

Plus court chemin et vol d'avion

Année 2015 – 2016

Guarino Anaïs, 4ème – Djouabri Nawfel, Ruiz Calvin, 3ème.

Encadrés par Mme Paul – M. Floc'h – M. Cheillan – Mme Gaillard

Établissement : Collège Mallarmé - Marseille

Chercheur : Nicolas Bedaride – Université Aix Marseille

Présentation du sujet :

On considère 2 points sur la Terre.

Quel est le plus court chemin entre ces deux points ?

Est-il unique, peut-on le mesurer ?

Début de l'article

Conjectures et résultats obtenus :

Nous avons décidé de commencer par essayer de mesurer la distance entre Paris et New-York.

I/ Les tests

Test 1 :

On a essayé de mesurer la distance entre Paris et New-York sur un planisphère.

On a essayé d'appliquer le théorème de Pythagore en traçant un triangle rectangle sur la carte.

Mais cela n'a pas marché car c'est une sphère donc on ne peut pas le «mesurer à plat».

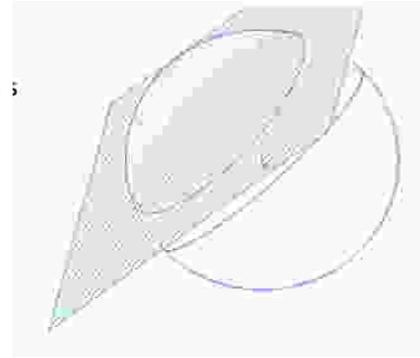
En effet nous avons essayé de faire des calculs de longueur à l'aide de l'échelle, mais nous nous sommes aperçus que l'échelle était correcte uniquement au niveau de l'équateur.



Explications sur la sphère:

On a vu que deux points de la sphère sur un même parallèle sont reliés par un arc de cercle.

Cela nous a fait penser à la section d'une sphère par un plan et nous savons que la section d'une sphère par un plan est un cercle.



Test 2

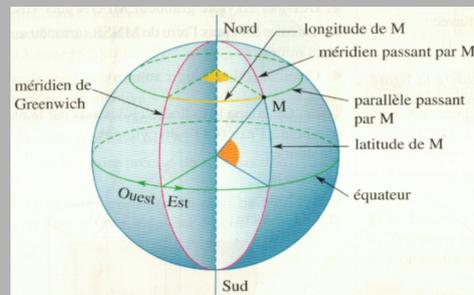
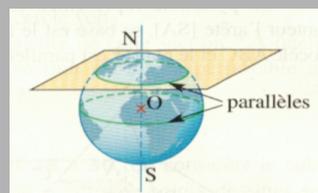
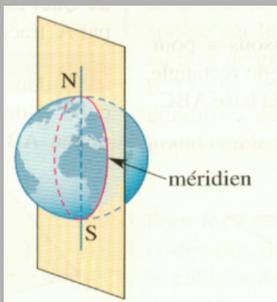
Suite à ce que nous avons vu, nous avons décidé de laisser de côté, pour l'instant, l'exemple Paris New-York.

Nous avons considéré deux cas :

- Deux villes situées sur même méridien : Tokyo (Japon) et Adélaïde (Australie)
- Deux villes sur le même parallèle : Cordoba (Argentine) et Perth (Australie)

Repérage sur la sphère :

Méridien et parallèle



Un méridien : c'est un des grands cercles de la terre qui passe par les deux pôles.

Un parallèle : c'est un cercle de la terre parallèle à l'équateur.

Sur la sphère tout point est repéré par ses coordonnées :

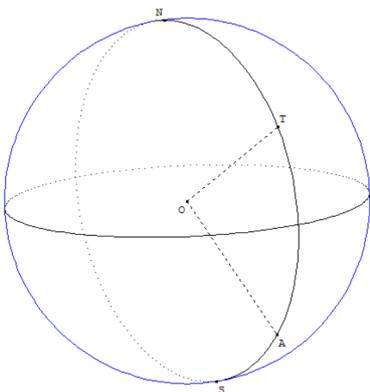
- latitude
- longitude

On cherche à tester si le plus court chemin entre 2 points sur la sphère est un arc de cercle donné par un méridien ou parallèle.

