

Problème de la pizza (1)

Année 2020 – 2021

Yann-Elie Berrebi, Alexandre Lucaussy et Linda Mehrez

Encadrés par M. DECAVEL

Établissement : École Alsacienne, France, Paris, 75006

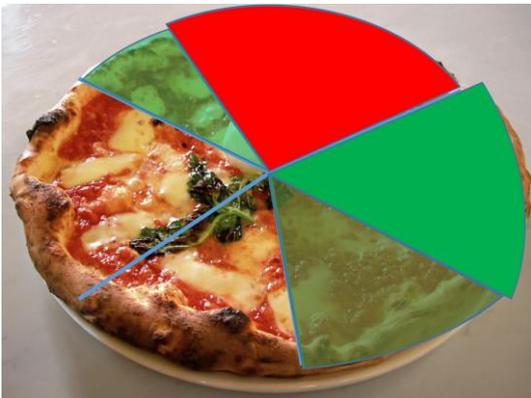
Chercheur M. BERNUAU, chercheur à AgroParisTech

École Alsacienne Paris

Présentation du sujet

Mario et Luigi ont acheté une pizza. Mario découpe toutes les parts de la manière qu'il le veut mais il doit forcément faire un nombre **pair** de parts. Les parts peuvent avoir des tailles différentes.

Ensuite, ils commencent à choisir chacun à leur tour les parts, **en commençant par Luigi**. La première part peut être choisie n'importe où. Les parts suivantes qui sont choisies doivent forcément être adjacentes à des parts déjà prises. (Voir l'image ci-dessous)



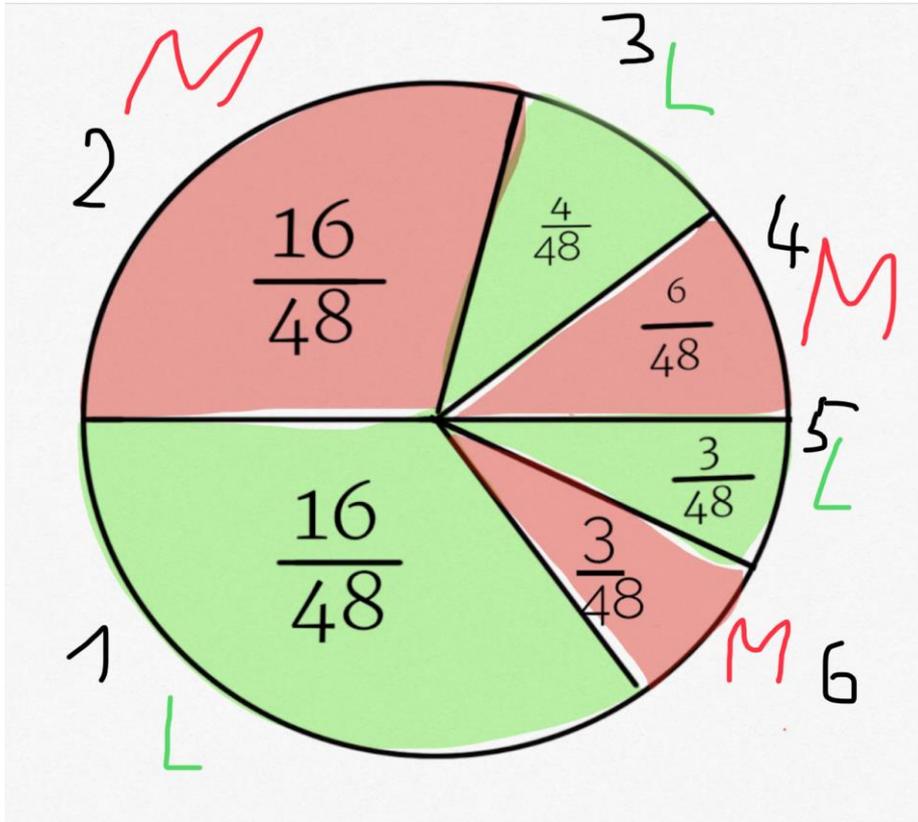
Sur le dessin ci-dessus, Luigi a choisi sa part (en vert foncé) puis Mario a choisi la sienne (en rouge foncé). C'est à Luigi de jouer, il a donc le choix entre les deux parts en vert transparent car ce sont les deux parts adjacentes aux parts déjà prises.

La question est la suivante : Mario peut-il faire un découpage lui permettant d'avoir **plus de pizza** quels que soient les choix de Luigi ?

Si oui, il faut que nous montrions comment ? Sinon, il faut démontrer pourquoi.

