Pliages et Découpages

Élèves :
PEROUMAL Thomas, PERRON Yohann, BERNAS Jason (4ème) et MOLLER Pierre (3ème).

Établissement
Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91402 Orsay Cedex.

Enseignants :
FERRY Florence
ASSELAIN-MISSENARD Claudie.

Chercheurs :
AGUILLON Nina et BOCHARD Pierre.

Le sujet :

- **Peut-on augmenter le périmètre d'une feuille de papier en la pliant ?**
- **Peut-on découper une figure géométrique en un seul coup de ciseaux droit ?**

I - Pliages

Après avoir plié plusieurs feuilles de papier nous nous sommes aperçus qu'il y avait différentes sortes de plis ; nous avons fait notre recherche en répertoriant ces plis par catégorie.

1) Les plis simples

Définition : un pli simple est un pli effectué sur un seul segment.
Quand on effectue un pli simple, on trouve 2 cas :

a) Un pli qui ne dépasse pas de la feuille
Prenons un rectangle *ABCD* qui représente notre feuille de longueur a et de largeur b.

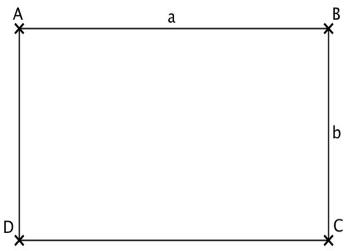


fig1

Traçons à l'intérieur de ce rectangle un segment de longueur x représentant l'endroit du pliage, qui coupe $[BC]$ en M et $[DC]$ en N. Nommons respectivement c, d, e et f les longueurs respectives BM, CM, DN et CN.

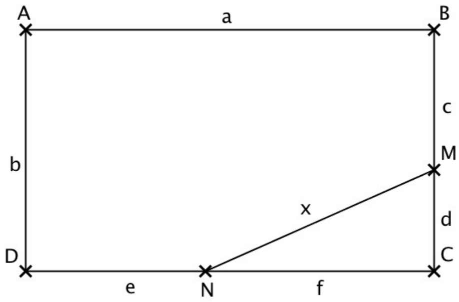


fig2

On plie sur l'axe (MN) :

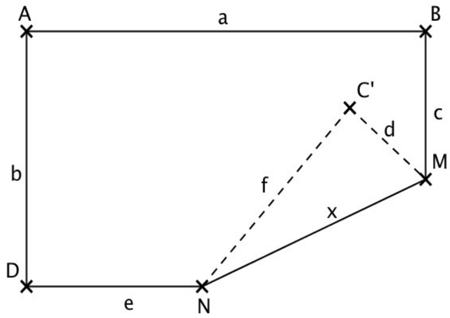


fig3

Comparons les périmètres :
Avant pliage : $P_1 = a + b + c + d + e + f$
Après pliage : $P_2 = a + b + c + e + x$
Dans P_2, on a gagné x et on a perdu $d + f$
Or le plus court chemin entre deux points (ici M et N) est le segment qui les relie.
Donc : $x < d + f$ et donc $P_2 < P_1$.
On ne peut donc pas augmenter le périmètre d'une feuille de papier en faisant un pli simple qui ne dépasse pas.

b) Un pli qui dépasse de la feuille
Reprenons notre rectangle *ABCD* avec les mêmes notations.
Cas n°1 :

