Polyèdres réguliers

[Année 2014- 2015]

Élèves : Victor DALLE, Nicolas FRACHE, Laura CRAVE, Ghislain BENARD, Maurice-Michel DIDELOT élèves de 4ème

Établissement : Collège Saint-Dominique à Nancy (54)

Enseignants : Mme Véronique DUPUITS – M. Hervé VAN POUCKE

Chercheur : M. Bruno DUCHESNE – IECL Nancy (Université de Lorraine)

Sujet : **Quels sont tous les polyèdres réguliers ?**

Nous avons pu démontrer qu'il existe un nombre fini de polyèdres réguliers et en avons donné la liste.

1. Définitions

Définition 1 : Un polyèdre régulier est un solide convexe dont les faces sont des polygones réguliers est tel que chaque sommet est commun à un même nombre de faces.

Définition 2 : Un polygone régulier est une figure convexe inscrite dans un cercle dont tous les côtés ont la même longueur.

Définition 3 : Une figure (un solide) est convexe lorsque tout segment reliant deux points quelconque de la figure (ou du solide) se situe entièrement à l'intérieur de la figure (ou du solide).

2. Recherche empirique

Pour commencer, nous avons voulu construire des polyèdres réguliers. Pour cela, il fallait construire les faces, c'est-à-dire des polygones réguliers. Nous avons décidé de construire des polygones réguliers de 3 à 18 côtés.

a. Construction d'un polygone régulier

On note *n* le nombre de côtés du polygone régulier. *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On note A_1, A_2, …, A_n les sommets du polygone. Ce polygone est inscrit dans un cercle de centre O.

On note α l'angle au centre $\widehat{A_1 O A_2}$. On a donc $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ (1)

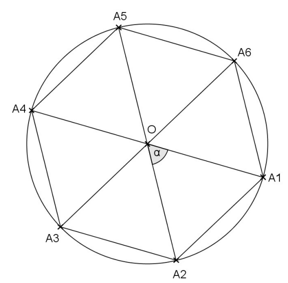

figure 1 : angle au centre

Le tableau ci-dessous présente les valeurs de l'angle α pour les premiers polygones réguliers :

Polygone	***n***	α	**Polygone**	***n***	α
Triangle	3	120°	Heptagone	7	≈51,4°
Carré	4	90°	Octogone	8	45°
Pentagone	5	72°	Ennéagone	9	40°
Hexagone	6	60°	Décagone	10	36°

Avec le logiciel de géométrie Geogebra, nous avons construit nos polygones réguliers de 3 à 18 côtés.

b. Construction des polygones réguliers

Après une longue séance de découpage de nos polygones, nous avons commencé la construction des polyèdres. Cela a nécessité beaucoup de patience de dextérité et de ruban adhésif ! Ci-contre 4 de nos réalisations. **(2)**

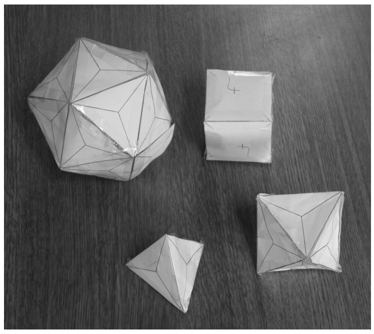

figure 2 : nos essais

c. Conjecture

Malgré tous nos efforts, nous n'avons jamais pu réaliser de polyèdre régulier convexe dont les faces sont des polygones à 6 côtés ou plus. Et seulement cinq polyèdres réguliers semblent réalisables (dont quatre sont visibles sur la photo ci-dessus).

3. La démonstration

a. Préambule

Pour construire un polyèdre, il faut que chaque sommet soit relié au minimum à trois faces.
Si les faces sont des triangles, des carrés ou des pentagones, trois polygones ayant un sommet commun laissent un espace qui permet de construire le polyèdre.

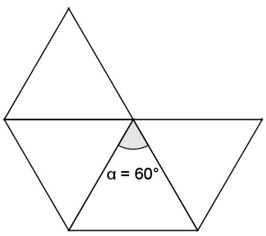

figure 3 : 4 triangles équilatéraux

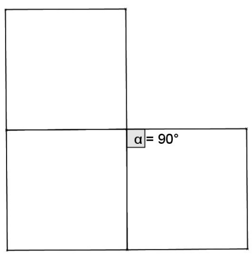

figure 4 : Trois carrés

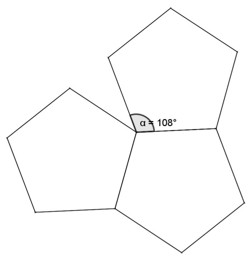

Figure 5 : trois pentagones

Par contre, trois hexagones avec un sommet commun forment une figure plane. Et avec un polygone de plus de 6 côtés, il y a chevauchement !

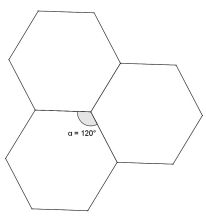

figure 6 : trois hexagones

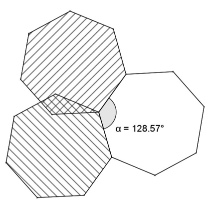

figure 7 : trois heptagones

b. Une histoire d'angles

Pour la démonstration, il est nécessaire de connaître l'angle aigu entre 2 côtés consécutifs d'un polygone.

On définit donc les angles β et γ (voir figure ci-contre). C'est l'angle γ qui nous intéresse.

