Découpage de polygones de même aire

Année 2014- 2015

Élèves : Rahul SINHA, Valentin SCHMIT, Elwan LEGALL, Robin DIDIERLAURENT, élèves de 5ème

Établissement : Collège Saint-Dominique à Nancy (54)

Enseignants : Mme Véronique DUPUITS – M. Hervé VAN POUCKE

Chercheur : M. Bruno DUCHESNE – IECL Nancy (Université de Lorraine)

Sujet :

Si on a deux polygones de même aire, peut-on en découper un pour reformer l'autre ?

Cela est possible !
Voilà pourquoi :

Introduction :

Pour prouver que nous pouvons toujours découper un polygone pour le superposer sur un autre de même aire, il nous faut d'abord le superposer sur un rectangle de 1 cm de largeur (ou de largeur 1 mm ou encore moins pour les polygones ayant une aire inférieure à 1 cm²). Pour cela il faut d'abord suivre plusieurs étapes.

Étape 1 : Du polygone aux triangles

Pour découper un polygone convexe en triangles, il faut **(1)** choisir un sommet et le relier aux autres sommets.

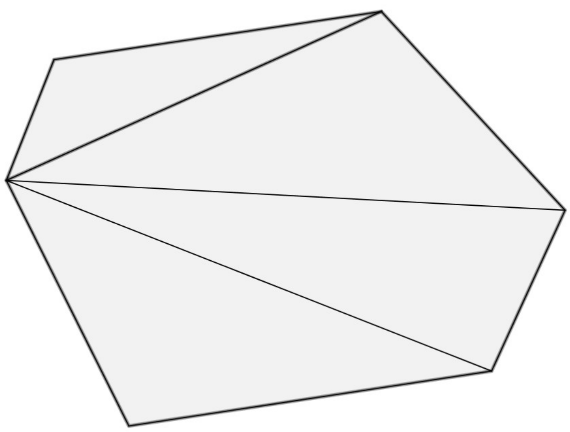


fig 1: Polygone convexe **(2)**

Par contre, pour un polygone non convexe, c'est-à-dire pour lequel un segment joignant deux sommets peut se trouver à l'extérieur du polygone, il faut **(1)** d'abord le découper en polygones convexes pour appliquer ensuite la technique précédente à chaque polygone convexe obtenu.

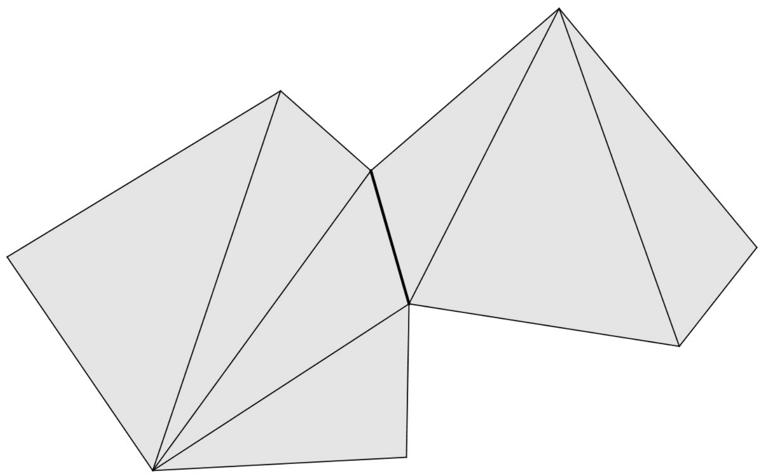


fig.2 : Polygone non convexe **(3)**

Nous observons que :
le nombre minimal de triangles que l'on peut découper dans un polygone à n côtés est égal à n-2. **(4)**
Dans un polygone convexe à n côtés :
On choisit un sommet du polygone et on peut le relier par un segment à n-3 sommets, ce qui nous donne n-2 triangles.

Dans un polygone non convexe à n côtés :
On appelle y le nombre de segments tracés pour découper le polygone en polygones convexes.
Le nombre total des côtés des polygones obtenus est n+2y ; il faut ajouter 2y car un segment tracé pour obtenir des polygones convexes est un côté commun à deux polygones.
Dans chaque polygone convexe obtenu, on choisit un sommet commun à deux polygones et on le relie à tous les autres sommets de ce polygone. On obtient ainsi : n+2y-2(y+1) triangles. **(5)**
Nous développons :
T=n+2y-2(y+1)
T=n+2y-(2y+2)
T=n-2

On a prouvé que dans un polygone à n côtés, convexe ou non, on peut découper n-2 triangles.

Étape 2 : du rectangle au triangle (6)

À partir d'un triangle, on pourra toujours le découper pour obtenir un rectangle avec cette technique :
Il faut tracer une hauteur puis la médiatrice de celle-ci et utiliser une symétrie centrale des

triangles rectangles obtenue par rapport au point d'intersection de la médiatrice et des côtés du triangle.