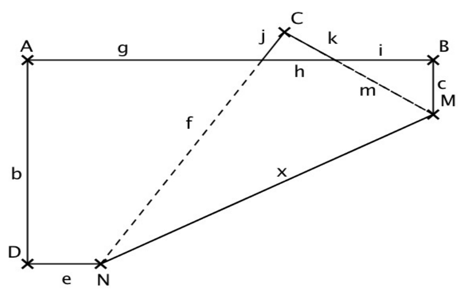


fig4

Nous avons un nouveau découpage de [*AB*] en 3 segments de longueurs *g, h* et *i*.
[*BC*] est coupé en deux segments [*BM*] et [*MC*] de longueurs respectives *c* et $(m + k)$, et [*CD*] est coupé en deux segments [*DN*] et [*CN*] de longueurs respectives *e* et $(f + j)$.
Avant pliage :
$P_1 = e + b + g + h + i + c + m + k + j + f$
Après pliage : $P_2 = e + b + g + i + c + x + j + k$
Dans P_2, on a gagné x et on a perdu $f + h + m$
Or le plus court chemin entre deux points (ici *M* et *N*) est le segment qui les relie.
Donc : $x < f + h + m$ et donc $P_2 < P_1$.
On ne peut donc pas augmenter le périmètre d'une feuille de papier en faisant un pli simple qui fait dépasser un seul sommet.

Cas n°2 :

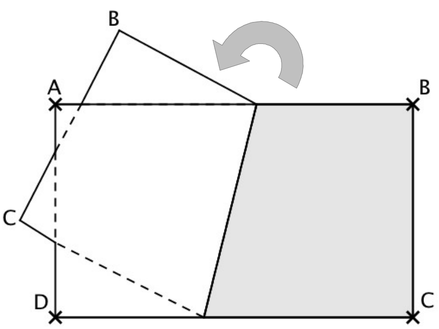


fig5

En appliquant le raisonnement fait pour le cas n°1, sur chaque partie qui dépasse de la feuille initiale, on arrive à la même conclusion.

Cas n°3 :

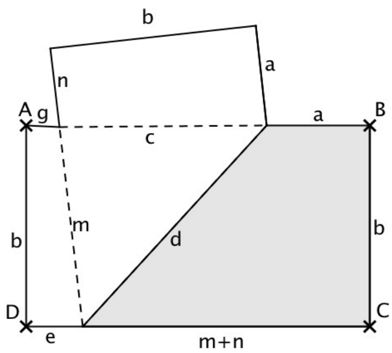


fig6

Avant pliage :
$P_1 = b + g + c + a + b + m + n + e$
Après pliage : $P_2 = b + g + n + b + a + d + e$
Dans P_2, on a gagné d et on a perdu $c + m$
Or le plus court chemin entre deux points est le segment qui les relie.
Donc : $d < c + m$ et donc $P_2 < P_1$.
La conclusion reste la même : on ne peut donc pas augmenter le périmètre.

2) <u>Plusieurs plis simples</u>

On élimine tout de suite le cas où les plis simples ne se feraient pas au même endroit, cela revient à faire un pli simple sur un rectangle puis un pli simple sur une autre figure :

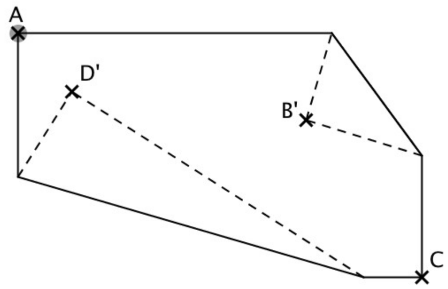


fig7

En faisant deux fois le raisonnement du 1), on arrive à la même conclusion.
Il existe deux types de plis après un pli simple :

a) les plis qui ne reviennent pas sur le premier pli

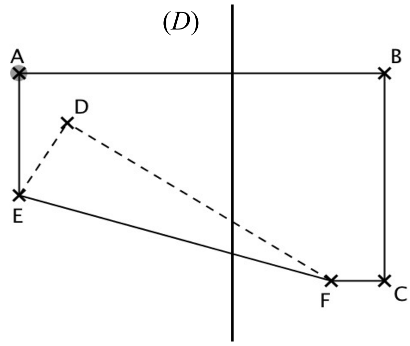


fig8

La feuille ayant subi un premier pli, on effectue un second pli suivant la droite (*D*).

