Plan de Table

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : Jean de Sainte Marie et Loïc Davalo, 1ère S

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay ('91)

Enseignants : Hélène Cochard, Denis Julliot et Didier Missenard

Chercheur : Romain Deseine, Laboratoire de Mathématique d'Orsay

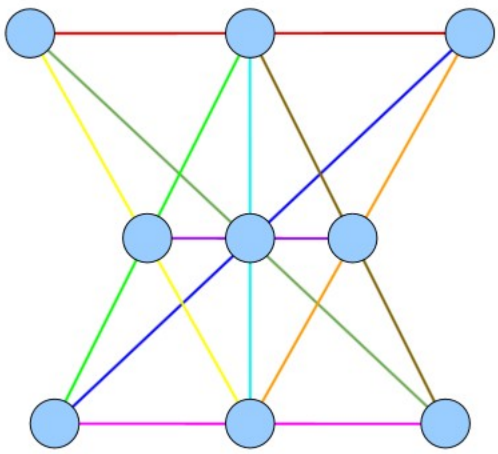


FIGURE 1 – Situation finale

1 Le Problème

Un maître d'hôtel, mathématicien amateur, a disposé 9 verres sur une table de réception de manière à ce qu'ils forment 10 alignements de 3 verres :

— Pouvez-vous trouver cette disposition ?
— Y a t-il plusieurs dispositions possibles ?
— Est-il possible d'avoir plus de 10 alignements ?

1.1 Une précision

Si on aligne tous les points on obtient 84 alignements (figure 2) [1] , on ne considère pas les alignements de plus de 3 verres.

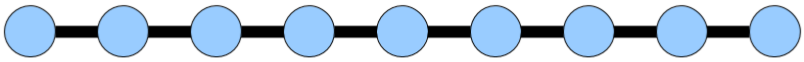


FIGURE 2 – 9 points alignés

2 Quelques relations

2.1 Une première relation

On considère les verres comme des points, pour simplifier la visualisation.
On note A le nombre total d'alignements, ici $A = 10$
Et P le nombre de points, ici $P = 9$
Nous utiliserons le nombre d'alignements passant par un verre, $n1; n2; n3 \dots nP$
Dans notre situation : **n1+n2+...+nP = 3A** car on a des alignements de 3 verres
Donc ici **n1+n2+$\cdots$+n9 = 30**

2.2 Une deuxième relation

Soit un verre et K le nombre maximum d'alignements auxquels il peut appartenir si on considère un nombre impair de points comme ici avec nos 9 points :

$$K \leq \frac{P-1}{2}$$

Donc ici :

$$K \leq \frac{9-1}{2} = 4$$

Comme on le voit sur cette figure :

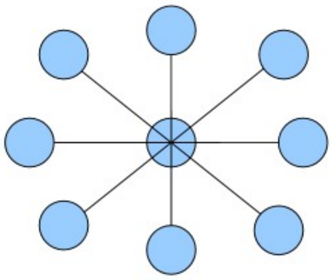


FIGURE 3 – Nombre maximum d'alignements pour un point

On a donc ici au maximum 9 verres dans 4 alignements donc $4 * 9 = 36$
et car $n1 + n2 + ... + nP = 3A$
alors $\frac{36}{3} = 12$ ici on a donc au maximum 12 alignements
Donc, pour tout point ayant K alignements, ce point est aligné avec tous les autres points [2] .

On remarque aussi que la figure où tous les points sont dans le nombre maximum d'alignements, ici 12, ne peut pas exister car si tous les points sont aligné avec tous les autres, on a une ligne [3] , et on a un alignement de plus de 3 verres.

3 Éléments de résolution

On dit qu'un point A est aligné avec un point B si A appartient à l'un des alignements auxquels appartient B [4] .

