les polyminos

par … des lycées Pablo Neruda de St Martin d'Hères et Emmanuel Mounier de Grenoble

enseignants : André Laur et Jean-Claude Oriol

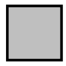
chercheur : Charles Payan, LSD2-IMAG

note du chercheur :

La problématique générale était celle du pavage de polyminos (c'est-à-dire de morceaux d'échiquier) par des polyminos plus petits : dominos, triminos …

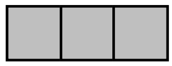
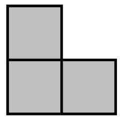
Les polyminos sont des figures formées de plusieurs minos, carrés de 1 sur 1, qui sont joints par leurs côtés.

exemples

1 mino 

1 domino 

1 trimino

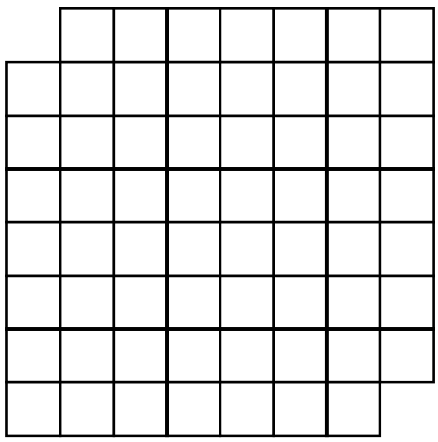
 ou 

Nos travaux se limitent à l'étude des dominos et des triminos.

les dominos

Le problème de l'échiquier tronqué

Le problème, tel qu'il nous a été posé, était de savoir si un échiquier (8 × 8) tronqué de 2 cases dans deux coins opposés était remplissable par des dominos.



N'étant encore que novices dans l'art du pavage nous décidâmes d'étudier d'abord des cas de figures qui nous semblaient plus simples, le cas de figures non tronquées.

Retour à des figures non tronquées

Le carré

Généralités

Les dominos, composés de 2 cases dont l'aire peut être considérée égale à 1, (l'unité de mesure de l'aire serait alors le mino) ont donc une aire égale à 2.

Une figure remplissable sera donc une figure comportant plusieurs dominos, donc d'aire 2 n ; l'aire des figures remplissables devra donc être paire.

Observation : les figures à aires impaires sont non remplissables

Remarque : les figures à aires paires ne sont pas forcément remplissables.

Exemple :

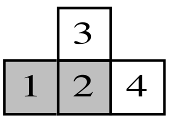
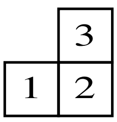


figure à aire paire (4 cases), mais non remplissable.

En effet, la présence de la “corne”, (une corne est une forme qui par sa présence rend une figure paire non remplissable) est la cause de l'impossibilité à remplir la figure. [NDLC : théorème = une forme qui rend la figure non remplissable rend la figure non remplissable ; démonstration = ?]



Si on place un domino dans les cases (1; 2), la case 3 est isolée et la figure est non remplissable.

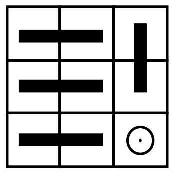
Si on place un domino dans les cases (2; 3), la case 1 est isolée ; la figure est non remplissable.

Etude du carré

Nous distinguons 2 cas possibles pour le carré :

1er cas : Le carré où le nombre de carreaux sur le côté est impair, c'est-à-dire de la forme $2\,n + 1$.

Exemple : (ici $2\,n + 1 = 3$)



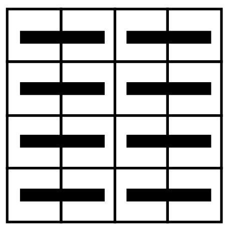
L'aire du carré est égale à $4n^2 + 4n + 1$ donc l'aire est impaire (nombre pair + 1).

Le carré dont le nombre de carreaux sur le côté est impair n'est pas remplissable.

2ème cas : Le carré où le nombre de carreaux sur le côté est pair, ou égal à 2n.

L'aire est paire et égale à $4n^2$. Cependant nous avons vu que la parité de l'aire ne suffit pas à montrer que la figure est remplissable ; il faut donc approfondir ce cas.

