POLYGONE SUR UN QUADRILLAGE

année 2011-2012

Elèves de 3ème :
DELAET Alain, PICHON Eric et THOMAS Jean.
Etablissement :
collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91 402 Orsay Cedex.

Enseignantes :
ASSELAIN-MISSENARD Claudie et FERRY Florence.
Chercheuse :
AGUILLON Nina

Le sujet :
On trace un polygone dont les sommets correspondent à des points d'une feuille de papier pointé quadrillé.
- Peut-on trouver l'aire du polygone grâce au nombre de points à l'intérieur et sur le bord de celui-ci ?
- Que se passe-t-il avec un autre pavage ?

Dans ce qui suit, nous noterons en indice du polygone concerné :
- b, le nombre de points du quadrillage se trouvant sur les bords du polygone.
- i, le nombre de points du quadrillage se trouvant à l'intérieur au polygone.
- A l'aire du polygone.

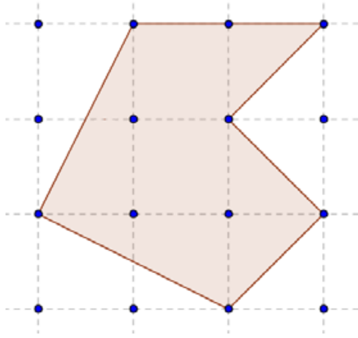
Ainsi, pour un polygone nommé P, P_b sera le nombre de points du quadrillage situés sur les bords de P.

Dans les parties 1. et 2., nous prendrons comme unité de surface l'aire d'un carré formant le pavage.

1. Recherche d'une formule sur des exemples

Nous avons commencé par tracer différents polygones ; voici quelques uns de nos exemples :

Exemple 1 :



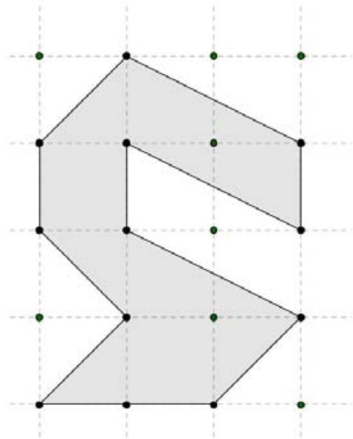
$b = 7$

$i = 3$

$A = 5{,}5$

fig1

Exemple 2 :



$b = 12$

$i = 2$

$A = 7$

fig2

Après plusieurs essais, nous avons trouvé une formule qui reliait A avec b et i qui semblait convenir : $A = i + \frac{b}{2} - 1$

Dans l'exemple 1 : $3+\frac{7}{2}-1=5{,}5$.

Dans l'exemple 2 : $2+\frac{12}{2}-1=7$.

Il restait à démontrer cette formule, connue sous le nom de « la formule de Pick » !

2. Démonstration.

a) Cas du rectangle

Nous allons nommer R un rectangle dont les côtés sont alignés avec le quadrillage, x le nombre de points sur une de ses longueurs et y le nombre de points sur l'autre.

Voici une figure représentant le rectangle en question :

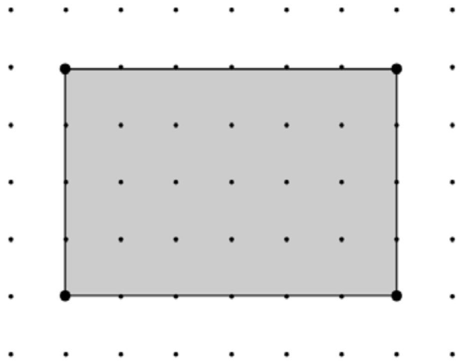


fig3

On sait que l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur par la largeur.
La largeur du rectangle est égale au nombre de segments sur celle-ci, soit le nombre de points réduit de 1. De même pour la longueur.
Donc l'aire du rectangle est :

$$R_a = (x-1)(y-1)$$

Le nombre de points à l'intérieur du rectangle est :

$$R_i = (x-2)(y-2) = xy - 2x - 2y + 4$$

Le nombre de points sur les bords du rectangle est égal au double de la somme des nombres de points sur la largeur et la longueur diminués de quatre car les sommets ont été comptés deux fois :

$$R_b = 2(x+y) - 4 = 2x + 2y - 4$$

$$R_a = (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1$$

On ajoute des termes (nuls) tout en gardant l'égalité :

$$R_a = xy - x - y + 1 + x - x + y - y + 4 - 4$$

$$R_a = xy - 2x - 2y + 4 + x + y - 3$$

$$R_a = (xy - 2x - 2y + 4) + \frac{2x + 2y - 4}{2} - 1$$

Donc :

$$R_a = R_i + \frac{R_b}{2} - 1$$

Ce qui démontre notre formule pour les rectangles alignés sur le pavage.