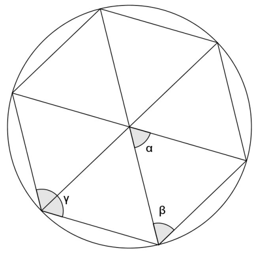

figure 8 : nom des angles

Le triangle OAB est isocèle en O. Les angles à la base $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont de même mesure. Comme dans un triangle la somme des angles vaut 180°, on a donc dans le triangle OAB :

$$\widehat{AOB}+\widehat{OAB}+\widehat{OBA}=180^\circ$$
$$\alpha+\beta+\beta=180^\circ$$
$$\beta=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$$

On obtient donc pour l'angle γ : $\gamma=2\beta=180^\circ-\alpha$

Le tableau ci-dessous présente les valeurs des 3 angles pour les polygones jusqu'à 7 côtés :

Polygone	**Triangle équilatéral**	**Carré**	**Pentagone Régulier**	**Hexagone Régulier**	**Heptagone régulier**
n	3	4	5	6	7
α	120°	90°	72°	60°	≈51,4°
β	30°	45°	54°	60°	≈64.3°
γ	60°	90°	108°	120°	≈128.6°

c. Détermination du nombre de polyèdres réguliers

Dans un polyèdre, on note *N* le nombre de faces reliées à un même sommet.
Tout d'abord, *N* est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Ensuite, pour que le polyèdre soit réalisable, il faut que . $N\gamma<360^\circ$ **(3)**

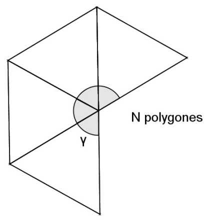

figure 9 : somme des angles à un sommet

Finalement, il faut que l'entier *N* vérifie les 2 conditions suivantes : . $\begin{cases} N\geqslant 3 \\ N<\frac{360}{\gamma} \end{cases}$

(1) Pour le **triangle**, $\gamma=60^\circ$, l'entier *N* doit vérifier le système : $\begin{cases} N\geqslant 3 \\ N<\frac{360}{60} \end{cases}$ soit $\begin{cases} N\geqslant 3 \\ N<6 \end{cases}$.

L'entier *N* peut donc prendre les trois valeurs 3 , 4 et 5. Trois polyèdres réguliers convexes à faces triangulaires sont réalisables. **(4)**

(2) Pour le **carré**, $\gamma = 90^\circ$, l'entier *N* doit vérifier le système : $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < \dfrac{360}{90} \end{cases}$ soit $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < 4 \end{cases}$.

L'entier *N* peut donc prendre la seule valeur 3. Un seul polyèdre régulier convexe à faces carrées est réalisable. **(5)**

(3) Pour le **pentagon**e, $\gamma = 108^\circ$, l'entier *N* doit vérifier le système : $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < \dfrac{360}{108} \end{cases}$ soit $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < \dfrac{10}{3} \end{cases}$

L'entier *N* peut donc prendre la seule valeur 3. Un seul polyèdre régulier convexe à faces pentagonale est réalisable. **(6)**

(4) Pour l'**hexagone**, $\gamma = 120^\circ$, l'entier *N* doit vérifier le système : $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < \dfrac{360}{120} \end{cases}$ soit $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < 3 \end{cases}$

Aucun entier *N* ne peut vérifier ces conditions. Aucun polyèdre régulier convexe à faces hexagonale n'est réalisable. Il en est de même pour les polygones a plus de six côtés. **(7)**

d. Conclusion

Il existe 5 polyèdres réguliers convexes dits polyèdres de Platon :

Trois polyèdres à face triangulaire

Le tétraèdre

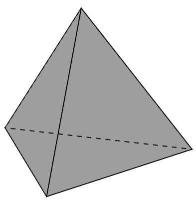

figure 10

L'octaèdre

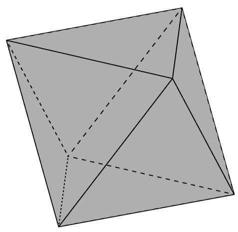

figure 11

L'icosaèdre

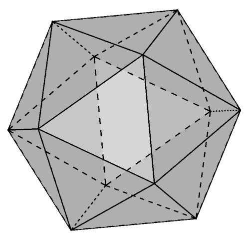

figure 12

Un polyèdre à face carré

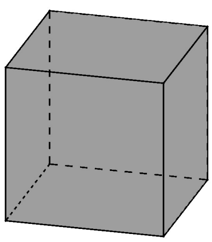

figure 13

Le cube

Un polyèdre à face pentagonale

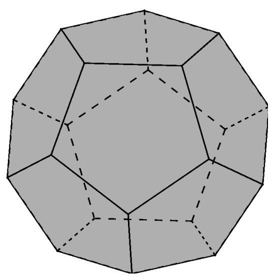

figure 14

Le dodécaèdre

Notes d'édition :

(1) On peut remarquer que tous les triangles construits à la figure 1 sont isocèles et identiques entre eux. On utilise ici un résultat de la géométrie plane, connue sous le nom de théorème de l'angle au centre. L'intuition est que, comme pour le triangle équilatéral, on peut diviser tout polygone régulier à *n* côtés en *n* triangles isocèles ayant pour sommet commun le centre O. La somme des angles de ces triangles en O doit donc faire 360°.

(2) Dont trois avec n=3 et une avec n=4.

(3) L'angle γ définit dans la section 3.b est l'angle entre deux côtés consécutifs d'un polygone. Il est aussi appelé angle au sommet. En considérant les N faces reliées à un même sommet, on peut calculer la somme des angles à un sommet via la formule N γ . On admet ici le fait (intuitif, expliqué en préambule) que cette somme doit être inférieure à "un tour complet", soit 360°.

Une autre démonstration repose sur la formule d'Euler, qui relie le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pour tout polyèdre régulier.

(4) Voir les figures 2, 10, 11 et 12.

(5) Voir la figure 13.

(6) Voir la figure 14.

(7) Car $\begin{cases} N \geqslant 3 \\ N < \dfrac{2n}{n-2} \end{cases}$