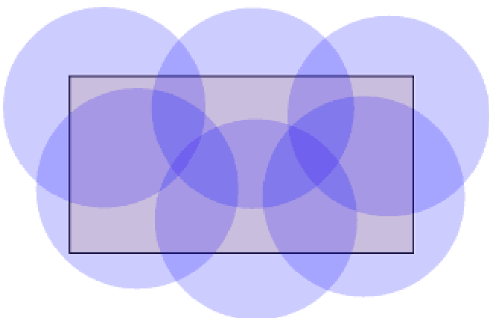
Placement optimal d'antennes de téléphonie mobile

Romain BADINA, Justine DIDIERJEAN, Iliyas JORIO, Thomas LE SAUX, Clément MOUREAUX, Thibault PERRIN, Benjamin SAUNIER, Paul-Henri SOUSTRE

élèves de Tle S et de 1ère S, Lycée Ernest Bichat, Lunéville (54)

Enseignants : Geneviève BOUVART, Christine FABRY, Patrick MARCOLÉ

Chercheur : Antoine HENROT



Un exemple d'agencement d'antennes sur une ville rectangulaire. Ce n'est pas forcément une configuration optimale !

Sujet

Une compagnie de téléphonie mobile veut positionner ses antennes dans une ville.

Elle a beaucoup de chance car elle peut les mettre où elle veut. On sait que chaque antenne a un rayon d'action (ou couverture) donné R. La compagnie souhaite qu'il n'y ait aucune zone non couverte.

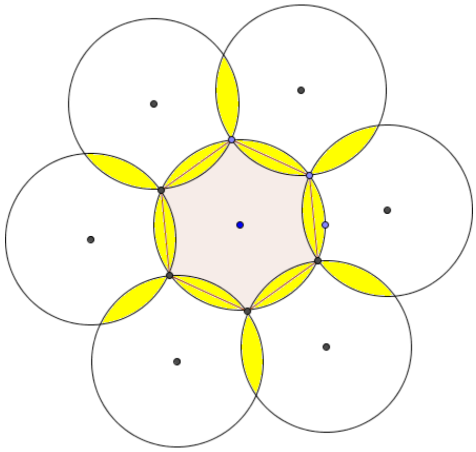
Comme chaque antenne coûte cher, le problème est de recouvrir tout le territoire de la ville avec le minimum d'antennes.

Mots-clés

ANTENNE, PAVAGE, PLAN, COUVERTURE, RECOUVREMENT, DISQUE, OPTIMISATION, ALGORITHME, PROGRAMME

Pavage hexagonal : régulier mais pas forcément optimal

Notre première piste était de trouver quel polygone était le plus avantageux pour paver le plan. En admettant que l'on pave le plan [il 'agit surtout dans cet article de *couvrir* le plan] avec un polygone et que l'on inscrive chaque polygone du pavage dans un disque, il nous faut trouver le « rendement » de ce pavage. Nous définissons le *rendement d'un polygone* pavant le plan comme la proportion de l'aire [du] disque circonscrit à celui-ci [qui est] non recouverte par un disque voisin.



En gris foncé : les pertes (aires recouvertes par plusieurs disques). En gris clair, au centre : le rendement.

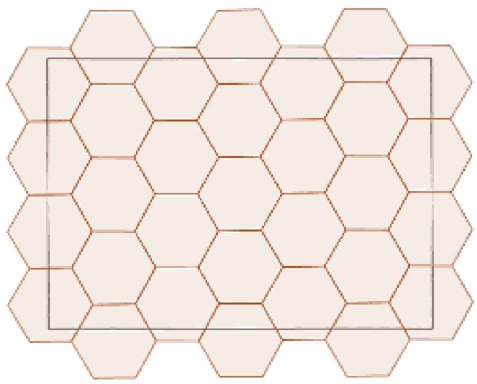
Nous sommes parvenus à établir la formule suivante, donnant *l'aire utile du disque central « fournie » par chaque côté* du polygone inscrit, en fonction du nombre n de côtés

[Cette aire représente le *rendement partiel* c'est à dire la contribution d'un seul coté au rendement , la formule donnée [pour n>3] tient compte du fait que le disque central a pour rayon 1]

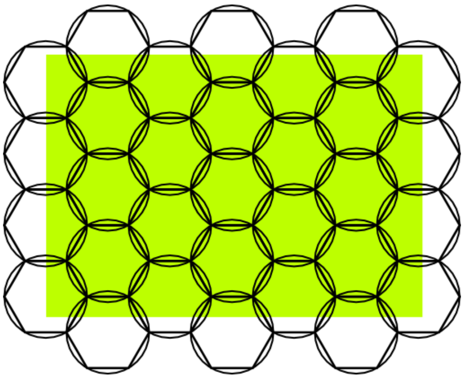
$$\left|\sin\frac{2\pi}{n}\right| - \frac{\pi}{n}$$

Vous trouverez le raisonnement ayant abouti à cette formule en **Annexe 1**.