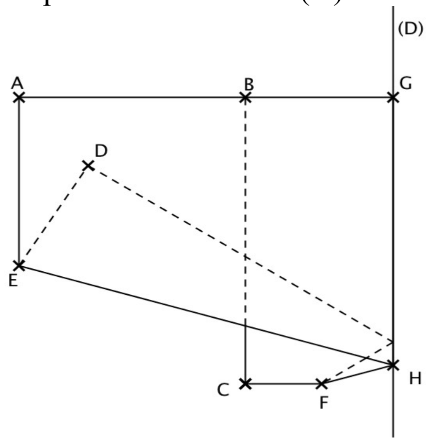


fig9

Cela revient à faire un pli simple sur une figure différente.

b) Le pli qui revient sur le premier pli

Cas n°1 : celui qui ne dépasse pas

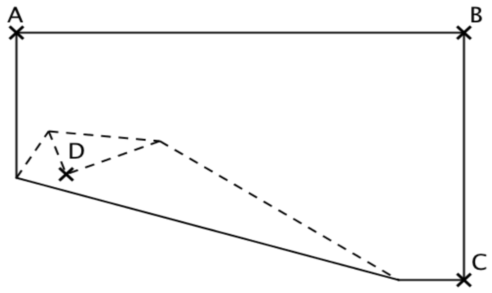


fig10

Le périmètre final est le même que celui avec le premier pli simple.

Cas n°2 : celui qui dépasse

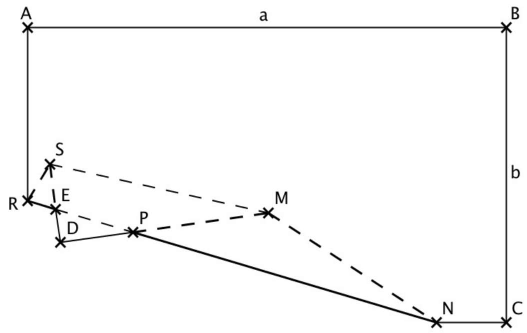


fig11

On a perdu : $RS + SE + PM + MN$

On a gagné : $RE + PN$

Or le plus court chemin entre deux points est le segment qui les relie.

Donc : $RS + SE > RE$ et $PM + MN > PN$

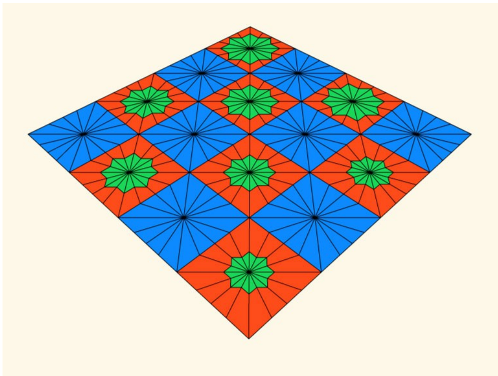
Donc, on a gagné plus que l'on a perdu.

<u>Donc les plis qui reviennent sur un premier pli n'augmenteront pas le périmètre</u>.

Remarque :

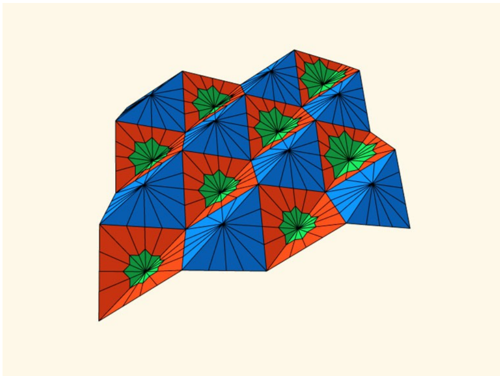
Nous pensions qu'il n'y avait aucune façon d'augmenter le périmètre d'une feuille de papier en la pliant jusqu'à ce que nous trouvions une vidéo (http://www.etudes.ru/fr/etudes/rouble/) qui expliquait un pliage théorique le permettant. Il faut partir d'une feuille de papier carrée d'une épaisseur zéro millimètre avec dessus les différents tracés de la figure ci-dessous.

