Qui mangera le plus de pizza ?

Année 2016 - 2017

Élèves de 3ème : Manoëlle DANGY-CAYE, Héloïse GUIBOUT, Cléo GUYOT, Maïa BINET.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Maxime INGREMEAU, Université Paris Sud 11.

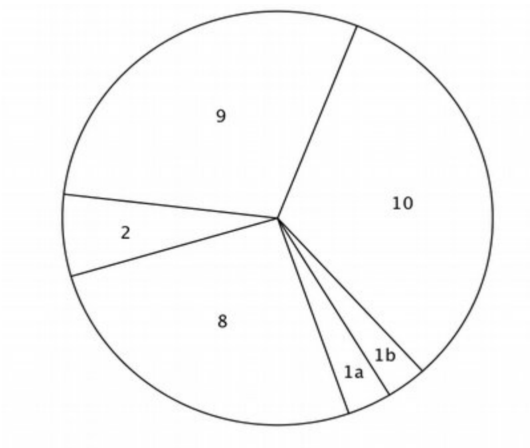
Le sujet : Une pizza est coupée de façon inégale. Deux joueurs vont manger la pizza en prenant une part chacun leur tour ; mais attention : une fois qu'une part a été mangée, on ne peut prendre qu'une part adjacente à une part déjà mangée. Le premier joueur est-il sûr de manger le plus de pizza ?

Résultats : Nous avons trouvé une stratégie pour que le premier joueur mange une quantité supérieure ou égale à celle du deuxième pour des pizzas de 1 à 4 parts ou pour des pizzas avec un nombre pair de parts. Lorsque le nombre de parts est impair, nous avons démontré avec un contre-exemple que le premier n'est pas sûr de gagner.

I – Premiers exemples et début de la recherche

1) La pizza-exemple

Au début de l'année, on nous a donné, avec le sujet, un exemple de pizza coupée n'importe comment, avec des parts très déséquilibrées. Nous l'avons nommée « La pizza-exemple » et avons commencé nos recherches dessus.



