Lycée Paul Langevin --- 92150 Suresnes

ATELIER « MATH en JEANS »
2008-2009

Le Jeu de Ping

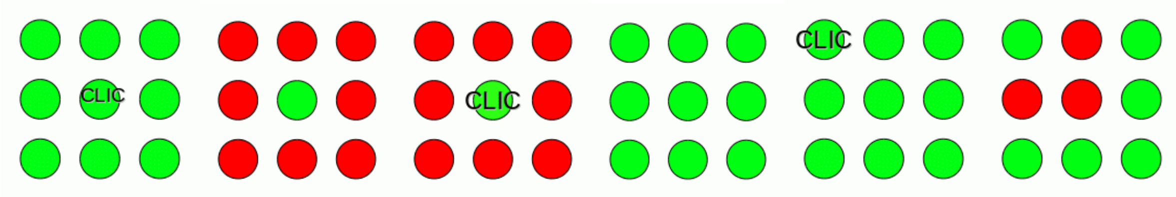
Élèves : Léa ANSEL, Pauline BOCOGNANO, Pierre DELVOYE, Julien FONTANA, Mortimer HOTTON, Robin LEGRAS
Enseignants : Suzanne GALLAND, Aude DELFOSSE, Philippe CAMUS
Chercheur : Loïc ALLYS

Table des matières

I. INTRODUCTION

1) Description du jeu de Ping

Le jeu de Ping est une sorte de damier, rectangulaire ou carré, de taille variable, où dans chaque case se trouve un pion bicolore (une face verte, l'autre rouge). Avec notre logiciel, le damier était limité en taille à 16 colonnes et 32 lignes, mais dans la réalité on peut imaginer des damiers plus grandes ou infinies. *Le damier de taille minimale est le 1*1* .
Au départ du jeu, tous les pions montrent leur face verte.
Le but du jeu est de réussir à retourner tous les pions sur leur face rouge, mais avec une sorte de handicap. Quand on clique sur un des pions du damier, il n'est pas retourné. Seuls ses huit voisins le sont, les directs et ceux en diagonale. On ne peut donc résoudre un damier en faisant n'importe quoi, il faut agir avec méthode.



2) Objectifs

Nos objectifs étaient de réussir un tableau où étaient répertoriés tous les damiers qu'il était possible de dessiner sur l'ordinateur et, pour chacun d'eux, de déterminer si l'on pouvait ou non retourner tous les pions (on dira que le damier est « possible » ou « impossible »). Nous n'avons pas cherché à trouver plusieurs solutions par damier, ni cherché la solution la plus « économe » (le moins de coups possibles). Cela aurait représenté beaucoup de travail et nous n'avions pas le temps. Nous avons donc consacré notre attention sur la recherche des damiers possibles.