Selon cette formule, l'hexagone donne le meilleur rendement [partiel], et est donc le meilleur choix pour paver le plan.



Cependant, en disposant des disques manuellement et sans souci de régularité sur une ville rectangulaire, nous avons trouvé que le nombre d'antennes ainsi utilisé était inférieur à celui donné par le pavage hexagonal. En effet, avec un pavage régulier, certaines antennes dépassaient trop de la ville.

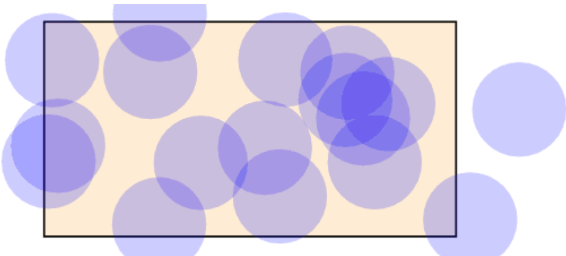


Nous nous sommes donc lancés dans l'écriture d'*un programme qui agencerait les antennes de façon irrégulière*.

Problème de l'agencement irrégulier

Le rendement de la répartition irrégulière doit être plus efficace que le pavage hexagonal. Par abus de langage, nous utiliserons le mot « antenne » pour désigner « l'aire de couverture d'une antenne » [c'est un disque].

Pour débuter la réflexion, on sait qu'une répartition régulière n'est pas la solution optimale. Tentons alors une répartition aléatoire à l'aide d'un ordinateur.



On remarque que cette solution est loin d'être optimale : le territoire n'est pas couvert entièrement, malgré un nombre d'antennes à priori suffisant ! Trop d'antennes se recoupent inutilement. Trop d'antennes dépassent de la ville.

Pour avoir une couverture optimale, on veut donc résoudre ces problèmes :

- Deux antennes devraient se recouper le moins possible.
- Une antenne devrait dépasser le moins possible de la ville.

Le cycle [du programme]

Le programme tente de résoudre ces deux problèmes en partant d'une configuration vide d'antenne. On travaille « pas à pas », par cycles [successifs] dont le déroulement est le suivant:

(1) Dans chaque cycle, on vérifie d'abord si les antennes couvrent au moins 99% de la ville. (Trouver une couverture d'exactement 100% est rare en pratique.) Si c'est le cas, on a trouvé une configuration optimale et le programme se termine là.

(2) Si ce n'est pas le cas, on corrige très légèrement la position des antennes. Cette correction consiste à appliquer des forces de répulsion mutuelle aux antennes se recoupant, ainsi que des forces de répulsion aux antennes dépassant de la ville.

(3) Si la correction de la position des antennes n'a eu aucun effet, c.à.d que les antennes n'ont pas bougé, cela signifie que toutes les forces appliquées à celles-ci s'annulent. On a alors une configuration stable, mais les antennes ne couvrent pas suffisamment de surface (d'après l'étape (1)). Il faut alors rajouter une antenne aléatoirement sur la ville et recommencer le cycle.

Ce cycle va être répété des milliers de fois jusqu'à obtention d'une couverture optimale. Veuillez vous reporter à l'**Annexe 2** pour un organigramme résumant le fonctionnement d'un cycle.

Correction de la position d'une antenne

Mais alors, comment déplacer les antennes ? Il faut d'abord savoir que le programme dispose d'une liste d'antennes dans laquelle chaque entrée contient :

- les coordonnées du centre de l'antenne : $(x;y)$.

- un vecteur-force $\vec{F}$, qui matérialise la correction de position à appliquer à l'antenne.

Sachant cela, voici ce qui se passe dans le cycle quand on corrige la position des antennes :

a) Pour chaque antenne A_i de la liste, calculer sa force $\vec{F_i}$.

b) Pour chaque antenne A_i de la liste, corriger sa position en appliquant $\vec{F_i}$.

