Le jeu des Pousses / Le jeu du métro (ou des choux de Bruxelles)

Année 2018 – 2019

Elèves de troisième :
Barbier Alexys, Bourdette Elsa, Brut Léa, Fromager Matthieu, Guisseppi Hugo, Hyenveux Armelle, Poustis Romane,

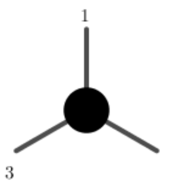
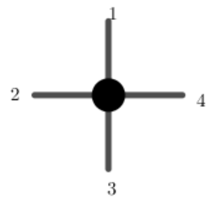
Encadrés par : Arriau Cathy, Billard Marie, Goyhetche Alain

Établissements : Collège Gaston Fébus, Orthez

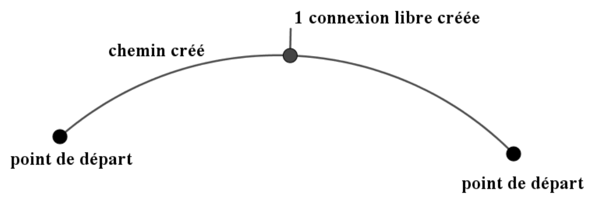
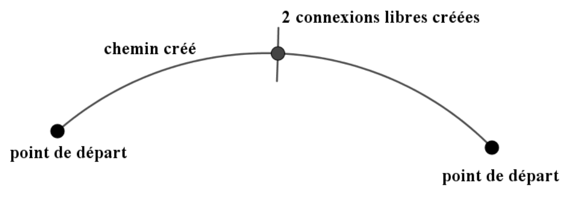
Chercheur : M Cresson Jacky, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1. Présentation du sujet

Ces deux jeux consistent à relier des points que l'on nommera stations pour le jeu du métro. Chaque point a des connexions, libres au départ, d'où peuvent partir des chemins. Le but de ces deux jeux est de relier ces points par des chemins. Sur chaque chemin créé, on place un nouveau point. Le gagnant est celui qui trace le dernier chemin.

Dans le jeu des pousses, il y en a seulement trois.	Dans le jeu du métro, il y a 4 connexions libres par station.
	

Pour chaque chemin créé,

Dans le jeu des pousses, un nouveau point est placé sur ce chemin, qui amène une connexion libre créée.	Dans le jeu du métro, un point est placé sur ce chemin, qui amène deux connexions libres créées, une de chaque côté du chemin.
	

Enfin, il est **interdit de croiser** des chemins.

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons constaté qu'au jeu des pousses, il existait des parties rapides et longues tandis qu'au jeu du métro, le nombre de coups par partie semblait fixe.

Nous avons ensuite trouvé et démontré des formules donnant, pour le jeu des pousses le nombre maximal et le nombre minimal de coups en fonction du nombre de points de départs.

Pour le jeu du métro, nous avons trouvé la formule donnant le nombre de coups de la partie en fonction du nombre de points de départ. Nous avons donc trouvé une stratégie gagnante pour ce jeu.