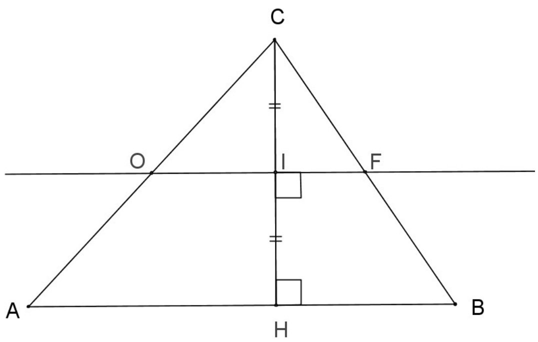


fig. 3

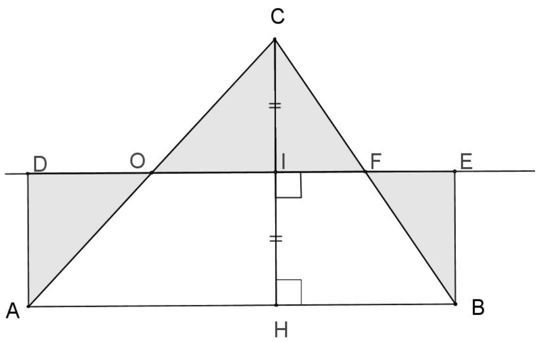


fig. 4

Pour cela nous devons prouver que la médiatrice coupe les côtés du triangle en leur milieu, c'est-à-dire que O est le milieu de [AC] et F est le milieu de [BC].

Montrons que (OF) est parallèle à (AB) :
(CH) est la hauteur issue de C du triangle ABC donc (CH) est perpendiculaire à (AB).
(OF) est la médiatrice de [CH] donc (OF) est perpendiculaire à (CH).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles.
Donc (OF) et (AB) sont parallèles.

Or, si dans un triangle, une droite coupe un coté en son milieu et est parallèle à une deuxième coté, alors elle coupe le troisième coté en son milieu.
Dans le triangle BCH, (OF) passe par le milieu de [CH] et est parallèle à (BH) donc F est le milieu de [BC].
De même, dans le triangle ACH, O est le milieu de [AC].

L'image du triangle FIC rectangle en I par la symétrie centrale de centre F est le triangle FEB rectangle en E.
L'image du triangle CIO rectangle en I par la symétrie centrale de centre O est le triangle ADC rectangle en D.

Comme la symétrie centrale conserve les mesures, le triangle ABC et le rectangle ADEB ont la même aire.

Étape 3 : D'un rectangle à un autre rectangle

Méthode : **(7)**
Pour transformer un rectangle en un autre rectangle de même aire, il faut reporter les mesures du rectangle final sur le rectangle de départ. Si le rectangle de départ a une longueur plus grande que le rectangle final, il faut reporter la longueur du rectangle final sur celui de départ et tracer une droite perpendiculaire à cette longueur passant par le point reporté. Placer ensuite le rectangle qu'il y a en trop sur la longueur du rectangle final. Si le rectangle de départ a la longueur la plus grande, alors faites les étapes inverses.