Notez qu'il y a deux boucles distinctes. On pourrait penser qu'il serait plus économique de n'utiliser qu'une seule boucle où l'on appliquerait la force $\vec{F_i}$ à l'antenne A_i directement après l'avoir calculée. Alors, quelle est l'utilité d'itérer deux fois sur la liste d'antennes ?

Il est nécessaire de trouver ***toutes*** les forces appliquées aux antennes ***avant*** de corriger leurs positions. En effet, si on corrigeait la position de l'antenne immédiatement après avoir trouvé sa force, cela fausserait le calcul des forces suivantes puisque le calcul dépend des positions des antennes adjacentes.

[Les auteurs ne précisent pas comment est calculé le déplacement à chaque boucle de calcul, ni combien de fois les boucles sont effectuées dans leur programme.]

Calcul de $\vec{F}$

C'est une routine appelée par le cycle qui se charge de trouver $\vec{F}$. Cette routine s'occupe donc d'une seule antenne à la fois. S'il y a N antennes dans la ville, le cycle appelle cette routine N fois. Voyons alors ce que fait ladite routine lorsque le cycle lui demande de corriger la position de A_n (la n-ième antenne de la liste):

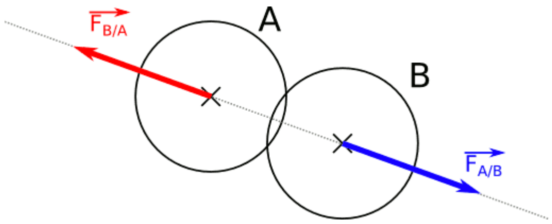
Réinitialiser $\vec{F_n}$ en posant $\vec{F_n} = \vec{0}$.

Si A_n recoupe A_p, ces deux antennes doivent se repousser mutuellement. Pour cela, il faut ajouter à $\vec{F_n}$ une force de répulsion adéquate (cf ci-après).

Si A_n dépasse de la ville, elle doit être repoussée vers l'intérieur de la ville. Pour cela, ajouter à $\overrightarrow{F_n}$ une force de répulsion adéquate (cf ci-après).

Répulsion entre deux antennes

Si une antenne A de centre O_A recoupe une antenne B de centre O_B, on souhaite appliquer à A une certaine force de répulsion, dont les caractéristiques sont : origine O_A, direction (O_AO_B), sens opposé à O_B, norme choisie de manière que la force soit d'autant plus grande que la distance O_AO_B est petite.



Dans notre modèle, la norme [et le déplacement] est choisie proportionnelle à $1-\frac{O_AO_B}{2R}$ ($2R$ étant la distance maximale entre les centres de deux antennes sécantes).

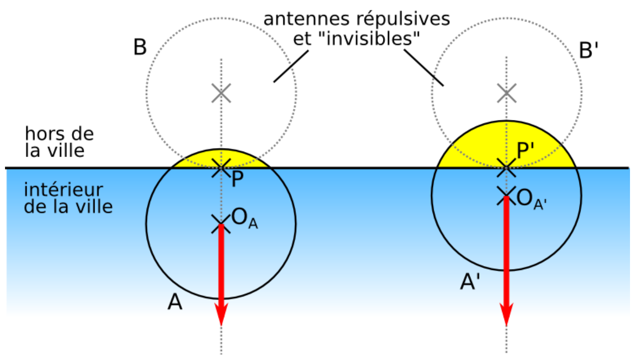
[Dans un autre modèle, mis au point en fin d'année, la répulsion a été choisie selon la 3ème loi de Newton.]

Répulsion par la bordure

Soit une antenne A de centre O_A et soit P le point du périmètre de la ville le plus proche de O_A.

Lorsque $PO_A<R$, c'est à dire lorsque l'antenne commence à dépasser de la ville, on souhaite lui appliquer une certaine force de répulsion dont les caractéristiques sont: origine O_A, direction (PO_A), sens vers l'intérieur de la ville, norme choisie égale à celle qui résulterait du recoupement d'une antenne invisible B tangente en P à la bordure de la ville.