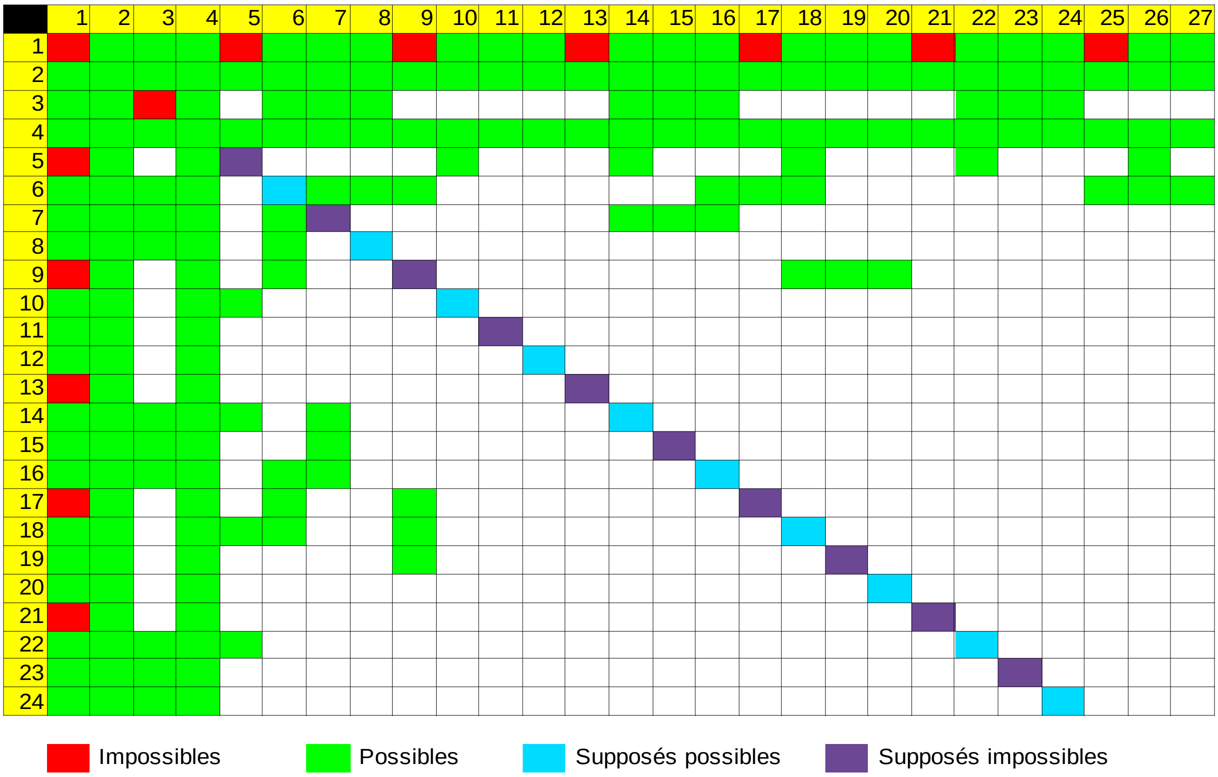
II. RESULTATS

1) Méthode de travail

Au début nous ne savions pas vraiment comment chercher, nous tâtonnions en essayant de résoudre les damiers. Essayant un peu au hasard nous avons trouvé des phénomènes répétitifs que nous avons appelés motifs. Nous nous en sommes donc servi pour résoudre la plupart de nos damiers en les répétant, ou en trouvant de nouvelles formes de motifs. Nous avions aussi un damier de résultats où nous marquions les damiers « possibles » (en vert) et ceux « impossibles » (en rouge). Grâce à ce damier nous avons décelé des régularités apparentes dans la taille des damiers possibles ou des damiers impossibles, et nous avons alors cherché à démontrer ces régularités.

2) Grille de résultats

Cette grille montre nos résultats. Au début, la répétition régulière de « trous » dans la ligne et la colonne des 1 nous a donné l'idée de la démonstration pour les damiers impossibles 1x(4n+1).



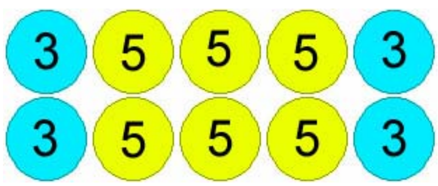
3) Répétition et motifs

En tâtonnant pour trouver une solution à certains damiers du jeu de Ping, nous avons remarqué que les cases sur lesquelles nous cliquions formaient des motifs. Nous les avons séparés en trois catégories tout en sachant qu'il existe un cas particulier.

(a) Le cas particulier

Il s'agit des damiers de taille 2xn. En effet, ceux-ci sont tous résolubles sans exception en cliquant un nombre impair de fois sur chacune des cases du damier.

Si on clique une fois sur chaque case, les cases des extrémités (en bleu) sont retournées 3 fois et les cases centrales (en jaune) sont retournées 5 fois : toutes les cases sont retournées un nombre impair de fois, donc le damier est « possible ».