3.1 Un point dans un alignement seulement

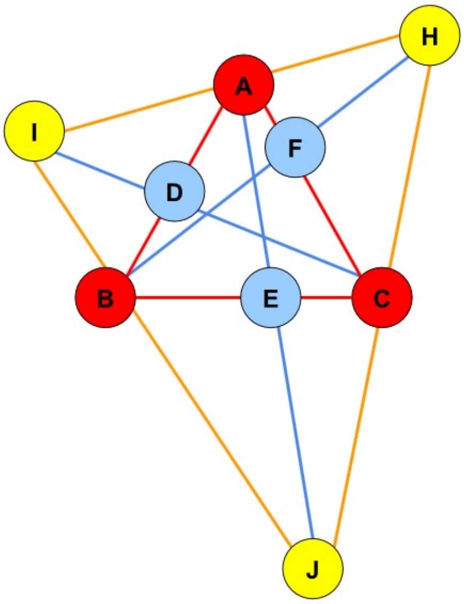
On cherche à savoir si il est possible d'avoir un ou plusieurs points inclus dans un alignement seulement pour obtenir 10 alignements ou plus [5] .
Pour cela tous les points "à 4" doivent appartenir à l'alignement auquel appartient M. Or, il ne peut pas y avoir plus de 3 points dans un alignement. Dans ce cas, il ne peut y avoir plus de 2 points "à 4".
Or

$$\sum_{n=0}^{9} n_i/3 = A$$

Or, $\frac{(4+4+1+6*3)}{3} = 9$
Cela signifie donc que, dans ce cas, il n'y aurait que 9 alignements. Donc, chacun des 9 points appartient au minimum à 2 alignements.

3.2 Alignement des points appartenant chacun à 4 alignements

On souhaite démontrer que les points appartenant à 4 alignements sont forcément alignés entre eux et qu'il en existe donc 3 au maximum [6] .
Soit, 3 points non-alignés appartenant chacun à 4 alignements, A,B et C. On sait qu'il doivent appartenir chacun à l'un des alignements auxquels appartient chaque autre point, y compris eux-mêmes. Donc, il faut créer les alignements nécessaires à ce que les points "à 4" soient alignés entre eux. Soit 3 points D,E et F appartenant respectivement à [AB],[BC] et [AC]. Or, A,B et C ne sont pas alignés avec respectivement E,F et D [7] . Il faut donc créer ces alignements. Soit 3 points, G,H et I, appartenant respectivement à [AE],[BF] et [CD] [8] . Or, ces points ne sont alignés avec, respectivement, ni B, ni C ; ni A, ni C ; ni B, ni C. Or, il existe déjà 9 points. Or G,H et I sont les seuls points à ne pas être alignés avec tous les points "à 4", ils sont donc les seuls à pouvoir faire partie de nouveaux alignements avec A,B ou C. Donc, la seule configuration d'alignements possible est : ABD ; BCE ; ACF ; AEG ; BFH ; CDI ; AHI ; BGI ; CGH. Soit seulement 9 alignements (figure 4).



[9]

FIGURE 4 – Situation finale

La seule façon d'ajouter un ou plusieurs alignements serait d'aligner ensemble des points appartenant à strictement moins de 4 alignements chacun [10] .
Ce qui amène la question : est-ce possible ?

3.3 Alignement de points "à 3"

Soient 3 points, A, B et C, alignés, n'appartenant chacun qu'à 3 alignements au maximum [11] . Or, ils sont alignés, il ne reste donc que deux alignements supplémentaires pour chacun d'eux. Or, il faut au minimum 3 points appartenant chacun à 4 alignements pour qu'il y ait 10 alignements [12] . Soient donc 3 autres points, D, E et F, appartenant chacun à 4 alignements. Les 3 derniers points disponibles appartiennent à 2, 3 ou 4 alignements chacun. Il y a alors plusieurs cas : soit D, E et F alignés [13] . Or, il ne peut pas y avoir plus de 3 points dans un alignement. Donc, A,B et C n'appartiennent pas à [DF]. Donc, chacune des combinaisons entre D,E,F etA,B,C sera un segment distinct, ce qui fait 6 segments [14] . Or, dans ce cas, A, B et C appartiennent chacun à [AC] et à un alignement par point "à 4", ce qui fait 4 alignements. Or, A,B et C n'appartiennent qu'à 3 alignements. Donc, D, E et F ne sont pas alignés. Donc, on retrouve la situation précédente, avec la contrainte supplémentaire que les points "à 2" doivent devenir des points "à 3" en étant alignés. Or, ce n'est pas possible (figure 5) [15]

