École des Pupilles de l'Air
Classe préparatoire aux études supérieures (CPES)
Élèves : Florian Montmayeur, Jean-Charles Viannais
Chercheur : M. Labbé
Professeurs : MM Excoffon et Tilman

Année 2009-2010

Quel chemin as tu pris petite bille ?

Résumé

Lorsqu'un grand nombre de billes est lancé sur une planche de Galton la répartition des billes forme une « gaussienne ». Nous nous sommes intéressés au problème inverse : à partir de la forme d'une courbe, nous avons cherché à déterminer les caractéristiques de la planche (ou encore pour les petits tricheurs comment positionner les clous sur une planche pour décider de la zone d'arrivée d'une bille). Dans un premier temps nous avons pratiqué une rapide étude avec une planche de Galton traditionnelle, puis nous avons considéré une planche légèrement modifiée.

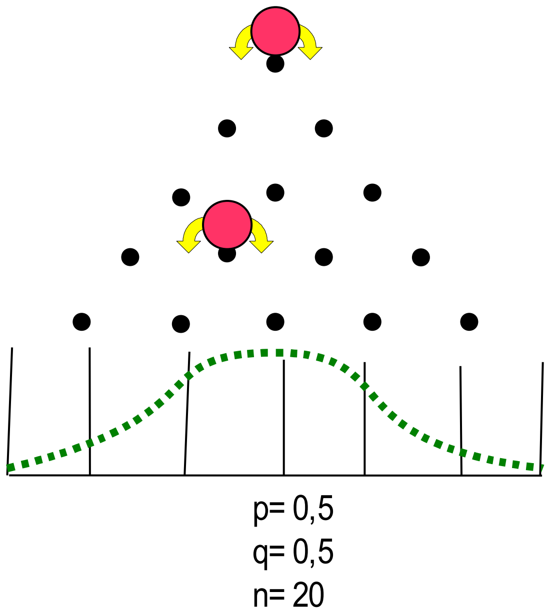
Abstract

When a lot of balls is launched on a Galton board the distribution of the balls form a "Gaussian". We were interested in the inverse problem : from the shape of a curve , we sought to determine the characteristics of the board (or for small cheats how to position the nails on the board to decide the finish area of the ball). First we made a quick study with a traditional Galton board, then we considered a slightly modified Galton board

Table des matières

1.La planche de Galton

Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a une chance sur deux de tomber à gauche et une chance sur deux de tomber à droite. Avec un très grand nombre de billes et un très grand nombre de clous, la courbe de répartition des billes dans les différentes boîtes (placées en bas de la pyramide de clous) donne une courbe en cloche appelée gaussienne.



Étude préalable :

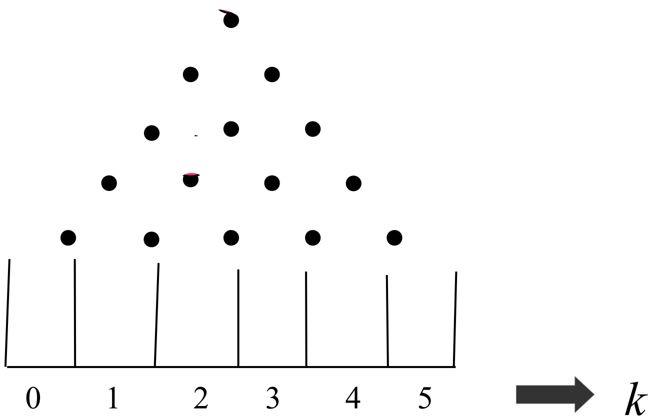
$$P=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\times p^{k}\times q^{(n-k)}$$

avec : p : probabilité que la bille a d'aller à droite pour un clou donné

q : probabilité que la bille a d'aller à gauche,

n : nombre de billes lancées. (1)