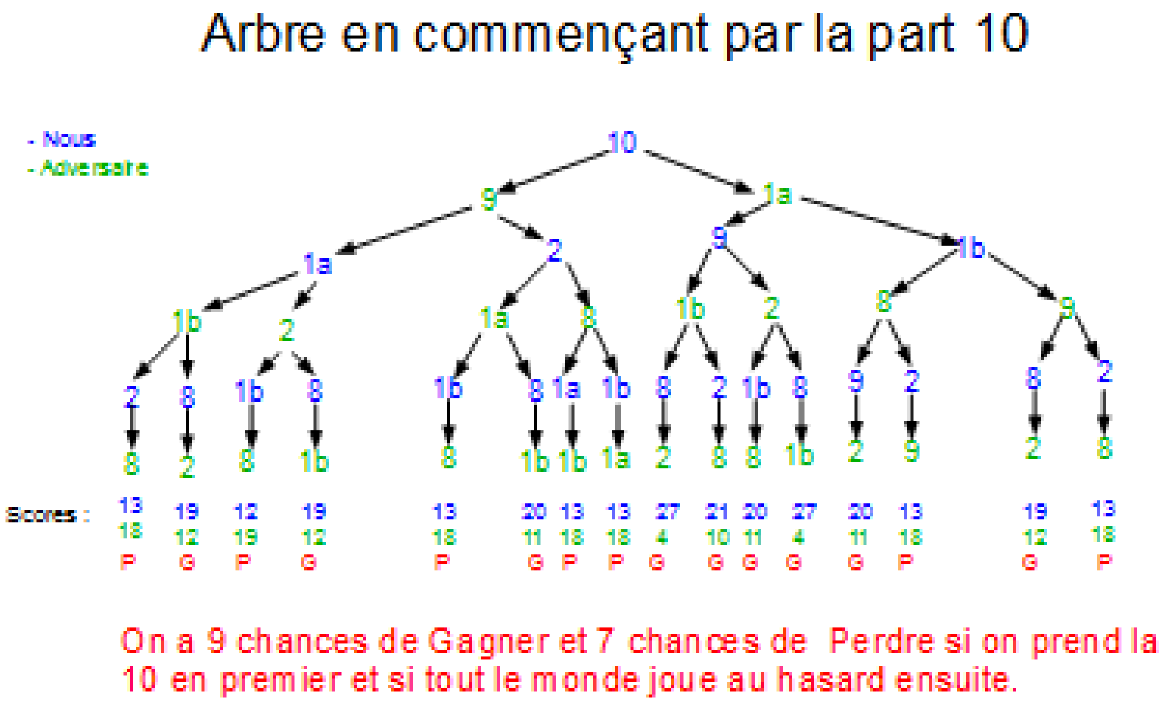
La pizza-exemple

Figure 1

Les nombres indiqués sur les parts représentent la taille des parts. Par exemple, la part notée 8 est quatre fois plus grande que la part notée 2, et elle représente 8/(2+9+10+1+1+8) c'est à dire 8/31 de la pizza totale. Pour savoir qui a, au total, mangé le plus de pizza, il suffira d'ajouter les nombres inscrits sur les parts de chaque joueur et de comparer les deux sommes.
Dans toute la suite, nous nommerons X le joueur qui joue en premier et Y l'autre joueur.
Voici un exemple de partie pour bien comprendre le sujet :
X prend 10 ; Y a le choix entre 9 et 1b, les parts adjacentes à 10. Y prend 9.
X a maintenant le choix entre 2 et 1b ; il prend 2. Y prend, par exemple 8, X termine avec 1a et Y avec 1b. Somme des « points » pour X : 10 + 2 + 1 = 13 ; pour Y : 9 + 8 + 1 = 18.
C'est Y qui a gagné ! Il a mangé le plus de pizza au total (1).

2) Les arbres de possibilités

Pour commencer nos recherches, nous avons fait des arbres de possibilités pour chaque part de la pizza-exemple si on joue au hasard pour étudier toutes les possibilités de jeu.
Voici un exemple d'un des arbres de possibilités :



Nous avons fait 5 autres arbres de possibilités comme celui-ci en commençant par les autres parts de la pizza-exemple (9,2,8,1a et 1b). Nous avons remarqué que dans aucun cas il n'y a 100% de chances de gagner en jouant sans réfléchir.

Après avoir étudié tous les cas, nous avons constaté que prendre la part 8 pour commencer était la possibilité la plus convaincante, car on a 13 chances de gagner et 3 chances de perdre.

Pour conclure, observer les arbres de possibilités n'est pas satisfaisant, car c'est long et il y a quand même des risques de perdre puisqu'on joue au hasard, même en ayant pris la part « gagnante » (si elle existe) au départ. De plus, prendre la plus grosse part en premier n'est pas forcément une stratégie gagnante.

Nous allons donc réfléchir à une stratégie que doit adopter X pour gagner à coup sûr. Nous allons tout d'abord regarder des pizzas qui ont peu de parts.

II – Avec un petit nombre de parts

Pour faire nos recherches nous commencions toujours par des exemples puis, lorsqu'on pensait avoir une stratégie, on essayait de la démontrer.

1) Avec 2 parts

Deux cas :
- Les deux parts sont égales ; dans ce cas, il y a une égalité entre les deux joueurs.
- Une part est plus grande que la deuxième ; dans ce cas, celui qui prend la plus grande a gagné.

<u>Conclusion</u> : Pour les pizzas à deux parts, en prenant la plus grande part, X est sûr de gagner ou de faire égalité.

2) Avec 3 parts

Prenons 3 parts a, b et c. On suppose que a est supérieur ou égal à b et à c.
X prend a.
Soit Y prend b et X gagne puisqu'il a un total de a + c et a + c > b
Soit Y prend c et X gagne avec un total de a + b et a + b > c.

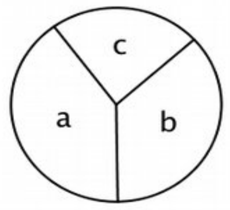


Figure 2

Conclusion : Pour les pizzas à trois parts, en prenant la plus grosse part (ou une des plus grosses parts), X gagne à coup sûr.

3) Avec 4 parts

Prenons 4 parts a, b,c et d. On suppose que a est supérieur ou égal aux autres parts.
X prend a.
Y prend b ou d et X gagne puisqu'il prend la plus grosse part entre les deux restantes : ses deux parts sont chacune supérieure ou égale à celles de Y donc son total également.

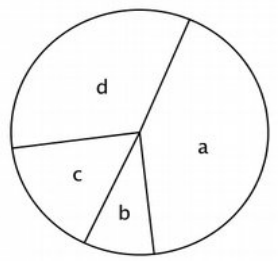


Figure 3

Conclusion : Avec quatre parts, il faut commencer par la plus grosse part pour être sûr de gagner ou de faire égalité (2).