Exemple : (ici $2\,n = 4$)



bande de n dominos

Un carré est en fait la juxtaposition de 2 n bandes de n dominos. Une bande de n dominos étant remplissable, 2 n bandes de n dominos seront remplissables.

Le carré d'aire paire est remplissable.

Le rectangle

Pour le rectangle nous distinguons 3 cas.

1er cas : longueur et largeur sont impaires.

$$L = 2n + 1 \; ; \; l = 2n' + 1 \; ; \; n > n'$$

L'aire est égale à

$$(2n+1)(2n'+1) = \underbrace{4nn' + 2n + 2n'}_{\text{pair}} \underbrace{+\,1}_{+\text{ impair}}$$

L'aire est impaire donc *le rectangle n'est pas remplissable*.

2èmex cas : longueur et largeur sont paires.

$$\text{Longueur} = 2\,n \; ; \; \text{largeur} = 2\,n'$$

L'aire est égale à 4 n n' et elle est donc paire. De plus ce rectangle se trouve être une juxtaposition de 2 n' bandes de n dominos.

Donc *ce rectangle est remplissable*.

3ème cas : une des deux mesures est paire, l'autre impaire. [NDLR : Les quelques lignes qui suivent sont assez peu claires. Pour ces élèves *longueur* et *largeur* ne semblent pas jouer le même rôle. Ceci les empêche sans doute de voir que, comme dans le cas précédent, le rectangle est l'union de bandes paires. Par ailleurs le *rectangle* n'est pas perçu comme une généralisation du *carré* (on retrouvera également ceci plus loin).]

Exemple : longueur = 2 n + 1 ; largeur = 2 n'

L'aire est paire et égale à 4 n n' + 2 n'.

Ce rectangle est en fait une juxtaposition de bandes contenant n dominos et 1 case, la case seule de la bande d'en dessous ; comme il y a 2 n' bandes successives, il y aura n' couples de cases seules, donc n' dominos.

La figure est remplissable.

On a donc :

[NDLR : Le statut de *théorème* ainsi que la formulation suivante on été introduits par le chercheur. Les mots *remarque*, *conclusion*, *observation*, *proposition, …* ont souvent des sens assez flous et plus ou moins interchangeables.]

Théorème 1 : Un rectangle ayant au moins un côté pair est remplissable.

Les figures tronquées étant des figures simples privées d'une ou plusieurs cases, leur étude vient donc naturellement après ce paragraphe.

Echiquier tronqué

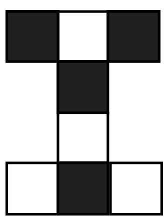
Introduction de la couleur

Un échiquier est coloré grâce à des cases noires et blanches disposées en damier. Un domino, représentant 2 cases de damier se touchant par un côté, sera donc tout naturellement composé d'une case noire et d'une case blanche.

Domino :

Alors deux remarques s'imposent :
— une figure est remplissable uniquement s'il y a autant de cases noires que de cases blanches,
— une figure ayant autant de cases noires que de blanches n'est pas obligatoirement remplissable.

Exemple :

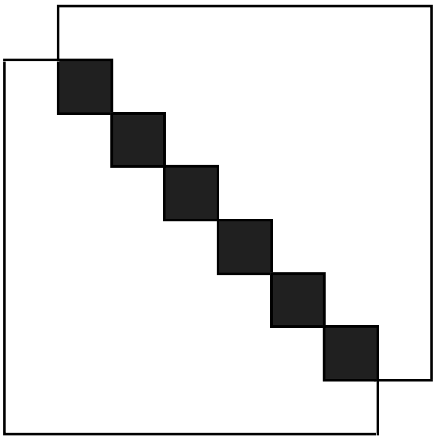


4 cases blanches, 4 cases noires

On peut vérifier que l'exemple donné ici n'est pas remplissable, en examinant tous les essais de remplissage possibles. [NDLR : Il aurait été intéressant de fournir une preuve.]

Echiquier tronqué — Résolution du problème

Les 2 cases enlevées sont de même couleur. En effet, par la symétrie ayant pour centre le centre de l'échiquier on passe d'une case à une autre de même couleur. Par symétrie on passe de l'une à l'autre des cases enlevées.