Voici deux exemples :



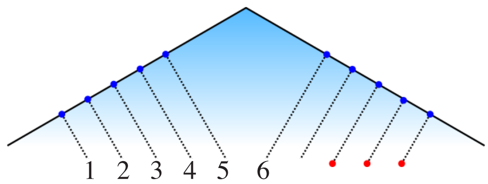
Plus une antenne s'approche de l'extérieur de la ville, plus elle est repoussée fortement vers l'intérieur.

Dans notre modèle [initial] la norme [et le déplacement] est choisie proportionnelle à $1-\frac{R+PO_A}{2R}$.

Problèmes en suspens

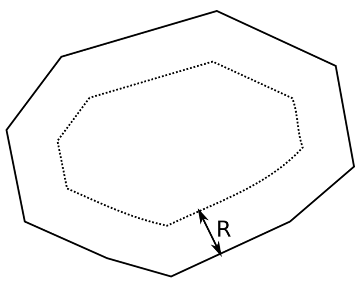
Tout d'abord, le programme arrive très rarement à obtenir une configuration optimale et une couverture parfaite (100%). La couverture est donc considérée comme satisfaisante à partir de 99%. [Les auteurs ne précisent nulle part comment est évaluée la surface couverte].

De plus, notre approche de la répulsion par la bordure est problématique. Admettons que les points gris (tous alignés, en bas) sur la figure ci-dessous représentent les positions successives du centre O d'une antenne se déplaçant de gauche à droite. Les points noirs (sur le périmètre du polygone) représentent les positions successives du point P, contenu sur le périmètre de la ville, le plus proche de O.

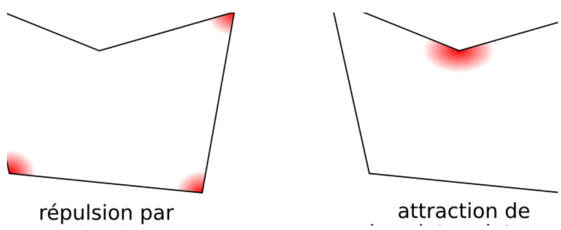


Entre les positions 5 et 6, le point P change brusquement de segment. Cela se traduit par un vecteur-force qui change subitement de direction, provoquant un effet de « spasme » pour l'antenne. Ce spasme est d'autant plus remarquable si des forces externes la poussent à rester dans cette zone de transition : l'antenne bascule alors incessamment entre deux positions successives, ce qui nuit à la stabilité de la configuration, ainsi qu'au calcul des forces des antennes adjacentes.

Nous n'avons pas encore réussi à résoudre ce problème. Actuellement, le programme l'atténue en créant une « ceinture interne » au polygone, c'est à dire une version « dégonflée de la distance R » du polygone.
Sur la figure : en trait continu, le polygone original ; en pointillés, la ceinture interne.



En fait, cette technique inverse le problème : la bordure de la ville ne repousse plus les antennes ; c'est plutôt la ceinture interne qui les **attire** de façon à ce qu'elles ne s'échappent pas de la ville.

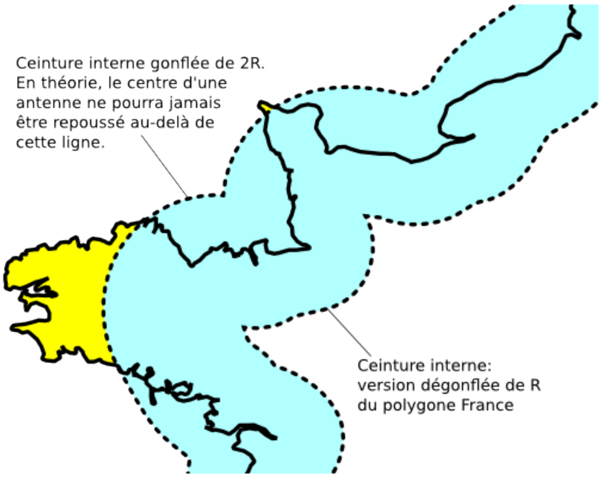


En gris : les zones de spasmes apparaissant en fonction du mode de répulsion choisi.

En inversant le problème, les spasmes disparaissent effectivement autour des parties convexes [saillantes] du polygone (en théorie les plus courantes). Mais des spasmes surviennent désormais dans les parties concaves [rentrantes] du polygone. Le problème est moins visible mais existe toujours. Cela nous permet toutefois de pouvoir expérimenter sans problème avec des *polygones convexes*.