Jusqu'ici la stratégie gagnante semble reposer sur la plus grosse part pour démarrer.

4) Avec 5 parts

Nous avons pris de nombreux exemples où la part la plus grosse se révélait être une stratégie gagnante. Puis, nous sommes arrivés à trouver un contre-exemple :

Supposons que X prenne 10 (la plus grosse part).
Y prend 9.
Si X prend 1 ou 2 alors Y prendra 8 et gagnera.
X a un total de 13 et Y un total de 17.

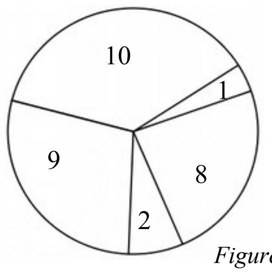


Figure 4

Pour être sûr de gagner ici, il faut commencer par la part 8.
X prend 8, Y prend 1 ou 2, X prend 9 ou 10 suivant le choix précédent de Y. X a un total de 18 ou 20 et Y a 12 au maximum.

Conclusion : Il ne suffit pas de commencer par la plus grande part pour gagner. A partir de 5 parts, il faut donc chercher une autre stratégie.

III – Méthode

Nous avons remarqué que la difficulté de trouver une méthode dépendait de la parité du nombre de parts de la pizza.

1) Avec un nombre pair de parts

Prenons un exemple pour illustrer la stratégie.

Si X prend la plus grosse part, il perd (3).
Le total des parts vaut 31. Nous regardons les paquets de parts en les prenant une sur deux.
Les parts entourées d'un carré donnent une somme de 13 et celles entourées d'un cercle donnent une somme de 18.

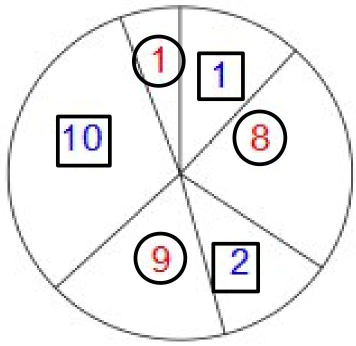


Figure 5

Si X prend la part 8 ou même n'importe quelle part entourée d'un cercle, Y devra prendre une part adjacente, entourée d'un carré. X choisira à nouveau celle entourée d'un cercle libérée par Y qui lui même, n'ayant pas le choix, devra en prendre une entourée d'un carré et ainsi de suite. A la fin, X aura toutes les parts entourées d'un cercle et Y celles entourées d'un carré ; X gagne donc.

Généralisation de la méthode.

Prenons une pizza avec 2n parts, où n est un entier positif.
On note $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, les parts prises une sur deux et $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ les autres.

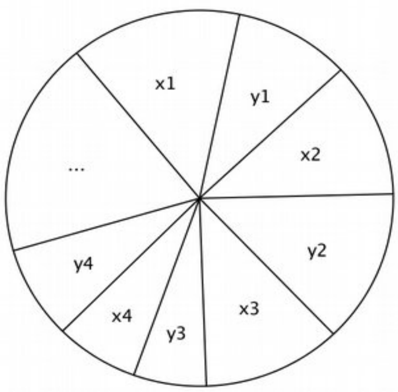


Figure 6

On calcule la somme de chaque paquet :
On note S_1 la somme de tous les « *x* » et S_2 la somme des « *y* ». Si S_1 est plus grand que S_2, X devra prendre en premier une part « *x* » ce qui forcera Y à prendre une part « *y* » (4). X prendra alors la part « x » puis Y une part « *y* » et ainsi de suite. A la fin, X a la somme S_1 et Y la somme S_2 . X a donc gagné.

2) Avec un nombre de parts impair

Pour le cas impair, on a pensé que l'on pourrait reprendre la stratégie précédente. On regarde une part comme si on la prenait. Il reste alors un nombre pair de parts, et donc, on peut séparer les parts en deux paquets : il faut alors calculer pour voir si la part prise au départ, ajoutée à l'un ou l'autre des paquets, donnera un résultat supérieur à l'autre paquet. Mais cette méthode n'est pas valable puisqu'une fois la part choisie par X au départ, Y a le choix pour commencer par l'un ou l'autre des paquets et il peut changer de paquet ensuite.