Les 2 cases enlevées sont donc de même couleur. L'échiquier tronqué a alors 32 cases d'une couleur et 30 cases de l'autre.

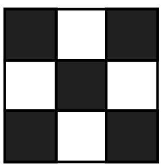
Autres cas

Si on enlève 2 cases de la même couleur au hasard, la figure est non remplissable (raison précédente).

Par contre, si les 2 cases sont de couleurs différentes, nous conjecturons que c'est toujours remplissable, mais tous les cas n'ont pas été examinés.

Carré à aire impaire tronqué d'une case

Nous partons au départ du carré de 3 sur 3 qui sera la base de notre démonstration.

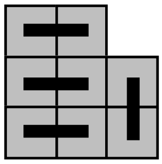


Un carré d'aire impaire possède toujours n cases d'une couleur et n+1 d'une autre. Ici 5 cases noires et 4 cases blanches.

Si on enlève 1 case blanche il y a plus de noires que de blanches, donc la figure est non remplissable.

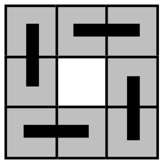
Nous enlèverons donc toujours une case noire, et distinguons 2 cas.

— Une case noire d'un des coins est enlevée.



La figure est remplissable.

— La case du milieu est enlevée.

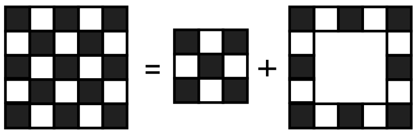


La figure est remplissable.

Nous avons démontré que le carré de 3 x 3 est remplissable si on enlève une case de la couleur majoritaire. [NDLC : La formulation initiale était : "nous admettons donc que"]

Nous allons maintenant étendre cette constatation au carré de 5.

Le carré de 5 × 5 est en fait un carré de 3 × 3 auquel on a ajouté une "bande" de dominos.



Si au départ on a un carré de

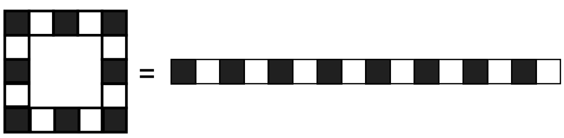
$$(2\,n + 1) \times (2\,n + 1),$$

la bande rajoutée comporte

$$2\,(2\,n + 3) + 2\,(2\,n + 1) \text{ cases,}$$

elle a donc une aire paire et remplissable.

Rectangle de $1 \times (2 \times (2\,n + 1) + 2 \times 2\,n + 3)$

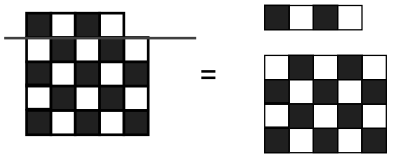


Si on enlève une case noire du carré de dimension 3, celui-ci devient remplissable. Comme la bande est remplissable, le carré de 5 × 5 devient remplissable.

Il convient maintenant d'observer les cas où on enlève 1 case noire de la bande rajoutée.

Il y a alors 2 cas : une case noire d'un coin, ou une case noire de milieu de segment.

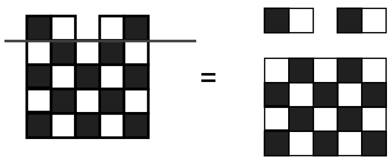
1er cas : On peut diviser la figure en deux parties.



1 bande de 2 dominos (partie remplissable)
1 rectangle de (2 n × 2 n + 1) à aire paire, (ici rectangle de 4 x 5) remplissable.

Les 2 parties sont remplissables, *le carré tronqué est remplissable*.

2ème cas : Même méthode.



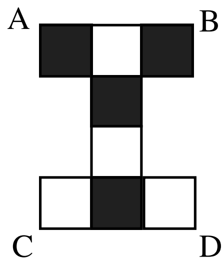
2 bandes de longueur paire donc remplissables.
1 rectangle de (2 n × 2 n + 1) à aire paire, (ici rectangle de 4 × 5) remplissable.

Les 2 parties sont remplissables, *le carré tronqué est remplissable*.

