# Piques et Pick et Poly~~gramme~~ Euh...gone

Année 2016-2017

Malia BILLIAU, Audrey EVEN, Kilian LE BOURDOULOUS et Bérangère LE FOLL, élèves de troisième.

Encadrés par : Pascale BEASSE et Béatrice BOILLOT

Etablissement : Collège Saint Pierre à Plouha (22).

Chercheur : Victor KLEPTSYN, Université de Rennes 1 et CNRS.

**Description du sujet**

Dans le cadre du projet Math en Jeans, Victor Kleptsyn, notre chercheur, nous a demandé de créer des polygones quelconques en mettant des élastiques autour de clous plantés et écartés d'un cm, et, à partir de là, de trouver une formule qui permette de calculer l'aire d'un polygone quelconque en fonction du nombre de points aux bords du polygone[1] (appelés *b*) et du nombre de points à l'intérieur[2] (appelés *i*).
Après, on a dû trouver une autre formule pour calculer l'aire d'un polygone troué[3] en fonction du nombre de points aux bords du polygone troué, du nombre de points à l'intérieur du polygone troué et du nombre de trous (*t*).

[1]Les points aux bords du polygone sont ceux qui touchent l'élastique
[2]Les points à l'intérieur du polygone sont ceux qui sont entourés par l'élastique
[3]Polygone troué : polygone à l'intérieur duquel un ou plusieurs trous sont formés par d'autres polygones.

Annonce des résultats trouvés :

Nous avons trouvé que :

- $\frac{b}{2}+i-1$ est une formule qui permet de calculer l'aire d'un polygone quelconque formé sur une grille de points. (formule démontrée)
- $\frac{b}{2}+i-1+t$ permet de calculer l'aire d'un polygone troué (formule démontrée)

Plan

## I/ Méthode utilisée pour trouver la conjecture concernant la formule pour les polygones non troués

C'était difficile de trouver une formule pour calculer l'aire d'un polygone car elle varie en fonction de deux données : le nombre de points au bord *b* et le nombre de points à l'intérieur *i*.
Nous avons décidé de fixer une des deux données (soit *b*, soit *i*) pour voir comment variait l'aire en fonction de l'autre nombre.
Nous avons fait de telle sorte que le nombre de points aux bords *b* soit égal à 20 et nous avons regardé comment variait l'aire en fonction du nombre de points à l'intérieur *i*. Après avoir entré les données (*b*, *i* et aire) dans un tableur pour pouvoir les comparer plus facilement, nous avons constaté que l'aire et le nombre de clous à l'intérieur variaient de la même manière.

| Aire (cm²) | Au bord | A l'intérieur |
|---|---|---|
| 16 | 20 | 7 |
| 21 | 20 | 12 |
| 23 | 20 | 14 |
| 25 | 20 | 16 |
| 30 | 20 | 21 |

*Quand l'aire augmente de 5 (de 16 à 21 par exemple ou de 25 à 30), le nombre de points à l'intérieur augmente de 5 aussi (de 7 à 12 ou de 16 à 21) .*

*Quand l'aire augmente de 2 (de 21 à 23 ou de 23 à 25 par exemple), le nombre de points à l'intérieur augmente de 2 aussi (de 12 à 14 ou de 14 à 16) .*

On en a déduit que la formule pour calculer l'aire d'un polygone semble être de la forme Aire = $i + x$,
$x$ étant un nombre inconnu.

Pour trouver la valeur de $x$, nous avons fait des polygones avec $i$ fixé à zéro et $b$ qui variait.

| Aire (cm²) | Au bord | A l'intérieur |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 |
| 2 | 6 | 0 |
| 3 | 8 | 0 |
| 4 | 10 | 0 |
| 5 | 12 | 0 |
| 8 | 18 | 0 |
| 9 | 20 | 0 |
| 14 | 30 | 0 |

*Voici ce que nous avons remarqué :*

*1, c'est 4 – 3, 3 étant la moitié de 4 augmentée de 1*
*2, c'est 6 – 4, 4 étant la moitié de 6 augmentée de 1*
*3 = 8 – 5 avec 5 = 8/2 + 1*
*4 = 10 – 6 avec 6 = 10/2 + 1*
*5 = 12 – 7 avec 7 = 12/2 + 1*
*Etc...*

Ainsi, nous avons trouvé que le nombre inconnu $x$ semblait être égal au nombre de clous au bord moins la moitié du nombre de clous au bords augmenté de 1.