Figure :



figR1

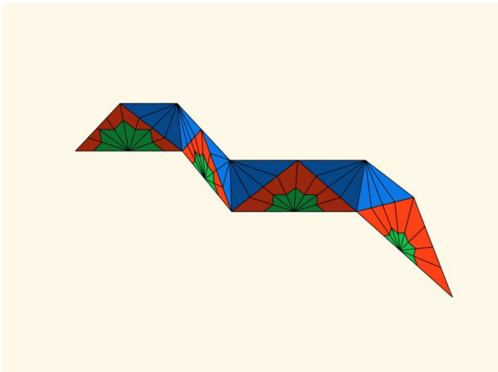
Puis on plie sur les diagonales parallèles figure :



figR2

Ensuite, on plie sur les hauteurs des triangles qui n'ont pas d'étoiles :

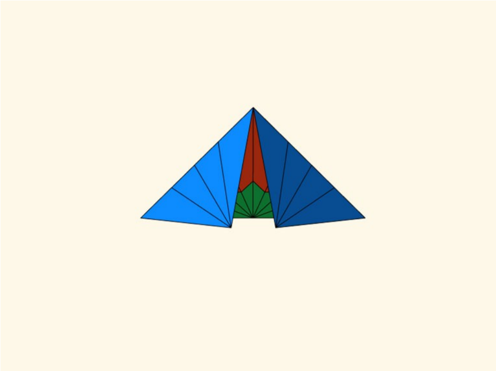
Figure:



figR3

On replie les moitiés de triangles sur le grand triangle :

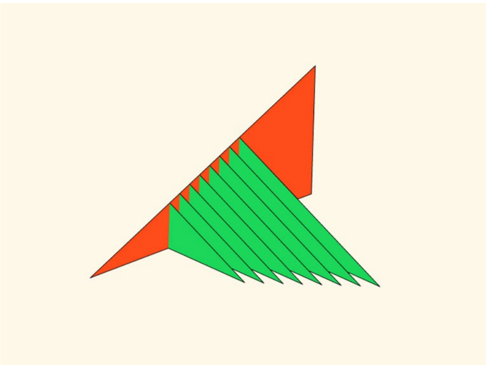
figure :



figR4

On plie sur la jonction entre les deux demi-triangles tout en retournant les quarts d'étoiles de façon à ce qu'ils sortent de la figure :

Figure:



figR5

Les petites pointes qui dépassent proviennent des étoiles dessinées au départ dans chaque petit carré. En augmentant le nombre de carrés tracés initialement, on augmente le nombre de pointes. Ensuite, plus les étoiles sont formées avec de nombreux rayons, plus les pointes sont longues et fines et plus leur périmètre est grand. On peut ainsi rendre ce périmètre aussi grand qu'on veut en augmentant le nombre de pointes et leur finesse. On peut donc avoir un périmètre qui dépasse celui du carré initial.
Ceci est un pliage théorique, qui ne serait réalisable qu'avec une feuille de papier d'épaisseur 0.

Dans notre recherche, nous avions fait une étude de cas qui nous a amenés à la conjecture suivante : on ne peut pas augmenter le périmètre d'une feuille de papier en la pliant. En voyant ce dernier cas « théorique », on peut dire que notre conjecture n'était pas vraie, que nous n'avons pas étudié tous les cas possibles, notre raisonnement n'était pas complet. (1)

II - Découpages

Pour ce sujet, nous devions découper une figure géométrique en un seul coup de ciseaux droit en ayant le droit de plier la feuille autant de fois que l'on voulait avant de couper. Nous avons réussi à obtenir un certain nombre de figures.
Triangle équilatéral

Nous traçons un triangle équilatéral puis ses bissectrices.