Exemple :
Supposons que X prenne la part 6.
6 + 7 + 1 + 2 = 16 et 16 > 12 ; 6 + 3 + 4 + 5 = 18 et 18 > 10

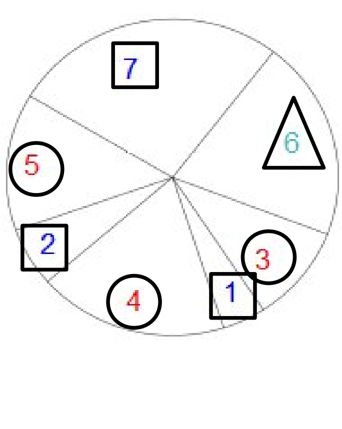


Figure 7

Si Y ne prend que des parts encadrées par un carré ou que des parts encadrées par un cercle, X gagne. Mais Y peut commencer par prendre une part dans un carré puis ensuite, à son prochain tour, décider de choisir une part entourée d'un cercle. On ne peut lui imposer un seul choix de « paquet ».

Il a la possibilité de « mélanger » les paquets de parts entourées et encadrées.

Dans les pizzas impaires, le deuxième joueur paraît désavantagé car il a une part de moins.
Cependant, il existe des situations où il peut gagner à coup sûr !
Voici un exemple où X perd à coup sûr . Nous vous laissons essayer ! (5)

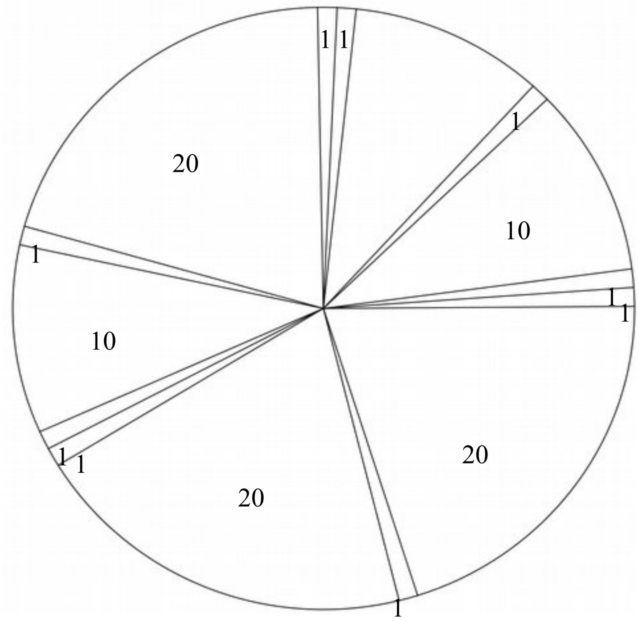


Figure 8

Cet exemple nous démontre donc qu'il n'y a pas de stratégie gagnante générale pour les pizzas avec un nombre impair de parts.

Notes d'édition

(1) La méthode appliquée ici consiste à prendre à chaque fois la plus grande part possible (ce qu'on appelle *algorithme glouton*). L'exemple montre que cela n'est pas toujours une bonne stratégie pour gagner.

(2) " il *faut* commencer par la plus grosse part*".* Ce n'est pas vraiment obligatoire, commencer par la plus grosse part (et continuer au second tour) donne une stratégie gagnante, mais ce n'est pas forcément la seule : dans l'exemple, si X choisit d, au second tour il prendra a ou c et il aura au moins égalité (et gain si d+c>a+b).

(3) Dans cet exemple, qui est le même que celui en bas de première page, l'algorithme glouton ne fonctionne pas, mais X peut tout de même commencer par prendre la part 10 : si Y prend la part 1 à côté, X prend la part 9 et il a déjà gagné ; si Y prend la part 9, X prend la part 1 (et non la 2), Y devra prendre la part 1 restante ou la part 2 et X ramassera la part 8, donc il aura encore gagné.

(4) Ici encore, cette stratégie est bonne mais ce n'est pas forcément la seule et on ne peut pas vraiment dire que *X devra prendre en premier une part x*, comme montré dans la note précédente.

(5) Il manque une valeur pour l'une des parts, on peut supposer que c'est 10.
X perd à coup sûr si Y joue au mieux. Le relecteur a fini par se convaincre que cette affirmation est exacte mais, comme il s'agit du seul exemple donné dans l'article où le second joueur a une stratégie gagnante, il aurait été utile de donner quelques indications pour le démontrer (par exemple : après un nombre impair de coups il reste un nombre pairs de parts et c'est à Y de jouer ; dans beaucoup de cas il peut alors gagner en appliquant la méthode de parité...).