Notre hypothèse

Nous avons essayé avec six parts, Luigi commencerait avec $\frac{1}{3}$ de la pizza, ensuite, Mario prendrait l'autre part de $\frac{1}{3}$, ensuite Luigi prendrait la part de $\frac{1}{12}$, puis Mario $\frac{1}{8}$, Luigi $\frac{1}{16}$ et Mario $\frac{1}{16}$. (Voir le schéma ci-dessous)



Luigi aurait $\frac{23}{48}$ et Mario $\frac{25}{48}$ qui est supérieur à Luigi. Mario gagnerait donc car il aurait plus de pizza que Luigi.

$$\begin{array}{l} \text{Luigi (L)} = \frac{16}{48} + \frac{4}{48} + \frac{3}{48} = \frac{23}{48} \\ \text{Mario (M)} = \frac{16}{48} + \frac{6}{48} + \frac{3}{48} = \frac{25}{48} \end{array} \quad \left| \quad \frac{25}{48} > \frac{23}{48} \right.$$

Malheureusement, cette méthode ne fonctionne que si Luigi commence par la part $\frac{1}{3}$ et prend la part $\frac{1}{12}$ ensuite. S'il choisit la part contenant $\frac{1}{16}$ de pizza, la répartition des parts sera différente et il obtiendra donc plus de pizza.

Elle ne repose donc que sur le fait que Luigi choisisse toujours la plus grande part, ce qui n'est pas forcément le cas. En effet, il est précisé dans la consigne qu'il fallait trouver une solution permettant à Mario d'avoir plus de pizza dans tous les cas ou de démontrer que Luigi pourra toujours en avoir plus. Nous n'avons pas eu le temps de répondre pleinement au problème.

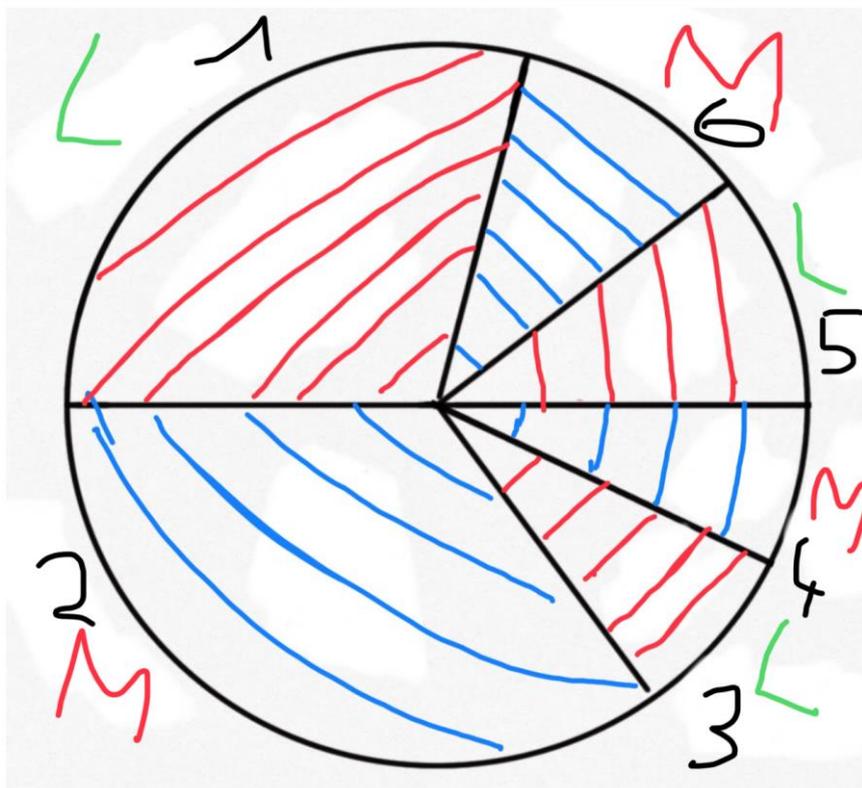
La solution de M. Bernau

Nous n'avons pas trouvé la véritable solution à ce problème. M. Bernau est venu nous la présenter : il est impossible pour Mario d'avoir plus de pizza que Luigi. La stratégie pour que Luigi ait toujours plus de pizza est de regarder les différentes parts dans leur ensemble. Luigi sépare les parts en deux parties qui contiennent autant de parts chacune :

- la partie A qui est représentée en bleu
- la partie B qui est représentée en rouge

Il place (dans sa tête) une part sur deux dans la partie A et une part sur deux dans la partie B (voir le dessin ci-dessous)

Dans cet exemple, Luigi remarque que la partie B (en rouge) contient plus de pizza que la partie A. Il va donc choisir de commencer par une part rouge. Mario se retrouve donc obligé de choisir systématiquement une part bleue (voir le dessin ci-dessous) :



A la fin, Luigi aura donc forcément plus de pizza puisqu'il aura eu toutes les parts rouges.

Cependant, Mario peut faire en sorte d'avoir toujours autant de pizza que son frère, Luigi : en effet, il lui suffit de faire un découpage qui rendra les deux groupes de parts équivalents. Ils auront donc autant de pizza chacun.

Notes d'édition

(1) Ce texte, écrit par de très jeunes élèves, a été accepté comme narration de recherche par le comité d'édition.