La formule conjecturée est ainsi devenue $Aire = i + b - \left(\frac{b}{2} + 1\right)$

En développant cette expression, nous avons trouvé : $\boxed{Aire = \frac{b}{2} + i - 1}$

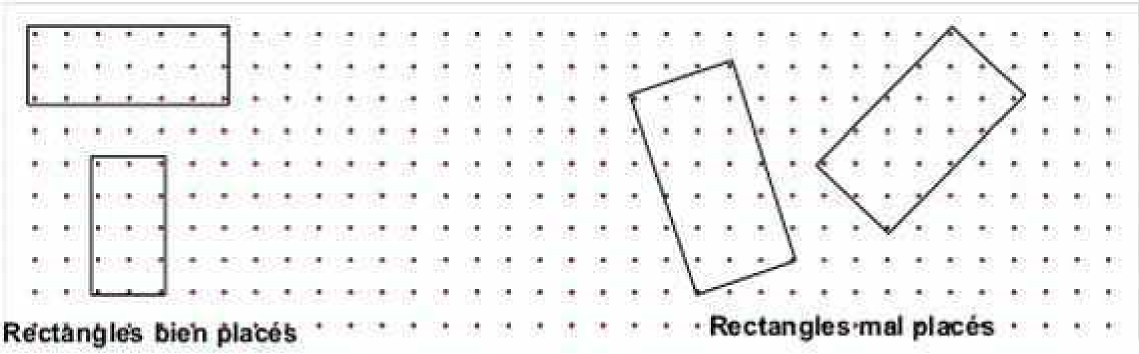
## II/ Démonstration pour un polygone « non troué » (formule de Pick)

### Méthode de démonstration

Afin de démontrer la formule précédemment trouvée sur tous les polygones, on a d'abord cherché à la démontrer sur des rectangles puis sur des triangles rectangles et enfin sur les triangles quelconques et comme n'importe quel polygone peut être divisé en une série de triangles quelconques, la formule sera alors démontrée sur tous les polygones.

## 1/ Démonstration pour un rectangle « bien placé »

Les schémas suivants expliquent ce que nous considèrerons dans ce paragraphe comme types de rectangles « bien placés ».(1)



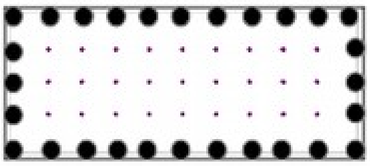

Pour les démonstrations, nous avons commencé par démontrer la formule sur le rectangle.

On sait que pour calculer l'aire d'un rectangle, on multiplie la longueur *l* par la hauteur *h*, *l* et *h* étant exprimés en cm(2), par exemple.

On a cherché à exprimer le nombre de clous aux bords et le nombre de clous à l'intérieur en fonction de *l* et de *h*. On a trouvé pour le nombre de clous aux bords $b=2(l+h)$
et pour le nombre de clous à l'intérieur $i=(l-1)(h-1)$ (3)

Par exemple, pour le rectangle suivant, l'unité entre deux clous étant le centimètre, la longueur *l* est de 10 cm et la hauteur *h* est de 4 cm.

Le nombre de clous au bord (les gros clous noirs sur le schéma) est de 28 soit 2( 10 + 4) et le nombre de clous à l'intérieur (les clous fins sur le schéma) est de 27 soit (10 – 1)(4 – 1).



Ensuite, on a remplacé dans la formule le nombre de clous au bord par $2(l+h)$ puis le nombre de clous à l'intérieur par $(l-1)(h-1)$ puis on l'a développée :

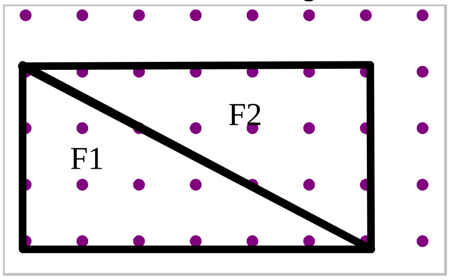
$$\begin{aligned}\frac{b}{2}+i-1 &= \frac{2(l+h)}{2}+(l-1)(h-1)-1\\ &= l+h+(l-1)(h-1)-1\\ &= l+h+lh-h-l+1-1\\ &= l+h+lh-h-l\\ &= lh\end{aligned}$$

On en déduit que cette formule $Aire=\frac{b}{2}+i-1$ fonctionne pour tous les rectangles ainsi formés.