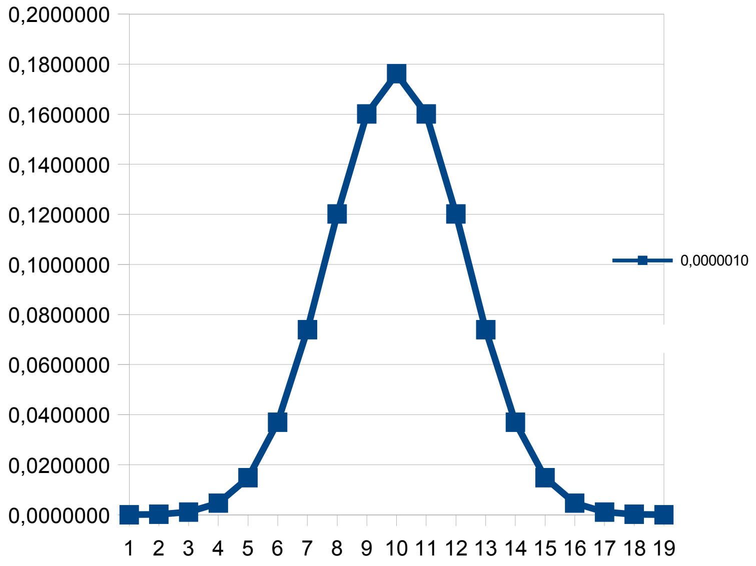
Pour cette application on numérote les bacs de 0 à m. Dans la formule ci-dessus, P représente la probabilité à laquelle est soumise une bille pour arriver dans un bac k, avec $k\in\{0,\dots,m\}$. Or k correspond également au nombre de fois où la bille est allée à droite en tombant sur un clou d'où la formule.



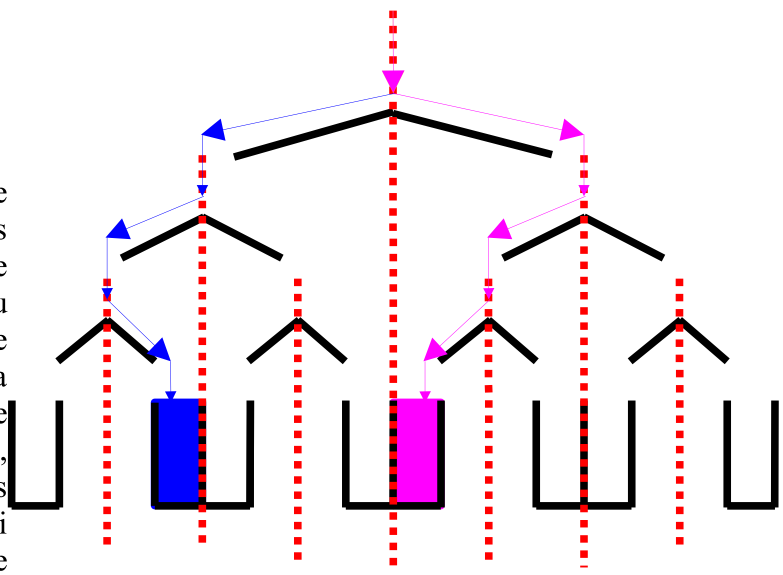
Vérification par un tableur :

Dans un tableur nous avons rentré la formule précédente avec comme possibilité de régler le nombre de bacs ainsi que la probabilité des clous (mais elle était obligatoirement identique pour tous les clous).

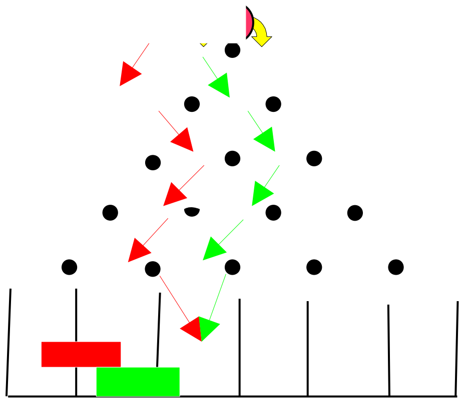
colonne n°	probabilité (P)
1	0,0000010
2	0,0000191
3	0,0001812
4	0,0010872
5	0,0046206
6	0,0147858
7	0,0369644
8	0,0739288
9	0,1201344
10	0,1601791
11	0,1761971
12	0,1601791
13	0,1201344
14	0,0739288
15	0,0369644
16	0,0147858
17	0,0046206
18	0,0010872
19	0,0001812
20	0,0000191



2.Notre planche



Les avantages d'une telle planche sont que pour arriver dans un bac précis la bille ne peut emprunter qu'un unique chemin et qu'une fois passée à gauche ou à droite d'un des traits pointillés elle ne peut le retraverser à nouveau. En effet, la planche est créée de telle sorte que chaque clou mène sur deux autres clous, qui eux même conduisent a deux autres clous distincts les uns des autres. Ainsi les trajectoires ne se croisent jamais. De ce fait, on constate avec le schéma qu'il n'existe qu'un chemin pour arriver sur un clou quelconque, et donc un chemin par bac. (2)