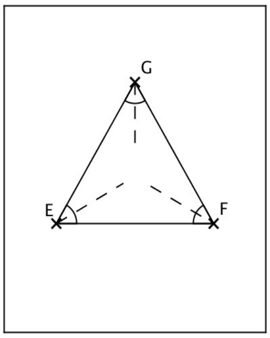


fig12

Nous plions suivant une première de ces bissectrices, puis suivant une deuxième :

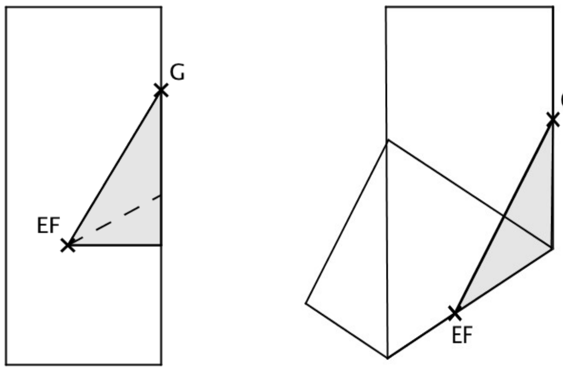


fig13

En découpant suivant [*EG*], on obtient notre triangle équilatéral *EFG.*

1 Triangle isocèle

Le principe reste le même mais on commence par plier suivant la bissectrice issue du sommet principal.

2 Triangle quelconque

Ici, c'est un pliage plus compliqué. Si on plie sur une bissectrice, puis l'autre, les trois côtés ne seront pas superposés. On a donc essayé de plier sur deux bissectrices en même temps. Si on plie ainsi, jusqu'au centre du cercle inscrit, on peut alors replier de façon naturelle, le dernier sommet par dessus le reste, en pliant suivant la troisième bissectrice.

3 Le carré

Dans les cas précédents, nous avons remarqué que nous pliions sur les bissectrices. Nous avons donc essayé en pliant sur les bissectrices du carré, c'est-à-dire les diagonales. Il faut plier sur l'une des diagonales, puis sur l'autre.

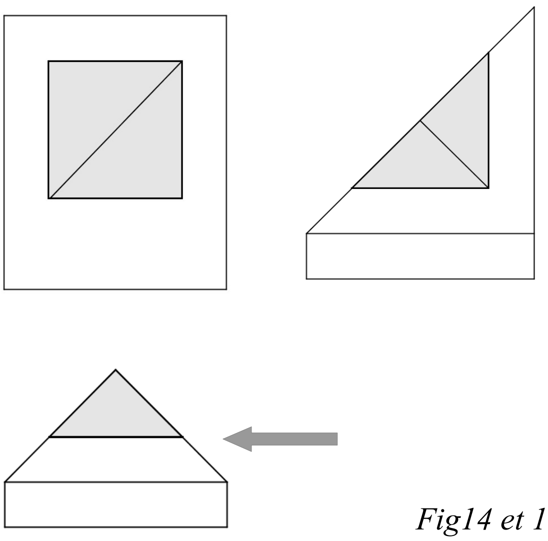


Fig14 et 15

Encore une fois, on obtient un trait que l'on découpe pour retrouver notre carré.

Nous nous sommes demandés si nous pouvions utiliser cette technique des bissectrices avec tous les polygones réguliers.

Généralisation à tous les polygones réguliers

Exemple 1 : l'octogone régulier

Pliages successifs suivant les bissectrices :