## 2/ Démonstration pour un triangle rectangle « bien placé »

Dans ce paragraphe, on appellera triangle rectangle « bien placé » tout triangle rectangle formé par un rectangle « bien placé » partagé en deux par une de ses diagonales.

Pour démontrer la formule sur les triangles rectangles(4), on a séparé un rectangle par une de ses diagonales. Cela forme donc 3 figures : Les deux triangles rectangles F1 et F2 et le rectangle.




Dans le cas particulier ci-contre,
$b_1 = 8 = b_2$
$i_1 = 4 = i_2$
$c = 4$

On peut donc classer les clous comme suit :
-Ceux aux bords de F1 qui n'appartiennent pas à F2. Leur nombre est $b_1$
-Ceux aux bords de F2 qui n'appartiennent pas à F1. Leur nombre est $b_2$
-Ceux à l'intérieur de F1. Leur nombre est $i_1$.
-Ceux à l'intérieur de F2. Leur nombre est $i_2$.
-Ceux communs à F1 et F2 donc la diagonale. Leur nombre est $c$.
On a cherché à exprimer les nombres de points aux bords $B$ et à l'intérieur $I$ du rectangle en fonction de ces nombres.
$B = b_1 + b_2 + 2$
$I = i_1 + i_2 + c - 2$
Ensuite, dans la formule démontrée sur les rectangles, on a remplacé $B$ et $I$ par ces valeurs.

$$\begin{aligned} B/2 + I - 1 &= \frac{b_1+b_2+2}{2}+i_1+i_2+c-2-1 \\ &= \frac{b_1+b_2}{2}+1+i_1+i_2+c-3 \\ &= \frac{b_1+b_2}{2}+i_1+i_2+c-2 \end{aligned}$$

Puis on a espéré trouver la même chose en appliquant la formule à chaque triangle rectangle puis en les additionnant donc on a essayé :

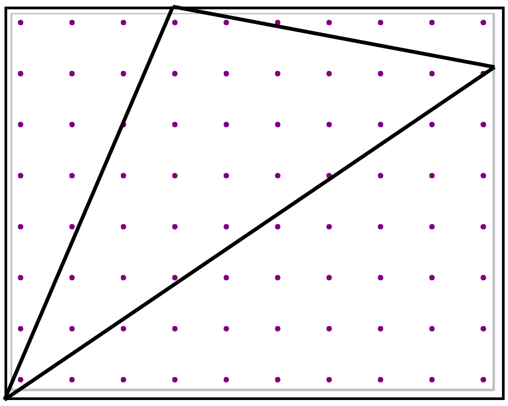
Nombre de points au bord du triangle rectangle F1 :$b_1 + c$
Nombre de points au bord du triangle rectangle F2 :$b_2 + c$

$$\begin{aligned} \frac{b_1+c}{2}+i_1-1+\frac{b_2+c}{2}+i_2-1 &= \frac{b_1+c}{2}+\frac{b_2+c}{2}+i_1+i_2-1-1 \\ &= \frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}+i_1+i_2-2 \\ &= \frac{b_1+b_2}{2}+c+i_1+i_2-2 \\ &= \frac{b_1+b_2}{2}+i_1+i_2+c-2 \end{aligned}$$

On remarque que l'aire du rectangle est identique à la somme des aires des triangles.
Puisque les deux triangles rectangles sont identiques, notre formule est vraie pour les triangles rectangles.
Naturellement, on pourrait avoir fait une erreur sur F1 qui se compenserait avec une erreur sur F2. En effet, en additionnant deux formules fausses, on obtient parfois une formule juste. Par exemple si on affirme 1 = 0 et 2 = 3, en additionnant terme à terme, on obtient 1 + 2 = 0 + 3 ce qui est une égalité vraie.
Mais ici, F1 et F2 sont en fait les mêmes figures (on a partagé le rectangle sur une diagonale. Ce sont deux triangles rectangles de même taille).
En additionnant l'aire obtenue pour F1 avec la formule avec celle pour F2, s'il y avait une erreur sur celle de F1, celle-ci serait doublée (ce serait nécessairement la même erreur sur F1 et sur F2 puisque F1 = F2). Or la formule obtenue est correcte. Donc le double de l'erreur supposée est égale à zéro, ce qui signifie que l'erreur elle même est nulle.