De plus, cette technique limite fortement la complexité d'une ville. Le « dégonflement » a pour effet secondaire de *simplifier le contour d'un polygone*. Ainsi, la distance maximum d'une antenne à la ceinture interne étant $2R$ (au-delà, l'antenne est strictement hors de la ville et donc inutile), il se peut que des portions de la ville ne soient jamais couvertes.

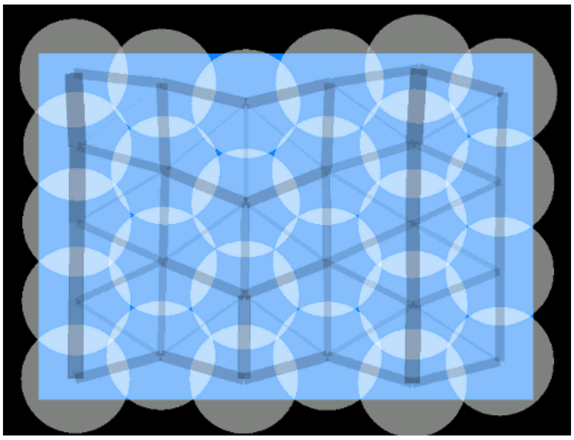
Exemple. Si on prend la France comme « ville », une partie de la Bretagne et de la Normandie ne sera jamais couverte à partir d'une certaine valeur de R, du fait d'une simplification trop agressive du polygone France.



Le Finistère et la « pointe » du Cotentin ne sont pas couverts lorsque R devient trop grand, du fait d'une simplification trop poussée du polygone France.

Conclusion

L'image ci-dessous a été produite avec le programme après avoir placé quelques antennes au hasard et attendu la stabilisation de la configuration.



L'épaisseur des traits gris foncé montre l'intensité des forces de répulsion des antennes

Avec le programme, au bout d'un certain nombre d'antennes placées, on remarque que leur disposition tend à ressembler au pavage hexagonal ... Et ceci « naturellement », sans que le programme ne tente de former cette disposition en particulier ! Ce qui confirme ce que nous avions trouvé au début : l'hexagone est le plus efficace pour paver le plan.

Ce problème est apparenté à celui résolu récemment (T. C. Hales, *The Honeycomb Conjecture*) où il s'agissait de rechercher la forme qui pavait le plan avec un périmètre minimal pour une aire donnée. La solution est là aussi un hexagone régulier comme l'ont découvert les abeilles dans la confection de leur habitat.

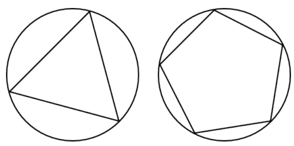
Vous pouvez télécharger le logiciel que nous avons écrit à cette adresse : `http://www.antennes.foo.se`

Il est présenté sous forme d'un petit jeu, mais le mode « expérimentation » permet de placer des antennes manuellement et de mettre en évidence le fonctionnement de notre algorithme.

* * *

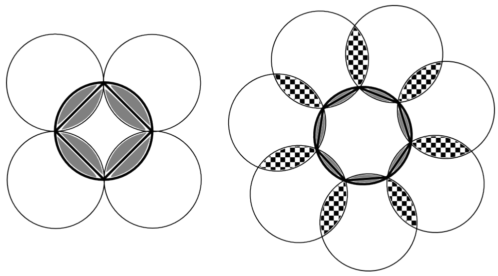
Annexe 1 - Formule de rentabilité.

Idée : paver [en fait *couvrir*] le plan avec un polygone régulier. Chaque polygone serait inscrit dans un disque représentatif de la couverture d'une antenne.



Quel polygone choisir ? Il doit être le plus « rentable » : on doit pouvoir couvrir un maximum de surface avec un minimum d'antennes. *Comment calculer un indice de rentabilité ?*

Prenons un polygone régulier au hasard à ***n*** côtés [...]. Le polygone. Le disque central a donc ***n*** disques adjacents. Plus il y a de côtés dans le polygone, plus il y a de disques adjacents. Et plus il y a de disques adjacents, plus ces derniers vont se recouper inutilement entre eux (aire *B*), mais moins ils vont empiéter sur le disque central (aire *A*). (cf. schéma ci-dessous)



Aire A en gris, aire B en damier.
À gauche n=4, *à droite* n=7.
On constate que $A_4 < A_7$ *et* $B_4 < B_7$

On veut donc trouver le meilleur équilibre entre les aires *A* et *B*, en sachant que quand *n* augmente, *A* diminue, et *B* augmente.