b) <u>Cas du triangle rectangle</u>

Nous allons nommer *TR* le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont alignés avec le quadrillage, et *k* le nombre de points du quadrillage se trouvant sur l'hypoténuse excepté les sommets de *TR*.
Voici une figure représentant le triangle en question :

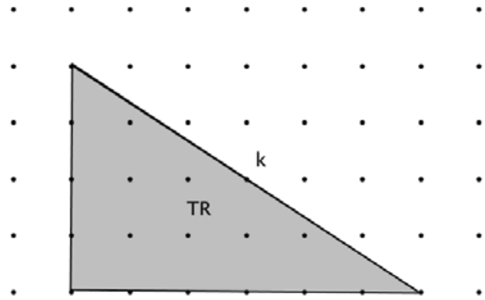


fig4

Comme nous savons que l'aire d'un triangle rectangle est égale à la moitié de l'aire d'un rectangle formé en dupliquant ce triangle, on peut déterminer que :

$$TR_a = \frac{R_a}{2} = \frac{R_i + \frac{R_b}{2} - 1}{2}$$

On définit R_i et R_b :

$$R_i = TR_i \times 2 + k$$

(o*n ajoute k, parce qu'il faut compter les points de l'hypoténuse*). (1)

$$R_b = TR_b \times 2 - 2 - 2k$$

On soustrait les points de l'hypoténuse car ils ne font pas partie du bord du rectangle et 2 sommets d'un des deux triangles car ils ont été comptés deux fois.

On substitue :

$$TR_a = \frac{TR_i \times 2 + k + \frac{TR_b \times 2 - 2 - 2k}{2} - 1}{2}$$

$$TR_a = \frac{TR_i \times 2 + k + TR_b - 1 - k - 1}{2}$$

Après simplification, on obtient :

$$TR_a = TR_i + \frac{TR_b}{2} - 1$$

Notre formule est donc démontrée pour ces triangles rectangles.

c) Cas d’un triangle quelconque

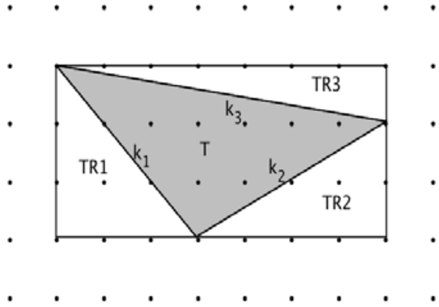


fig5

Dans cette figure, on nomme k_1 , k_2 et k_3 le nombre de points sur les bords du triangle excepté les sommets. On nomme *TR1* , *TR2* et *TR3* , les trois triangles rectangles complétant le triangle *T* permettant de former un rectangle *R* aligné avec le quadrillage.

On a :

$$T_a = R_a - TR1_a - TR2_a - TR3_a$$

$$T_a = R_i + \frac{R_b}{2} - 1 - \left(TR1_i + \frac{TR1_b}{2} - 1\right) - \left(TR2_i + \frac{TR2_b}{2} - 1\right) - \left(TR3_i + \frac{TR3_b}{2} - 1\right)$$

De plus on a :

$$T_i = R_i - TR1_i - TR2_i - TR3_i - k_1 - k_2 - k_3$$

et :

$$T_b = R_b - TR1_b - TR2_b - TR3_b + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 6$$

On ajoute $k_1 - k_1, k_2 - k_2, k_3 - k_3$ et 3 – 3 .