## 3/ Démonstration pour un triangle quelconque

(5)



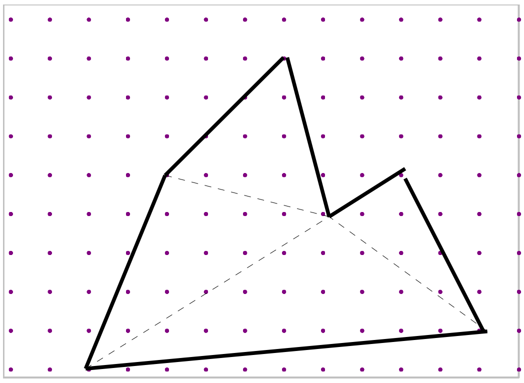
Tout triangle formé sur la grille de points peut être « enfermé » dans un rectangle tel qu'un des sommets du triangle soit un sommet du rectangle et tel que les deux autres sommets du triangle soient sur des côtés du rectangle.

La formule Aire = $b/2 + i - 1$ étant vraie pour les rectangles et pour les triangles rectangles, elle est vraie aussi pour le triangle quelconque inséré dans le rectangle.

Lors de l'exposé oral, à Nantes, on nous a fait remarquer qu'il y a ici une inexactitude dans notre raisonnement ; nous devrions démontrer ce résultat en nous y prenant de la même manière que pour la démonstration pour un triangle rectangle c'est-à-dire en considérant les points appartenant à l'une des sous figure mais pas à une autre et ainsi de suite. Nous n'avons pas eu le temps de reprendre cette démonstration.

## 4/ Démonstration pour un polygone quelconque

On sait que tout polygone peut être partagé en un certain nombre de triangles quelconques donc si la formule est vraie pour les triangles quelconques alors elle est vraie pour l'ensemble du polygone.(6)

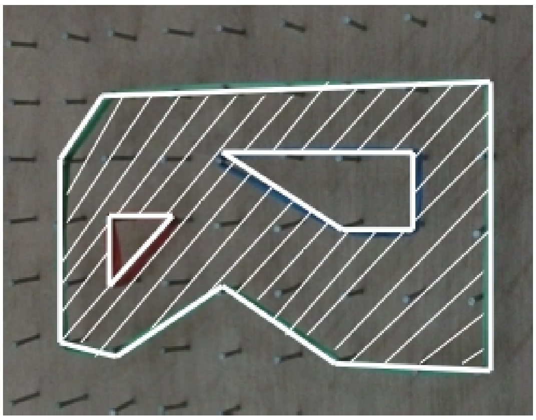


Ainsi, nous avons démontré qu'on peut calculer l'aire de tout polygone placé sur une grille de clous avec la formule $Aire = \frac{b}{2} + i - 1$

C'est seulement une fois la formule démontrée qu'on a su qu'elle avait déjà été trouvée et démontrée en 1899 par Georg Alexander Pick (1859-1942) puis publiée en 1969 par Hugo Steinhaus,17 ans après la mort de Pick en camp de concentration.

**<u>III/ Conjecture et démonstration pour un polygone « troué »</u>**

On rappelle qu'un polygone troué est un polygone à l'intérieur duquel un ou plusieurs trous sont formés par d'autres polygones.



Par rapport au polygone non-troué, le polygone troué a moins de points à l'intérieur et plus de points aux bords. En effet, les points à l'intérieur des trous sont à l'extérieur du polygone troué et les points aux bords des trous sont aux bords du polygone troué.