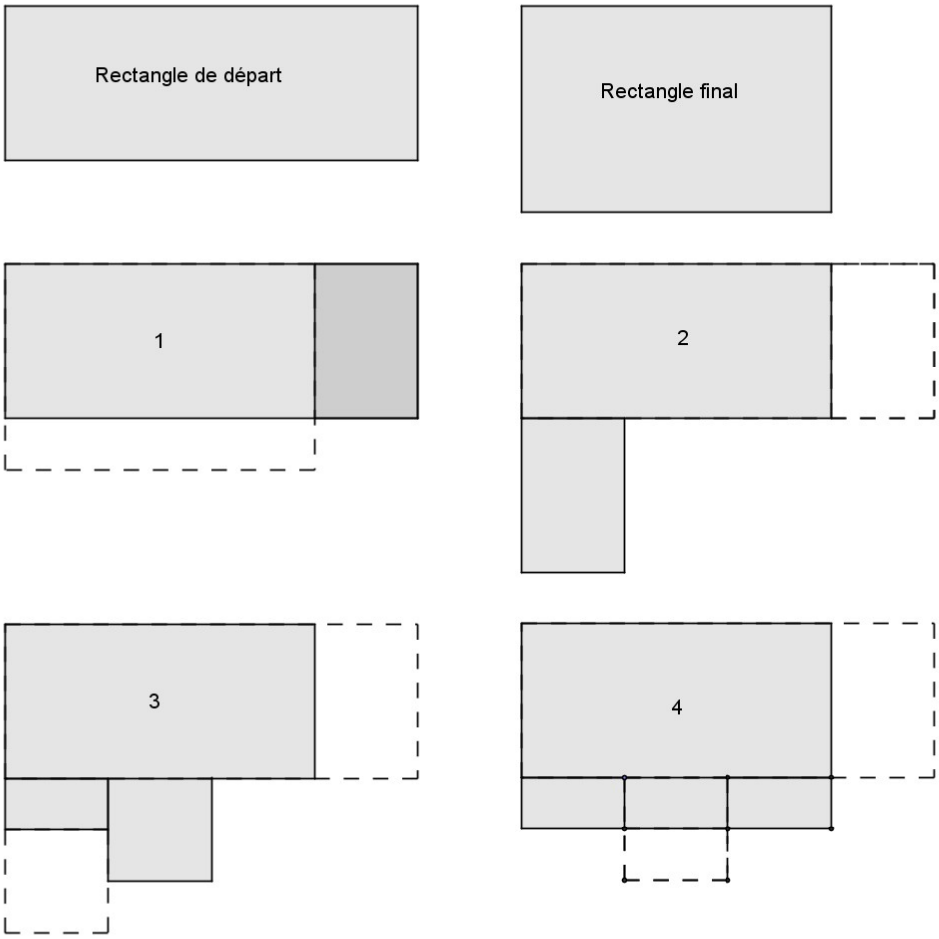


fig.5 **(8)**

On recommence plusieurs fois pour obtenir un rectangle de 1 cm de largeur.

Conclusion :
N'importe quel polygone peut être découpé pour obtenir un rectangle de 1 cm de largeur. Pour cela il faut le découper en triangles, transformer chaque triangle en rectangle puis en rectangle de 1 cm de largeur et mettre les rectangles de 1 cm de largeur bout à bout.

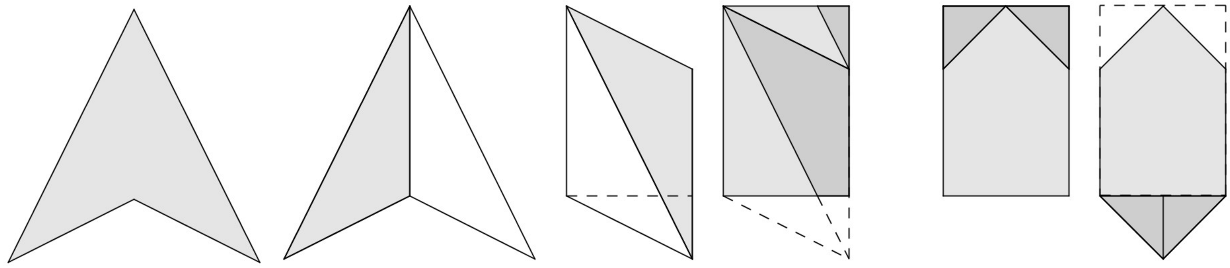
Pour passer d'un polygone à l'autre il suffit de savoir découper chaque polygone en un rectangle de 1 cm de largeur (ils auront alors la même longueur) et de passer du premier polygone à un rectangle de 1 cm de largeur et d'appliquer la méthode inverse pour retrouver l'autre polygone.

Donc il est toujours possible de découper un polygone pour recouvrir un autre polygone de même aire.

Exemples de découpages

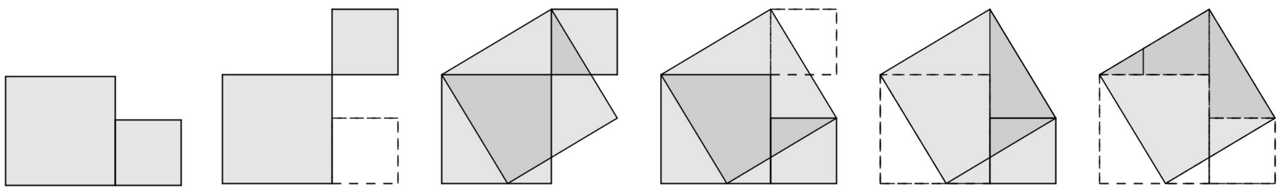
En général, nous n'avons pas besoin d'aller jusqu'au rectangle de 1cm de largeur pour obtenir le polygone final, comme dans ces exemples.

<u>Exemple 1</u> : De la flèche à l'hexagone



fig, 6

<u>Exemple 2</u> : De deux carrés vers un carré



fig, 7

<u>Notes d'éditions :</u>
(1) On devrait plutôt dire ici « il suffit de ». En effet, le lecteur pourra se convaincre qu'il est possible de réaliser un tel découpage de différentes façons.
(2) Plus précisément "Découpage en triangles d'un polygone convexe".
(3) Plus précisément "Découpage en triangles d'un polygone non convexe".
(4) La "minimalité" n'est pas prouvée, et n'est pas nécessaire dans la suite. Il faudrait plutôt dire "On peut toujours découper un polygone à n côtés en n-2 triangles".
(5) Il est utile de remarquer ici que si nous découpons le polygone non convexe en utilisant y segments alors nous obtenons y+1 polygones convexes. Pour s'en convaincre, traçons ces segments un à un : chaque segment crée un nouveau polygone convexe… et le dernier segment en crée deux !
Comme chaque polygone convexe est ensuite découpé en un nombre de triangles égal à son nombre de côtés moins 2, on obtient bien au total n+2y–2(y+1) triangles.
(6) Ici, ce serait plutôt "du triangle au rectangle".
(7) Le paragraphe ne décrit pas complètement la méthode qui est cependant bien illustrée par la figure 5 (étapes 3 et 4).
(8) D'un rectangle à un autre rectangle.