Deux villes sur le même méridien

Tokyo et Adélaïde :

Premièrement nous avons placé nos deux villes:



Puis sur un cercle de centre O, nous avons calculé l'angle entre les deux points [\(1\)](#) (à l'aide des coordonnées des villes). Nous avons trouvé un angle de 70° .

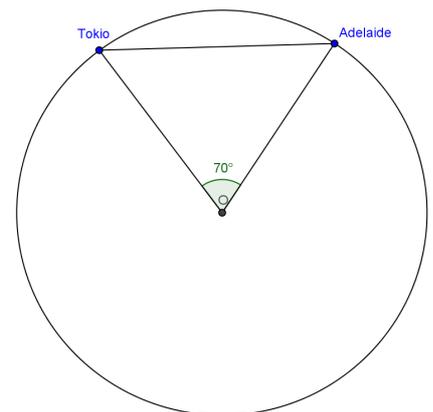
Ce qui nous a permis de calculer la distance entre les deux points:

L'angle au centre a une mesure de 360° , et correspond à la longueur du tour de la Terre, environ 40 075 km.

Ce qui nous permet de calculer :

$$\frac{40\,075 \times 70}{360} \approx 7\,792$$

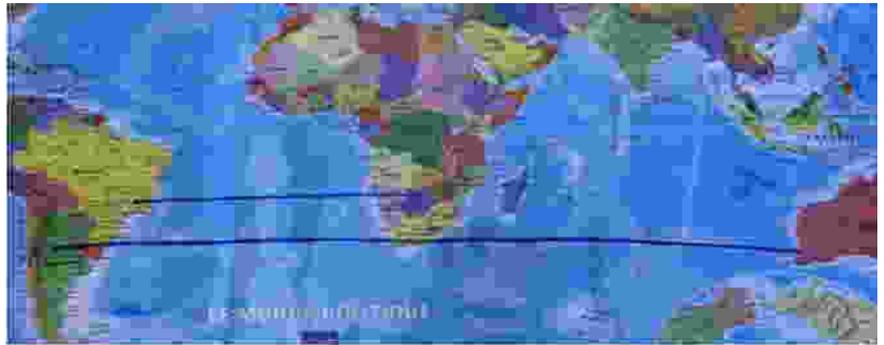
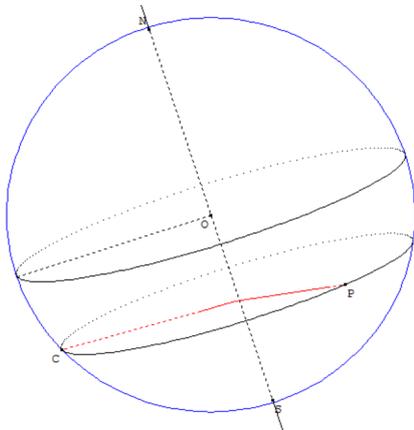
La distance entre Tokyo et Adélaïde est d'environ 7 792 km.



Deux villes sur le même parallèle:

Cordoba et Perth

Nous avons commencé par placer nos deux villes:



Nous devons calculer la longueur du rayon du cercle intersection.

On a utilisé la trigonométrie :

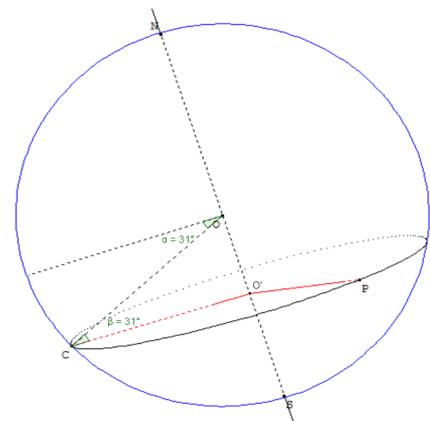
Le triangle OCO' étant rectangle en O' :

$$\cos(31) = \frac{CO'}{6371}$$

$$CO' = 6371 \times \cos(31)$$

$$CO' \approx 5461$$

La longueur du rayon du cercle intersection est d'environ 5 461 km.

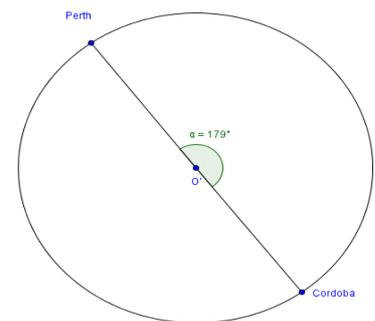


Puis sur un cercle de centre O' , nous avons calculé l'angle entre les deux points (à l'aide des coordonnées des villes), nous avons trouvé 179° , ainsi que le périmètre du cercle (34 312 km).