Ce qui nous donne :

$$T_a = R_i - TR1_i - TR2_i - TR3_i \frac{+ R_b - TR1_b - TR2_b - TR3_b}{2} - k_1 + k_1 - k_2 + k_2 - k_3 + k_3 + 3 - 3 + 2$$

On regroupe judicieusement :

$$T_a = R_i - TR1_i - TR2_i - TR3_i - k_1 - k_2 - k_3 - 1 + \frac{R_b - TR1_b - TR2_b - TR3_b + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 6}{2}$$

Ce qui nous donne :

$$T_a = T_i + \frac{T_b}{2} - 1$$

Notre formule est démontrée pour tous les triangles.

d) Généralisation (2)

Afin de généraliser cette formule, on va démontrer que si elle est vraie pour un polygone et que l'on rajoute un point (donc un triangle), la formule reste vraie pour le nouveau polygone formé. Ainsi, la formule sera démontrée pour tous les polygones. (3)

Soit *PI* le polygone initial, *PF* le polygone final et *T* le triangle ajouté. Soit *k* le nombre de points sur le côté commun de *T* et de *PI* excepté les sommets du polygone *PF*.

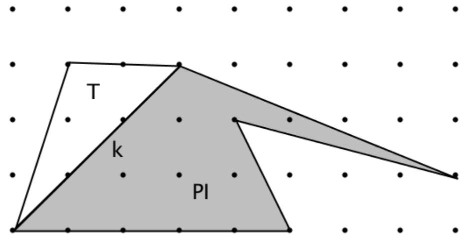


fig6

On a :

$$PF_a = PI_a + T_a$$
$$PF_b = PI_b + T_b - 2k - 2$$
$$PF_i = PI_i + T_i + k$$

La formule étant vraie pour *PI* et *T*, on a :

$$PF_a = PI_a + T_a = PI_i + \frac{PI_b}{2} - 1 + T_i + \frac{T_b}{2} - 1$$

$$PF_a = PI_i + T_i + \frac{PI_b + T_b}{2} - 2$$

On insère *k* :

$$PF_a = PI_i + T_i + \frac{PI_b + T_b}{2} - 2 + k - k$$

$$PF_a = PI_i + T_i + k + \frac{PI_b + T_b - 2k}{2} - 2$$

$$PF_a = PI_i + T_i + k + \frac{PI_b + T_b - 2k - 2}{2} - 1$$

Donc :

$$PF_a = PF_i + \frac{PF_b}{2} - 1$$

Notre formule est démontrée !

3. Autres pavages

a) Pavage isométrique

Le pavage isométrique est un pavage qui se compose de triangles équilatéraux.

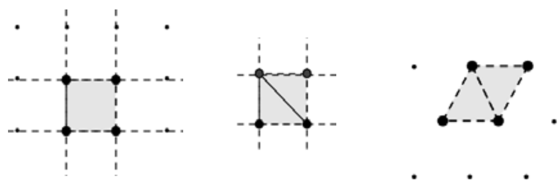


fig7et8

Pour passer du pavage cartésien au pavage isométrique, il faut diviser les carrés par la diagonale de façon à obtenir un triangle. En le déformant, on obtient un triangle équilatéral. Si on choisit comme unité l'aire d'un triangle, celle-ci est deux fois plus petite que pour le pavage cartésien. L'aire en est donc doublée :

$$A = 2i + b - 2$$

L'aire d'un polygone dont les sommets sont sur les points d'un pavage isométrique est donc égale à la somme du double du nombre de points à l'intérieur et du nombre de points sur les bords diminuée de 2.

b) Pavage de l'espace

Nous avons cherché à trouver une formule pour trouver le volume d'un polyèdre dont les sommets se trouveraient sur les points d'un pavage de l'espace. Nous avons, cette fois, trois données à prendre en compte : les points intérieurs, les points sur les arêtes et les points sur les faces (excepté ceux sur les arêtes).

Nous avons trouvé des contre-exemples : deux polyèdres ayant des données identiques mais qui avaient des volumes différents. Nous en avons conclu qu'il n'y avait pas de formules. (4)

c) Pavage Hexagonal

De même que pour le pavage dans l'espace, nous avons trouvé des contre-exemples (données de points identiques mais aires différentes) avec le pavage hexagonal qui permettent d'affirmer qu'il n'y a pas de formule. (5)

Notes d'édition

(1) *k* n'est pas clairement défini. Il s'agit des points situés sur l'hypoténuse excepté les extrémités.

(2) le fait de *rajouter un point* n'est pas très clair, mais la figure 6 éclaire le propos.

(3) La formule sera alors démontrée pour tous les polygones car un polygone quelconque dont les sommets sont les points du quadrillage peut être découpé en triangles et rectangles dont les sommets sont des points du quadrillage.

(4) Un contre-exemple aurait pu être donné.

(5) Un contre-exemple simple est obtenu dans le cas de 3 points sur le bord et aucun point à l'intérieur.