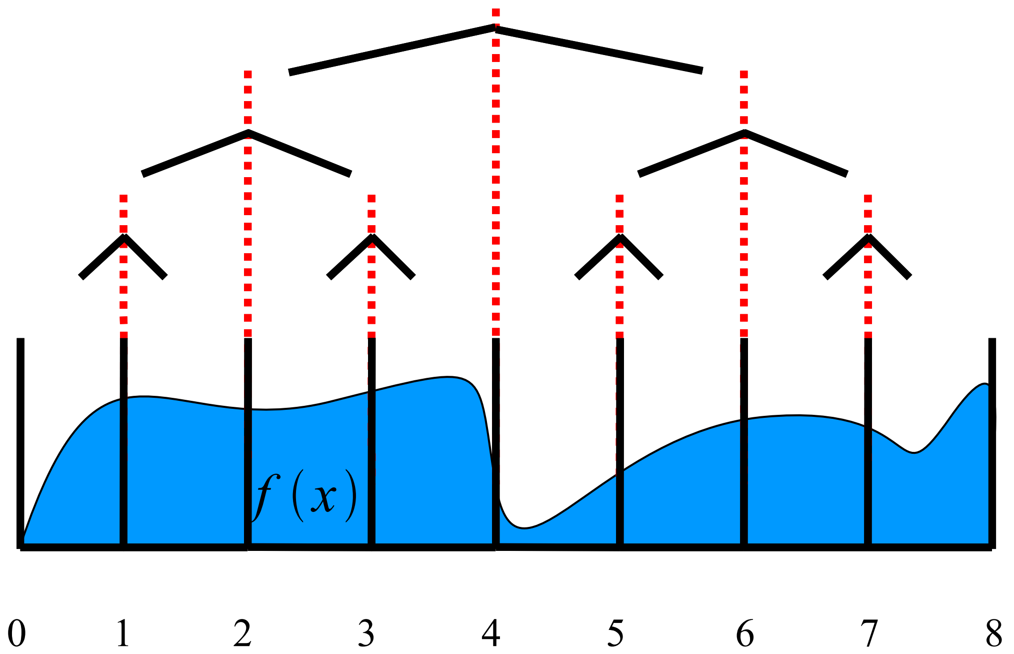


On remarque bien sur ce schéma qu'il y a plusieurs chemins possibles pour arriver dans un seul bac.

3.Étude du problème

On nous donne une forme de courbe à obtenir dans les bacs après un grand nombre de lancers de billes et nous devons déterminer les caractéristiques de chaque clou.

Pour cela nous commençons par isoler la courbe et l'assimiler à une certaine fonction que nous appellerons f



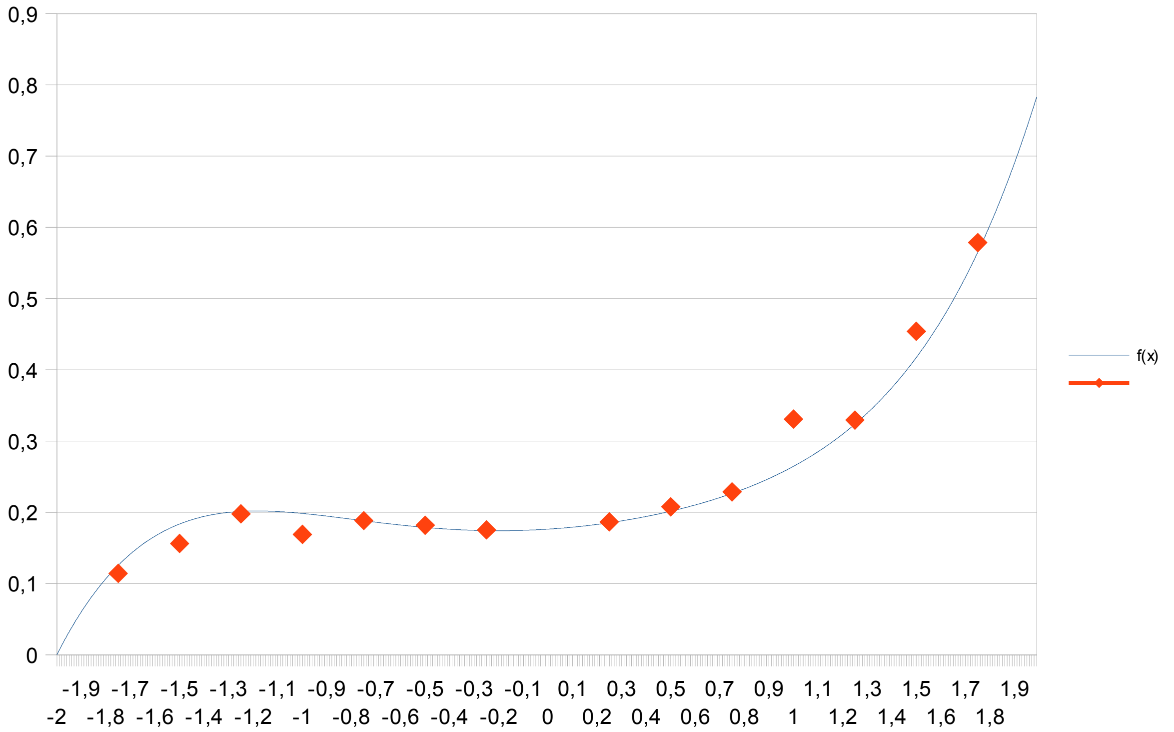
Ensuite nous numérotons les bacs de 0 à n.