3. Texte de l'article

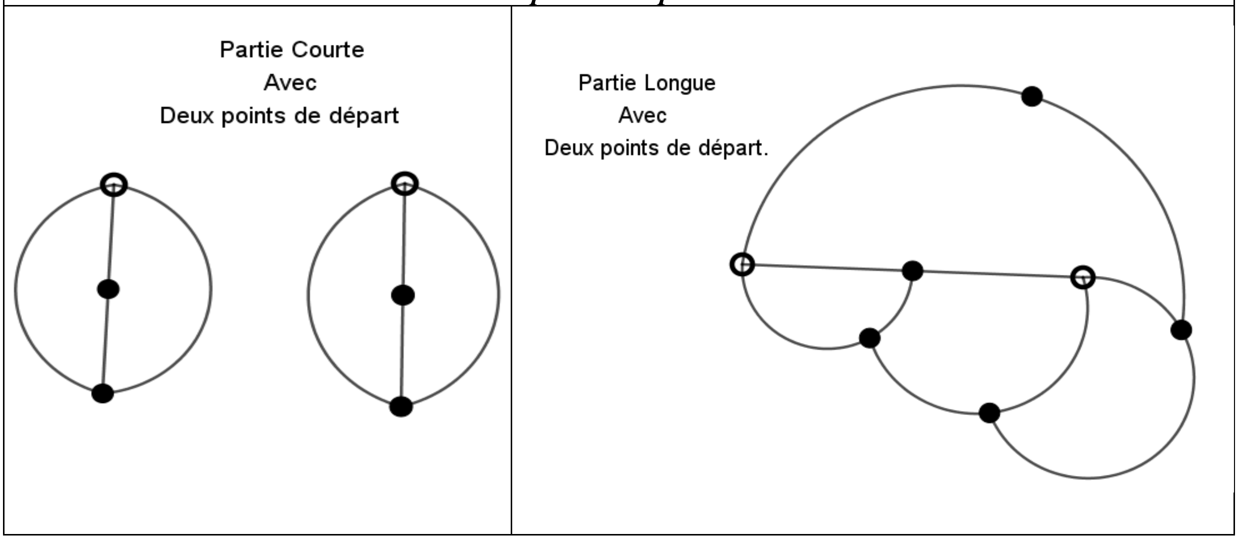
Le Jeu de pousses

Observations et formules :

Les premières constatations :

Nous avons commencé à jouer et nous avons découvert que l'on pouvait trouver des parties longues et courtes avec le même nombre de points de départ. Par exemple, pour deux points de départ, la partie courte est de 4 chemins, la partie longue de 5. [1]

Dans les deux cas, les points de départs sont des points dont l'intérieur est vide, les points créés sont les points remplis en noir.



Recherche des nombres de coups minimum et maximum

On a classé les résultats dans un tableau comportant le nombre de coups minimum et maximum en fonction du nombre de points au départ de la partie.

Nombre de points au départ	**Partie Courte : Nombre de coups**	**Partie Longue : Nombre de coups**
2	4	5
3	6	8
4	8	11

Nous avons trouvé un lien entre les nombres de coups maximal et minimal et le nombre de points au départ.

Nombre de points au départ	Partie Courte :	Partie Longue :
n	$2n$	$3n-1$

Nous allons maintenant démontrer ces deux formules.

Les Démonstrations

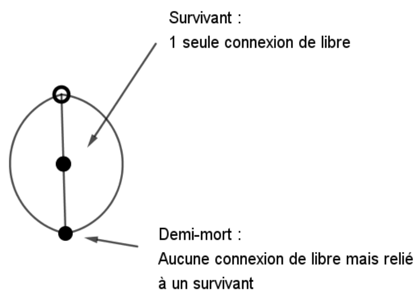
Nombre de coups minimum:

Durant nos parties, nous avons nommé les différents points :

- ***Les survivants*** sont des points qui ont une connexion libre mais qui sont soit coincés entre différents chemins soit il n'y a plus aucune connexion libre. On a remarqué que $3n-m$ était égal au nombre de connexions libres au bout de m coups. Le nombre de survivants est égal aux nombres de connexions libres donc le nombre de survivants à la fin de la partie est $3n-m$

- ***Les demi-morts*** sont des points avec leurs trois connexions utilisées dont une reliée à un survivant, il y a automatiquement deux demi-morts.

- ***Les morts*** sont des points avec leurs trois connexions utilisées et reliées à des morts ou des demi-morts.



On suppose dans tout le reste que le nombre de points au départ de la partie est n et que le nombre de coups à la fin de la partie est m.

Noms des points	Commentaires	Nombre de points
Au total	Pour chaque chemin créé, un point est aussi créé	$n+m$
Survivants	Le nombre de connexions libres en début de partie est $3n$ Pour chaque coup joué, on utilise deux connexions et on crée une connexion (avec le point supplémentaire) donc au final, pour chaque coup, une connexion libre en moins. Le nombre de coups en fin de partie est m.	$3n-m$
Demi-morts	Chaque survivant est relié à deux demi-morts. En effet, un survivant a une connexion libre, ses deux autres connexions ne peuvent être reliées à : - Un survivant car dans ce cas, la partie ne serait pas terminée (on pourrait créer un autre chemin) - Des morts (car par définition les morts sont reliés à des morts ou des demi-morts) Donc le nombre de demi-morts est égal au double du nombre de survivants	$2(3n-m)$
Morts	Il ne peut pas ne pas avoir de connexions libres, il y a donc obligatoirement un survivant, ce qui entraine la création de deux demi-morts. Les morts sont donc la seule catégorie de points qui ne sont pas indispensables. C'est donc pour cela que nous supposons que le nombre de morts est égal à zéro. [2]	0