Ce qui nous a permis de calculer la distance entre les deux points:

$$\frac{34312 \times 179}{360} \approx 17061$$

La distance entre Perth et Cordoba est d'environ 17 061 km.



II/ Bilan et comparaison:

Nous avons cherché sur internet les distances réelles pour les comparer à nos valeurs et vérifier si celles-ci sont proches de la réalité:

On constate pour les villes qui sont sur le même méridien que les valeurs obtenues sont relativement proches.

Résultat obtenu pour Tokyo-Adélaïde : 7 784 km

Distance réelle : 7 853 km

On constate pour les villes qui sont sur le même parallèle que les distances sont très différentes.

Résultat obtenue Cordoba-Perth : 17 234 km

Distance réelle: 12 980 km environ

III/ Calculs théoriques et vérification

Suite à nos constatations, nous étions un peu bloqués.

Le chercheur nous a donc donné quelques explications plus théoriques et nous a fourni les formules qui nous ont permis de calculer les distances entre deux villes.

Nous avons donc introduit le vocabulaire de géodésique :

Géodésique :

C'est une courbe tracée sur la sphère qui relie deux points en minimisant la longueur entre ces points.

Et le chercheur nous a fourni les formules qui nous ont aidées pour les calculs :

Formules :

Un point A est repéré sur la sphère par $(\theta ; \phi)$; où θ désigne la latitude en radian et ϕ désigne la longitude en radian.

Soient deux villes repérées par A $(\theta_1 ; \phi_1)$ et B $(\theta_2 ; \phi_2)$.

Si ϕ est constant alors les deux villes sont sur le même parallèle.

Si θ est constant alors les deux villes sont sur le même méridien.

La longueur de la géodésique est donc :

$l = \alpha \times R$; où R est le rayon de la Terre.

Et α est tel que :

$$\cos(\alpha) = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)$$

Bilan tableur avec toutes les villes étudiées :

Pour gagner du temps, nous avons inséré les valeurs sur un tableur et voici ce que nous avons trouvé:

	θ	φ	$\cos(\alpha)$	longueur = $\alpha \times R$	Longueur réelle
Maun	23,4166	-19,9833	0,456020431	6990,757231	6986
Belo Horizonte	-43,95583	-19,816944			
Parana	-60,529166	-31,73111	0,086607984	9455,071779	9474
Happy Valley Goose Bay	-60,3675	53,300277			
Tokyo	139,6833	35,6833	0,331823088	7852,644994	7850
Adelaide	138,599722	-34,93			
Kangirsuk	-70,0433	60,028611	-0,060485056	10393,12904	10400
Santiago	-70,650555	-33,4377			
Indianapolis	-86,158055	39,76777	-0,134229974	10865,31167	10856
Pékin	116,3875	39,903611			
Perth	115,866	-31,95	-0,448409463	12969,96333	12994
Cordoba	-64,1838	-31,4083			
Kigali	30,088055	-1,959444	0,60994684	5828,208777	5824
Kiev	30,5163889	50,4536111			

Nous pouvons constater que lorsque deux villes se trouvent sur le même méridien, nous trouvons le même résultat, mais lorsqu'elles étaient sur le même parallèle nos résultats étaient bien différents.

On peut donc en conclure que méridien et parallèle ne sont pas la même chose. **(2)**

Les longueurs trouvées dans le tableur étant cohérentes avec ce que nous avons trouvé sur internet, nous avons décidé de revenir sur notre exemple de départ : la distance entre Paris et New-York.

IV/ Calcul de la distance Paris New-York :

Coordonnées Paris, New York.

Paris : 48°51'24" N 02°21'07" E

New York : 40°42'52" N 74°00'22" O

Pour convertir en radian, il faut multiplier par π et diviser par 180.

La distance que l'on a obtenue une fois le programme de calcul effectué est de environ 5836 km.

La distance réelle est de 5840 km : les résultats coïncident.

Notes d'édutions

(1) Deux points ne forment pas un angle.

(2) Cette phrase mériterait un éclaircissement...