La méthode est la même pour les autres carrés.

Théorème. Un carré d'aire impaire tronqué d'une case de la couleur la plus représentée est remplissable.

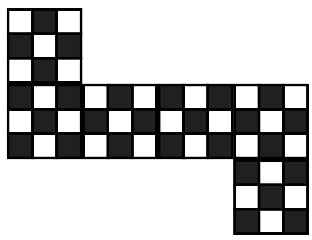
Surfaces latérales de cubes



En observant que la figure ci-dessus devenait remplissable si AB et CD se retrouvaient collés bord à bord, nous nous sommes demandé ce qui arriverait si nous pouvions tordre le plan de manière à remplir des figures d'aire paire non remplissables dans le plan.

C'est ainsi que nous avons commencé à étudier le pavage, par des dominos *plans*, de la surface latérale d'un cube de longueur d'arête impaire (pour fixer les idées prenons 3). Pour cela on réalise plusieurs "patrons" du cube, (un patron est une disposition à plat du cube). Grâce à un patron on peut remonter le cube. Il existe 12 patrons différents, certains sont remplissables d'autres pas.

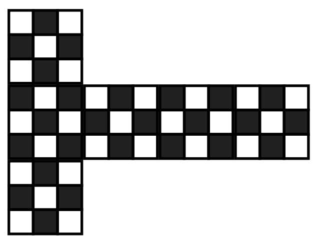
1er cas :



3 faces avec 5 noires et 4 blanches
3 faces avec 5 blanches et 4 noires

Il y a autant de blanches que de noires, les carrés forment un rectangle remplissable. Donc *le patron est remplissable*.

2ème cas :



4 faces à 5 blanches et 4 noires
2 faces à 5 noires et 4 blanches

Il y a plus de case blanches que de noires, *ce patron est non remplissable*.

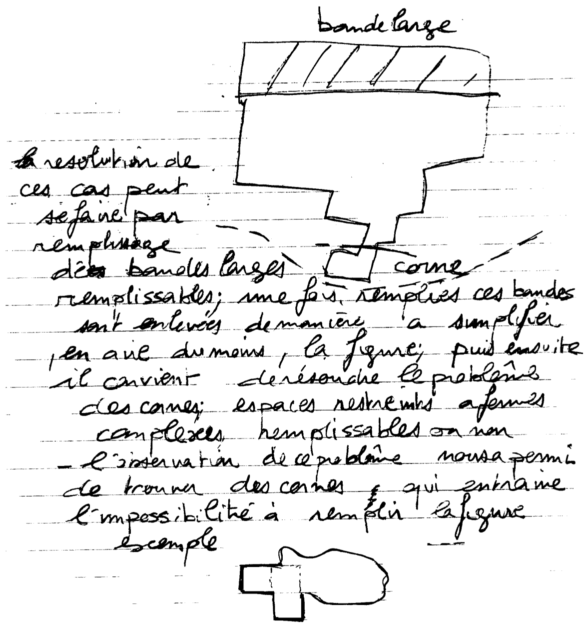
Pour l’instant l’étude de ces cas n’a rien apporté de très concluant, de plus nous nous heurtons à des problèmes de temps et de logique. En effet, une fois “remonté”, le patron donne 1 cube où 2 faces de même couleur se touchent obligatoirement.

“Espaces larges”

Après avoir observé des cas de remplissage à “petite échelle”, on peut se demander ce qui se passe à “grande échelle”.

Les espaces larges seraient des formes très vastes et très complexes dont le remplissage serait à première vue très complexe.

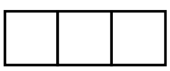
[NDLC : un petit bout de l'original, merci le scanner !]



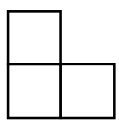
la résolution de ces cas peut se faire par remplissage des bandes larges remplissables; une fois remplies ces bandes sont enlevées de manière à simplifier, en aire du moins, la figure; puis ensuite il convient de résoudre le problème des cornes; espaces restreints à formes complexes remplissables ou non
– l'observation de ce problème nous a permis de trouver des cornes qui entraine l'impossibilité à remplir la figure
exemple

les triminos

Ils existent sous deux formes :



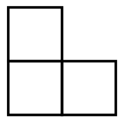
ou



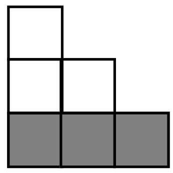
Nous avons surtout étudié le pavage des escaliers par les triminos.

escaliers et triminos.