Pour simplifier le problème, on se concentre uniquement sur le disque central : nous n'allons pas calculer l'aire *B*, mais simplement considérer que ***n*** doit être petit (puisque *B* augmente avec ***n***), tout en cherchant à avoir une aire *A* la plus petite possible.

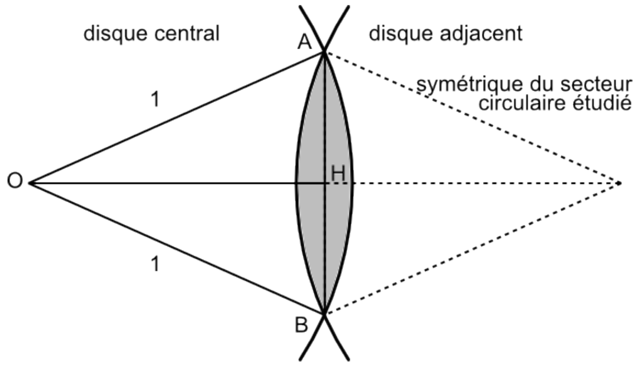
En d'autres termes, si le disque central est de rayon 1 (donc d'aire π), on souhaite que l'aire « $\pi - A$ » soit la plus grande possible, pour un *n* le plus petit possible. On cherche donc pour quelle valeur de *n* le rapport $\frac{\pi - A}{n}$ s'approche le plus de π. [Ce choix est arbitraire ; il revient en fait à rendre le rapport le plus grand possible.]

Ce rapport correspond aussi à l'aire utile « contribuée » par chaque côté du polygone au disque central. En effet, à chaque côté du polygone correspond une section circulaire. Il y a *n* sections. Sachant cela, nous pouvons calculer le rapport ci-dessus.

Soit S l'aire d'une section circulaire de notre disque de rayon 1, d'aire π : $S = \frac{\pi}{n}$

Soit S_U l'aire utile d'une section (i.e. non recouverte par un autre disque) : $S_U = S - \frac{A}{n}$. C'est le rapport qui nous intéresse.

Comment calculer A/n ? Ci-contre, un schéma d'un secteur circulaire avec le disque adjacent s'y rattachant [le dessin serait différent pour n=3]. Lorsqu'un disque adjacent est présent, l'aire « A/n » est formée (en gris) ; et, de l'autre côté de (AB), un autre secteur apparaît, symétrique par rapport à l'axe (AB).



Donc, en notant s l'aire du triangle OAB, on a :

$\frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n} = S - s$ d'où $S_U = 2s - S$ [le résultat est négatif pour n=3]

OAB est un triangle isocèle donc la médiatrice (OH) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{AOH}$. Vu que OA=OB=1, on a :

$$\widehat{\mathrm{AOH}} = \frac{\pi}{n}\,;\cos\frac{\pi}{n} = \mathrm{OH},\,;\sin\frac{\pi}{n} = \mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$$

On en déduit que :

$$s = \cos\frac{\pi}{n} \cdot 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

Ainsi : $\boxed{S_U = 2s - S = \sin\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{n}}$

n	%
3	–5,77 %
4	6,83 %
5	10,27 %
6	**10,90 %**
7	10,60 %
8	10,01 %
9	9,35 %

Cette formule nous donne donc l'aire contribuée au disque central par chaque côté du polygone, en fonction du nombre ***n*** de côtés.

[...] Le tableau ci-contre présente le rapport S_U/π sous forme de pourcentage (colonne « % »), soit le pourcentage de l'aire utile totale du disque contribuée par un côté du polygone).

(Note à propos du résultat négatif pour n=3 : tracez une figure et vous verrez que les disques adjacents se recoupent *à l'intérieur* du disque central, d'où ce résultat négatif. Cela n'arrive qu'avec le triangle.)

Ainsi, le plus petit nombre ***n*,** tel que l'aire « $\pi - A$ » soit la plus grande possible, semble être 6 **:** *l'hexagone* semble être le polygone le plus avantageux pour paver le plan. Cela tombe bien car l'hexagone peut paver le plan, contrairement à l'heptagone (10,60 %) ou au pentagone (10,27 %).

Annexe2 - Organigramme résumant le déroulement d'un cycle du programme