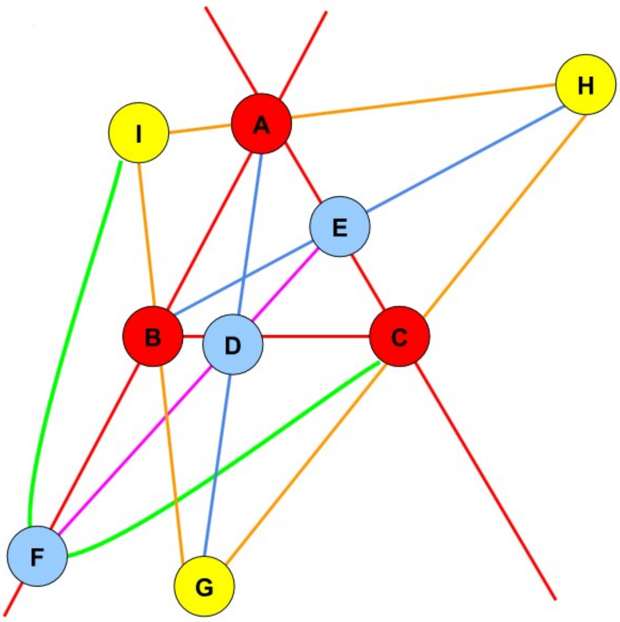


FIGURE 5 – Alignement impossible

Donc, les points "à 4" sont forcément alignés et sont donc au nombre de 3.

3.4 Unique construction possible

Soit A,B et C, trois points alignés. Ce seront les points par lesquels passeront 4 alignements chacun. Soit D,E,F,G,H et I, 6 autres points, par lesquels passeront 3 alignements chacun. Or, A,B et C appartiennent à 4 alignements chacun. Donc, il existe 3 segments sans points communs auxquels appartiennent respectivement A,B et C. Soit $A \in [HE]$, $B \in [DI]$ et $C \in [FG]$. Or, B doit appartenir à des alignements communs avec E,F,G et H. Or, ce sont les seuls points à ne pas déjà appartenir à un alignement commun avec B. Soit, donc, $B \in [HF]$ et $B \in [EG]$ [16] . Donc, E et F sont de l'autre côté de l'axe (AC) par rapport à G et H, respectivement. Il y a alors 2 possibilités : soit $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{AH}$, soit $\overrightarrow{EA} = -k\overrightarrow{AH}$, de même pour C,F et G. Or, D et I doivent appartenir chacun à un alignement commun avec A et un avec C. Or, seuls E et H n'appartiennent à aucun alignement commun avec D,I et C et seuls F et G n'appartiennent à aucun alignement commun avec D,I et A. Soit, donc, $D \in [EC]$ et $D \in [FA]$ et $I \in [HC]$ et $I \in [GA]$. Or, D appartient à [EC] et [FA] si et seulement si E et F sont du même côté de l'axe (AC). Or, H et G sont de l'autre côté de l'axe (AC) par rapport à F et E, respectivement. Donc, E et H, ainsi que F et G sont opposés par l'axe (AC). La seule construction possible, transformations affines incluses [17] , est donc la figure 6.

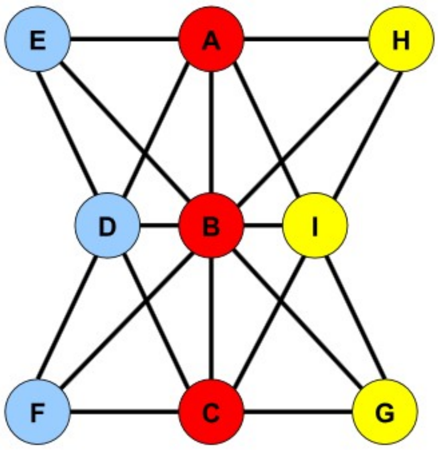


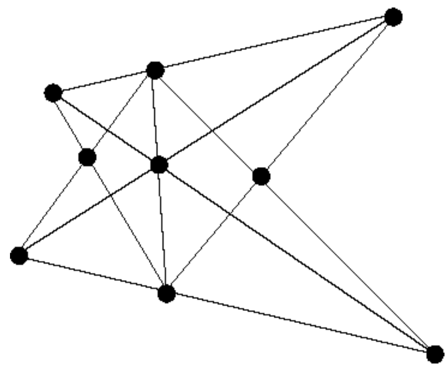
FIGURE 6 – La seule figure ?