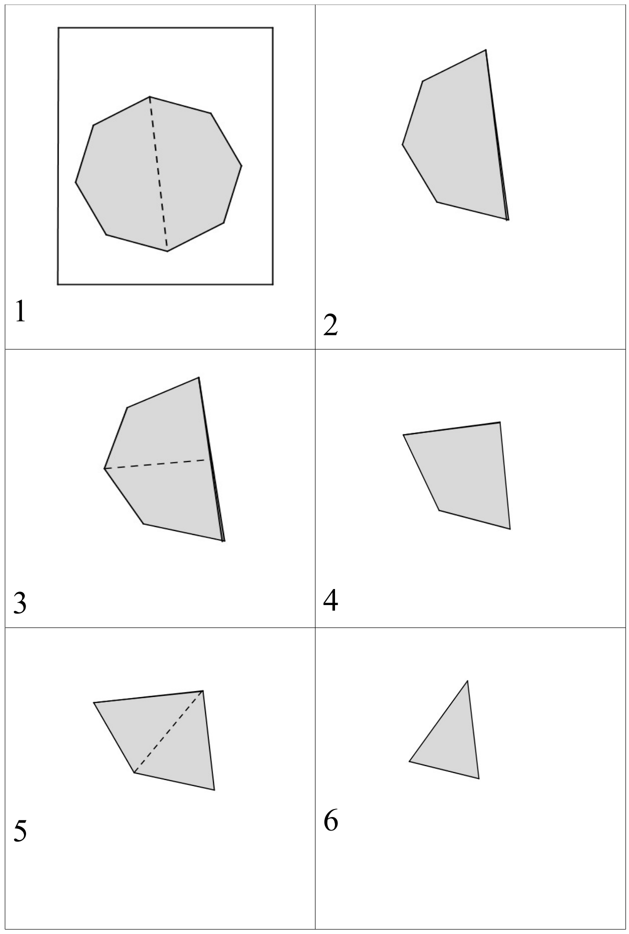


fig16 à 21

En coupant le long du côté du polygone initial, on retrouve l'octogone.
Nous avons pris ensuite un polygone régulier avec un nombre de côtés impair.

Exemple 2 : le pentagone régulier

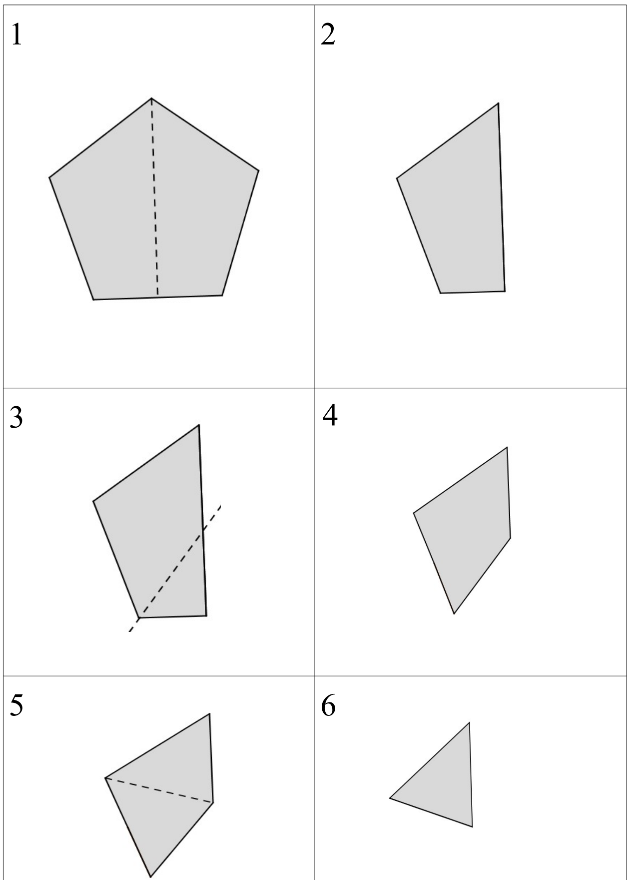


fig22 à 27

Notes d'édition

(1) Cette question, connue sous le nom du problème du rouble replié, a déjà été résolue. Une ressource est fournie expliquant une construction permettant d'augmenter le périmètre.. Les auteurs de l'article tentent d'éclairer le lecteur sur cette construction . Ils remarquent aussi avec sincérité que leur raisonnement est incomplet.

(2) S'il semble très difficile de prouver qu'une forme géométrique n'est pas réalisable en un coup de ciseaux, peut-on avoir une intuition sur les différentes formes vraisemblablement impossibles à réaliser .Un travail autour de contre-exemples a été tenté et pourra sans doute être prolongé .

Notre technique semble également fonctionner pour tous les polygones réguliers.
Par contre, nous n'avons pas réussi à obtenir un polygone irrégulier autre qu'un triangle.
(2)