carré de 5×5.

On s'est alors demandé comment on passe de 10 à 4 et de 16 à 4.

Nous avons alors construit un *théorème* :

x = nombre de nombres dans la suite = nombre de couples
p = carré immédiatement et strictement inférieur à x
n = côté du carré

On peut alors dire que :

$$(n - 1)^2 < x \leq n^2$$

Avec

$$n = \sqrt{p} + 1$$

[NDLR : Donc la conjecture énoncée plus haut est vraie. En fait, l'énoncé que suggère la rédaction de l'article est le suivant :

> si n - 1 est le plus grand entier tel que $(n-1)^2 < x$, alors de toute suite de x nombres on peut extraire une suite croissante ou décroissante de n nombres.

De plus la construction, donnée comme "solution" au début de l'article, peut se généraliser, ce qui prouve alors que l'énoncé précédent devient faux, si on veut comme conclusion une suite extraite croissante ou décroissante de $n + 1$ nombres — au lieu de n nombres — (ce résultat, d'ailleurs, est suggéré par l'écriture « $x \leq n^2$ »).]

exemples

On a une suite de 11 nombres.

$$x = 11 \text{ donc } p = 9.$$
$$n = \sqrt{p} + 1 = \sqrt{9} + 1 = 4$$

Si on prend 11 couples avec l'ordonnée et l'abscisse la plus petite possible, on sait que ces 11 points entreront dans un carré de 4×4 et que donc le minimum de nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant sera 4 dans une suite de 11 nombres. Deux des 11 couples auront une abscisse ou une ordonnée de 4.

On veut savoir quelles sont les suites de nombres dans lesquelles on peut extraire 4 nombres au minimum dans l'ordre croissant ou décroissant.

On a donc $n = 4$. Or :

$$(n - 1)^2 < x \leq n^2$$
$$(4 - 1)^2 < x \leq 4^2$$
$$9 < x \leq 16$$

Donc les suites de 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 nombres ont au minimum 4 nombres rangés dans l'ordre croissant ou décroissant.

Ce théorème peut se généraliser et on peut l'appliquer à une suite de 101 nombres. On a donc :

$$x = 101, \text{ alors } p = 100$$
$$\text{or } n = \sqrt{p} + 1 = \sqrt{100} + 1 = 11$$

On peut donc conclure que

la suite maximale que l'on peut extraire d'une suite de 101 nombres dans l'ordre croissant ou décroissant comporte au minimum 11 nombres.