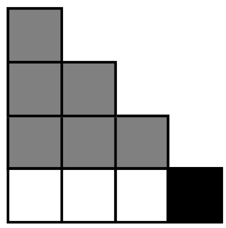
* Le plus petit escalier est l’escalier de 2, c’est en fait un trimino en “L”, il est donc remplissable.



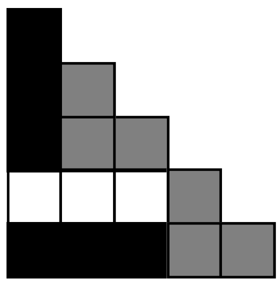
* L’escalier de 3, lui, est un escalier de 2 auquel on ajoute une marche de 3 carreaux, un trimino droit. L’escalier de 3 est donc remplissable.



* L’escalier de 4 est alors 1 escalier de 3 + 1 trimino + 1 mino. Il n’est donc pas remplissable.



* L’escalier de 5 est remplissable :



* L’escalier de 6 est un escalier de 5 auquel on ajoute 2 triminos. L’escalier de 6 est remplissable.

* Pour l’escalier de 7 le problème est le même que pour celui de 4 : 2 triminos ajoutés + 1 mino. Cet escalier n’est pas remplissable.

Et ainsi de suite …

Par conséquent, les escaliers de base *r* avec *r* = 3 n + 4 (n entier) ne sont pas remplissables par des triminos. Par contre tous les autres le sont.

Voilà, ainsi s'achève une année de recherche difficile mais ô combien intéressante ; malgré le froid, la faim, la diète, la perte de 50 % des effectifs en cours de route, nous avons essayé de traiter au mieux notre sujet.

Nous espérons ne pas avoir endormi ou réveillé les pauvres lecteurs et souhaitons bon courage, ils en auront besoin, aux futurs chercheurs de MATh.en.JEANS.

Enfin, la moitié du groupe vous donne rendez-vous l'année prochaine (?) ; pour d'autres, qui espèrent avoir leur Bac, l'aventure s'achève, après bien des péripéties.

quelques commentaires du chercheur … dont certains ont été suivis d'effet, mais pas tous :

Pavage de carrés, rectangles.

Faire "plus court" en traitant les rectangles (plus généraux que les carrés). Rédiger plus rapidement :
— Les 2 dimensions sont impaires d'où le nombre de cas est impair, d'où impossibilité.
— Une (au moins) des 2 dimensions est paire. Montrer que l'on peut couvrir chaque "bande" paire, donc tout le rectangle.

Coloration des cases.

Colorer en "damier" : 2 cases voisines qui se touchent par un côté sont de couleurs différentes.

Enoncer le résultat sous forme de :

théorème : "Une figure (un polymino) n'est remplissable que s'il y a autant de cases noires que de cases blanches."

et

remarque : Cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Carré impair moins une case.

Vous montrez essentiellement que les carrés 3×3 et5×5 sont remplissables. Il faut :
— Soit montrer que le passage 3 à 5 se généralise et permet de passer de 2 n + 1 à 2 n + 3,
— soit faire directement une démonstration valable dans le cas général.

Patrons de cube.

Il me semblait que vous aviez proposé la conjecture suivante :

"Un patron de cube (de côté > 1) est pavable si et seulement si il a autant de cases noires que de blanches".

Conjecture qui s'étendra aux "espaces larges".

Espaces larges.

On peut définir la largeur d'un polymino comme la longueur du plus petit segment reliant deux points de l'extérieur (à préciser). Un espace "large" est un polymino dont la largeur est ≥ à une certaine valeur.

Cette partie du travail a été effectuée par l'autre groupe [NDLC : dont nous n'avons pas d'écrit] ; le groupe qui rédige ici ne s'est pas vraiment approprié ce travail.