4 Conclusion

Ainsi, dans les limites du problème — 9 verres assimilables à des points et un minimum de 10 alignements — nous avons démontré qu'il existait une seule figure (transformations affines incluses) remplissant toutes les conditions. Celle-ci est construite à partir de 3 points "à 4", alignés, puisqu'il s'agit de la seule disposition possible.
Nous avons étudié quelques cas avec un nombre différent de points, mais les mêmes conditions. Lorsqu'il y a moins de 9 points, les différentes constructions sont facilement démontrables et il y a souvent, pour un même nombre de points, plusieurs figures possibles. Nous n'avons pu nous pencher que rapidement sur les cas avec plus de points et avec assez peu de résultats. Ce serait donc sans doute intéressant de s'y intéresser plus en détail.

5 Notes d'édition

[1] En effet, il y a autant d'alignements de 3 points que de choix de 3 points parmi 9, ce qui donne le nombre "3 parmi 9" = (6x8x9) / (2x3) = 84.
[2] Ici, on utilise le vocabulaire introduit au début de la partie 3 : un point A est dit "aligné avec un point B" si A appartient à l'un des alignements auxquels appartient B. Un point aligné avec tous les autres points ne signifie donc pas que tous les points sont sur la même droite, mais seulement que ce point appartient à au moins un alignement auxquels appartient chaque autre point.
[3] Le raisonnement n'est pas complet. En effet, la note précédente explique que l'existence d'un point "aligné avec tous les autres" n'est pas l'existence d'une droite à laquelle tous les points appartiennent. L'argument manquant est donné dans la partie 3, lorsqu'on démontre qu'il ne peut pas y avoir plus de 3 points "à 4".
[4] On doit ici aussi définir les points "à n" : on dit qu'un point est "à n" si le nombre d'alignements qui passent par ce point est n. Ainsi, la figure 3 montre un point "à 4".
[5] On cherche ainsi à démontrer que si $A \geq 10$, alors chaque $n1, n2, \ldots, n9$ est ≥ 2. On démarre ensuite une preuve par l'absurde : supposons que $A \geq 10$ mais qu'au contraire, l'un des ni est < 2 (donc = 0 ou 1), c'est à dire que parmi les 9 points, il y en a un, noté M, qui est "à 0" ou "à 1". À la fin du paragraphe, on tombe sur $(n1 + \cdots + n9)/3$ qui vaut 9 au maximum, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse de départ qui était que $A \geq 10$. C'est que donc en effet chaque $n1, n2, \ldots, n9$ est ≥ 2.
6] Sinon en effet il y aurait 4 points dans le même alignement.
[7] Sinon en effet il y aurait 4 points dans le même alignement.
[8] Les points ne sont pas nécessairement à l'intérieur du segment. Pour être exact, il faut considérer les droites $(AB), (BC)$ et (AC). Cela ne change rien à la suite du raisonnement.
[9] Le point marqué J est en fait le point G.



[10] Car en effet un point ne peut avoir plus de 4 alignements.
[11] Dans cette sous-partie, on démontre (encore par l'absurde) qu'il ne peut pas y avoir d'alignement de 3 points "à 3". Comme corollaire (résultat qui en découle), on termine la preuve de la sous-partie précédente (les points "à 4" sont forcément alignés) avec le nom des points qui change.
[12] En effet, si on a seulement 2 points "à 4", alors le nombre d'alignements est *au plus* (si tous les autres points sont "à 3") de 2*4 +7*3 = 29 ce qui est inférieur à 3*10 alignements.
13] Un dessin aide à comprendre : 2 droites sécantes, l'une contenant A, B et C, l'autre contenant D, E et F. Dans la suite du raisonnement, il faut remplacer les segments par des droites (par exemple $[DF]$ par (DF)).
14] Ceci fait 9 segments ($[AD]$, $[AE]$, $[AF]$, etc.), mais cela n'a aucune incidence sur la suite du raisonnement.
[15] Il manque un sérieux argument et la figure 5 n'est pas claire...
[16] Ici manque une justification. Pourquoi B doit-il être à l'intérieur du segment ? La suite du raisonnement manque de rigueur pour démontrer qu'il n'y a pas d'autre configuration.
[17] Les transformations affines préservent les alignements, donc transforment la disposition de la figure 6 en d'autres dispositions équivalentes (même nombre de points, même nombre d'alignements). Mais les transformations affines préservant aussi le parallélisme, la disposition de la figure ci-dessus n'est clairement pas une transformation affine de la figure 6 (puisque les droites parallèles ne le sont plus) mais pourtant y est équivalente. L'ensemble des transformations qui laissent la disposition équivalente est donc bien plus large que simplement l'ensemble des transformations affines (en particulier il contient certaines transformations projectives).