Le nombre de points à la fin d'une partie est égal aux survivants plus aux demi-morts donc

$$n + m = 3n - m + 2(3n - m)$$

On cherche à isoler m

$$n + m = 3n - m + 2(3n - m)$$
$$n + m = 3n - m + 6n - 2m$$
$$0 = 8n - 4m$$
$$\frac{4m}{4} = \frac{8n}{4}$$
$$m = 2n$$

Nombre de coups maximum :
Nous cherchons maintenant à déterminer le nombre maximal de coups dans une partie. Dans cette partie longue, il ne peut pas y avoir 2 connexions libres à la fin car on pourrait créer un chemin supplémentaire. Mais nous avons trouvé qu'il peut y avoir deux connexions libres qui sont isolées l'une de l'autre donc un nouveau chemin ne peut pas être créé. [3]

Nous avons remarqué qu'en fin de partie, le nombre minimal de connexions libres est de 1.
On appelle :
- n le nombre de points au départ
- m le nombre de coups.

Nous avons déjà observé qu'après m coups le nombre de connexions libres est $3n - m$. Ainsi, à la fin de la partie on arrive à l'égalité :

$$3n - m = 1$$

$$m = 3n - 1$$

Conséquences :
On a trouvé que pour le nombre minimum de coups la formule est $2n$ et que pour le nombre maximum de coups la formule est $3n - 1$. Par expérience, nous avons remarqué que d'autres parties pouvaient être possibles mais celles-ci seront toujours comprises entre les deux bornes $2n \ \ et \ \ 3n - 1$ Nous pouvons donc prévoir le nombre de coups qu'il sera possible de jouer au début de la partie. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de trouver comment faire pour gagner du temps.

Le jeu du Métro

Observations et formule(s) :

Les premières constatations :
Au commencement de nos recherches, nous avons joué au jeu du métro en notant les résultats obtenus et en les comparant entre nous. Cette phase de recherche a duré plusieurs mois puis nous sommes venus à s'accorder, nous sommes arrivés à trouver une relation entre le nombre de points de départ et le nombre de coups total : si nous avions deux points de départ, on arrivait systématiquement à 8 coups au total en fin de partie. Si nous avions 3 points de départ, on arrivait systématiquement à 13 coups en fin de partie.

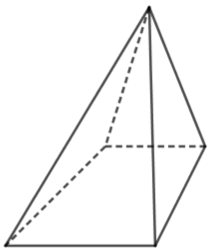
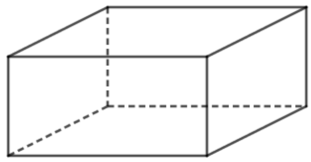
Après plusieurs séances et avec l'aide de nos professeurs, nous avons réussi à trouver cette relation sous la forme d'une égalité (dernière ligne du tableau).

Nombres de points de départ	Nombre de coups
2	8
3	13
4	18
n	$5n-2$

Recherche de la formule
Après avoir trouvé la formule $p = 5n - 2$, on nous a donné la formule d'Euler qui dit que sur un polyèdre, la somme du nombre de faces et de sommets, moins le nombre d'arêtes est égal à 2.

$$S + F - A = 2$$

Nous l'avons ensuite vérifié sur plusieurs solides

Pyramide	Pavé droit
	
$S = 5$ $F = 5$ $S + F - A = 2$ $A = 8$	$S = 8$ $F = 6$ $S + F - A = 2$ $A = 12$

Afin de démontrer notre formule ($p = 5n - 2$), nous avons utilisé la formule d'Euler. Pour l'appliquer sur les graphes (les jeux), il fallait trouver un équivalent des sommets, des arêtes et des faces. Nous sommes arrivés sur ces définitions:

- Les sommets sont les points d'intersections, y compris les points de départs.
- Les arêtes sont les portions de traits délimitées par deux sommets.
- Les faces sont les espaces vides entourés des arêtes. **Il ne faut pas oublier la face extérieure**, qui est comptée sur les graphes et qui est infinie. [4]

Pour pouvoir utiliser la formule d'Euler, il faut exprimer avec des expressions les différents éléments.