Nous pouvons calculer l'intégrale de 0 à $\frac{n}{2}$ que nous divisons ensuite par l'intégrale de 0 à n pour avoir la proportion de billes tombées à gauche du premier clou déduisant ainsi les caractéristiques de ce dernier. Pour le clou gauche de la deuxième rangée nous calculons l'intégrale de 0 à $\frac{n}{4}$ que nous divisons par l'intégrale de 0 à $\frac{n}{2}$; nous obtenons ainsi les caractéristiques de ce clou. En appliquant cette méthode à tous les clous nous pouvons déduire ainsi les caractéristiques de notre planche.

Par exemple : Prenons la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}$$

La courbe représentative de cette fonction est la courbe en continu ci-dessous :



Au départ nous avions pris la fonction définie par : $f(x)=x^5+5x^2+2x+16$

Nous voulions l'étudier sur l'intervalle [-2 ; 2] grâce aux intégrales comme expliqué précédemment. Pour obtenir directement la probabilité en calculant l'intégrale sur l'intervalle souhaité (ensemble de bacs en réalité) nous avons dû normaliser notre fonction, c'est à dire : nous avons remarqué que lorsque nous calculions l'intégrale sur [-2 ; 2] (soit l'ensemble des bacs) nous obtenions $\frac{272}{3}$, or la probabilité qu'une bille tombe dans n'importe quel bac est de 1. (3)

Nous avons donc divisé notre fonction par ce fameux $\frac{272}{3}$, ce qui correspond à la normalisation.

Dans le 1er calcul nous avons effectué l'intégrale sur l'intervalle [-2 ; 0] et [0 ; 2] :

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{23}{68} \qquad \int_{0}^{2}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{45}{68}$$

Ce qui nous donne donc la probabilité pour le 1er clou (23 chances sur 68 d'envoyer la bille à gauche et 45 chances sur 68 d'envoyer la bille à droite) et donc la proportion de billes dans cet intervalle. On remarque que pour ce grand intervalle le point qui correspond à la valeur de l'intégrale sur cet intervalle n'est pas exactement sur la courbe.

Dans le second calcul nous avons divisé en deux chaque intervalle puis nous avons calculé l'intégrale sur chacun d'eux.

Clou **gauche** de la seconde ligne :

Probabilité d'aller à gauche

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{5}{32}$$

Probabilité d'aller à droite

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{99}{544}$$

Clou **droit** de la seconde ligne :

Probabilité d'aller à gauche

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{113}{544}$$

Probabilité d'aller à droite

$$\int_{1}^{2}\left(\frac{x^5+5x^2+2x+16}{\frac{272}{3}}\right)=\frac{247}{544}$$

Nous obtenons ainsi la probabilité de chaque clou de la seconde ligne et donc la proportion de billes présente dans l'ensemble des bacs de chaque intervalle. On remarque alors que les points correspondant aux calculs des intégrales se rapprochent de plus en plus de la courbe validant ainsi notre méthode.

Donc si nous continuons notre technique de calcul une infinité de fois en supposant qu'il y ait une infinité de bacs nous pourrions ainsi obtenir le nombre exact de billes dans chaque bac ainsi que la probabilité pour chaque clou.

Notes de l'édition

(1) : la probabilité P dépend en fait de k et correspond à la loi binomiale de paramètres n et p.

(2) : on aurait aimé avoir un peu plus d'explications sur la planche « modifiée ». A la place des clous se trouvent des petites barrières qui permettent qu'un chemin unique amène à chaque bac.

(3) : « la bille tombe avec probabilité 1 dans l'ensemble des bacs » : la fonction f choisie doit être une densité de probabilité, donc positive et d'intégrale 1.