Voici un exemple d'un polygone à deux trous :
Nous avons conjecturé qu'il est possible de calculer l'aire de tout polygone troué avec la formule

$$Aire = \frac{b}{2} + i - 1 + t$$

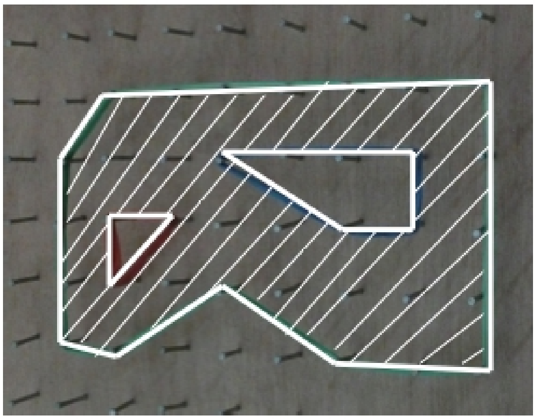
.

Nous avons démontré cette formule pour un polygone avec deux trous.
Pour cela, nous avons exprimé l'aire du polygone non troué, et de chacun des polygones formant les trous à l'aide de la formule de Pick démontrée dans le paragraphe II.

Nous avons soustrait l'aire de chacun des trous à l'aire du polygone non troué pour trouver l'aire du polygone troué.

Nous avons utilisé la formule de Pick précédemment démontrée, pour calculer les aires des trous et du polygone non-troué.

On appelle *B*, *I*, *t* les nombres de points au bord, à l'intérieur et le nombre de trous d'un polygone troué.
On appelle *b* et *i* le nombre de points au bord et à l'intérieur du polygone non troué.
Son aire sera $\frac{b}{2}+i-1$ .
On appelle $b_1$ et $i_1$ le nombre de points au bord et à l'intérieur du premier trou.
Son aire sera $\frac{b_1}{2}+i_1-1$ .
On appelle $b_2$ et $i_2$ le nombre de points au bord et à l'intérieur du deuxième trou.
Son aire sera $\frac{b_2}{2}+i_2-1$ .



$$Aire=\frac{b}{2}+i-1-(\frac{b_1}{2}+i_1-1)-(\frac{b_2}{2}+i_2-1)$$
$$Aire=\frac{b}{2}+i-1-\frac{b_1}{2}-i_1+1-\frac{b_2}{2}-i_2+1$$
$$Aire=\frac{b}{2}-\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}+i-i_1-i_2-1+1+1$$

On voudrait repérer dans cette formule $I=i-i_1-i_2-b_1-b_2$
Pour cela on ajoute $b_1+b_2-b_1-b_2$ (donc on ajoute zéro ce qui ne change rien).

$$Aire=\frac{b}{2}-\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}+b_1+b_2+i-i_1-i_2-b_1-b_2-1+1+1$$

$$Aire=\frac{b}{2}-\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}+\frac{2b_1}{2}+\frac{2b_2}{2}+i-i_1-i_2-b_1-b_2-1+1+1$$

$$Aire=\frac{b}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}+i-i_1-i_2-b_1-b_2-1+1+1$$

$$Aire = \underbrace{\frac{b}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}} + \underbrace{i - i_1 - i_2 - b_1 - b_2} - 1 + \underbrace{1 + 1}$$

$$Aire = \frac{B}{2} + I - 1 + t$$

Nous avons ainsi démontré que l'aire de tout polygone troué est $Aire = \frac{b}{2} + i - 1 + t$ , avec *b*, le nombre de points au bord du polygone, *i*, le nombre de points à l'intérieur et *t*, le nombre de trous.(7)

## IV/ Conclusion

Nous avons redécouvert la formule de Pick et nous l'avons démontrée.
Nous avons découvert et démontré la formule dans le cas peu connu des polygones troués.
Désormais, lorsqu'un polygone est dessiné sur un réseau de points, nous sommes capables de calculer son aire sans avoir besoin d'utiliser les formules apprises en cours de mathématiques.

**Notes d'éditions**
(1) On pourrait plutôt appeler cela « un rectangle bien aligné avec la grille »
(2) Dans ce cas-là, il faut supposer que la maille de la grille mesure 1 centimètre.
(3) On aurait bien aimé une explication plus précise. En effet tout est une histoire de conditions de bords.
(4) Triangles rectangles « bien placés ».
(5) Non ! On peut trouver des triangles (tout aplatis ou diagonaux) qui n'ont pas cette propriété.
(6) Comme au paragraphe précédent, il manque un raisonnement pour combiner les triangles.
(7) Bien sûr, cette démonstration ne vaut que pour 2 trous.