Pour trouver le nombre de **sommets**, n'importe quand dans la partie, nous avons remarqué qu'à chaque coup, selon les règles, le trait tracé doit être coupé par un sommet. A chaque coup, donc, il y a un sommet de plus, sans oublier de compter les points de départ. On arrive donc à $S = p + n$ où p est le nombre de coups et n le nombre de points de départ.

Pour les **arêtes**, nous avons remarqué qu'à chaque coup, le trait tracé doit être coupé par un sommet, créant donc 2 arêtes : à chaque coup, deux arêtes sont créées. Et on a donc l'expression $A = 2p$, où p est le nombre de coups.

Pour trouver le nombre de **faces**:
A la fin de la partie, nous avons tout d'abord remarqué que dans chaque face, il y a une connexion libre, même la face extérieure en possède une. [5] Ce nombre de connexions libres est conservé tout au long de la partie.
En effet, pour chaque coup, on utilise deux connexions mais le point créé au milieu du chemin crée deux

connexions libres donc au bilan, le nombre de connexions libres ne varie pas.

Le nombre de faces est alors égal au nombre de connexions au début. On arrive donc à l'expression $F = 4n$ où n est le nombre de points de départs.

Après avoir eu toutes les expressions, nous les avons transposées sur la formule d'Euler : on a donc :

$$(p+n)+(4\,n)-(2\,p)=2$$
$$p+n+4n-2p=2$$
$$5n-p=2$$
$$p=5n-2$$

Conséquences :
Grâce à cette formule, $p = 5n - 2$, on peut savoir précisément quel joueur va gagner. En effet :

- Si p est pair, donc le nombre de coups est pair, alors celui qui commence perd
- Si p est impair, celui qui commence gagne.

Quelle que soit la façon de jouer, ce résultat marche à tous les coups.

Notes d'édition

[1] Dans les figures en dessous pour 2 points de départ, il aurait été utile d'indiquer explicitement l'ordre dans lequel les chemins ont été créés.

[2] La première phrase de ce commentaire n'est pas très claire : sur le dernier chemin créé, le point ajouté a nécessairement une connexion libre donc c'est un survivant, et les points aux extrémités du chemin sont des demi-morts. Pour la dernière phrase, il faut préciser qu'il n'y a pas de garantie qu'on puisse arriver à une situation sans point mort – ou du moins ce n'est pas démontré ici. On n'est donc pas sûr d'obtenir ainsi la longueur de la partie la plus courte ; on peut seulement affirmer qu'elle est supérieure ou égale à la valeur trouvée en supposant qu'il n'y a pas de point mort.

[3] Il semble qu'il y a ici une contradiction entre ces deux phrases. Mais la situation finale avec deux connexions libres n'est vraisemblablement pas celle d'une partie longue. Et, en supposant que le nombre de connexions libres à la fin de la partie est 1, on obtient un majorant du nombre de coups, de même qu'indiqué dans la note précédente pour la minoration.

[4] On voit que la formule est la même pour les graphes planaires que pour les polyèdres convexes en remplaçant la face extérieure infinie par une face finie qui referme la figure en un polyèdre. Mais ceci n'est valable que lorsque le graphe est connexe, c'est-à-dire que tous les sommets sont reliés entre eux directement ou indirectement.

[5] Avec le dernier chemin créé sur le bord d'une face, on a créé deux nouvelles connexions, et celle intérieure à la face reste libre. De plus, s'il y a deux connexions libres sur le bord d'une face, en sa direction, on peut encore les relier. Donc dans une situation finale il y a exactement une connexion libre par face, y compris la face extérieure.

Ceci montre aussi que dans une situation finale le graphe est connexe : si on peut séparer le graphe en deux parties non reliées, une face les joint avec de même une connexion libre vers cette face sur chacune des parties, et on peut encore tracer un chemin entre ces connexions.