Lorsqu’un damier est « possible », on s’aperçoit qu’il suffit, pour le résoudre, de cliquer sur un sous ensemble de ses cases. Dans la suite, on appellera « motif » ce sous–ensemble de cases.

(b) Première catégorie de damier à motif

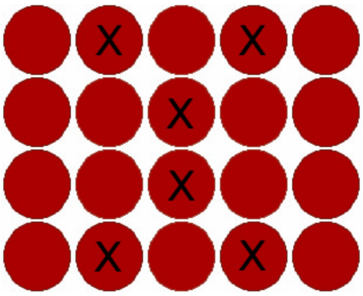
Cette catégorie comprend les damiers dont la solution n’est pas réutilisable pour résoudre d’autres damiers.

Ex : damier de 5x3 **(1)**

(c) Deuxième catégorie de damier à motif

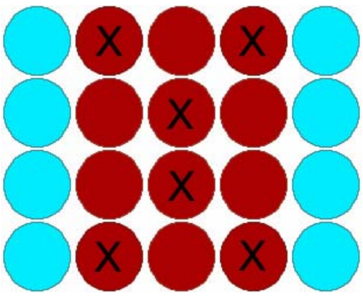
Cette catégorie regroupe les damiers dont le motif servant à les résoudre est reproductible et peut donc servir à la résolution d’autres damiers.

Exemple : Les damiers de 4x(5n), 4x(5n-1) et 4x(5n-2) sont tous résolubles par cette méthode.

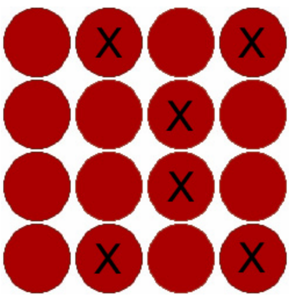


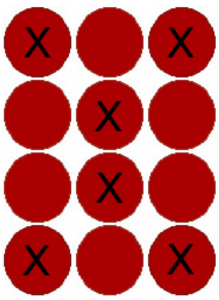
Le damier de 4nx5 est résoluble **en appliquant le motif formé** par les croix noires à la résolution du damier

(2)

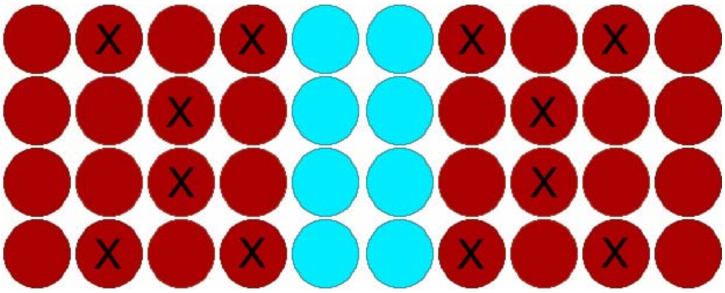


Les colonnes de droite et de gauche ne sont pas utilisées pour résoudre le damier : il n’y a aucune croix noire dans ces deux colonnes. On peut donc les retirer sans que cela ne gène la résolution du damier : on sait donc résoudre les damiers de 4x4 (ou 4x (5-1)) et de 4x3 (ou 4x (5-2)).

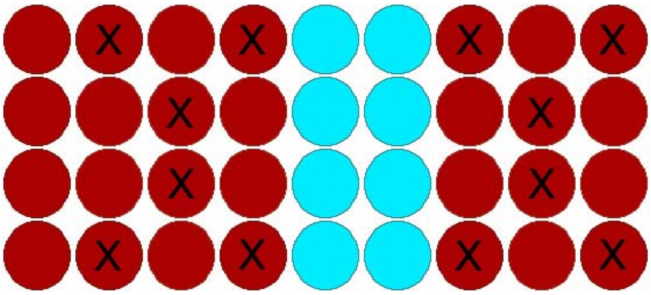


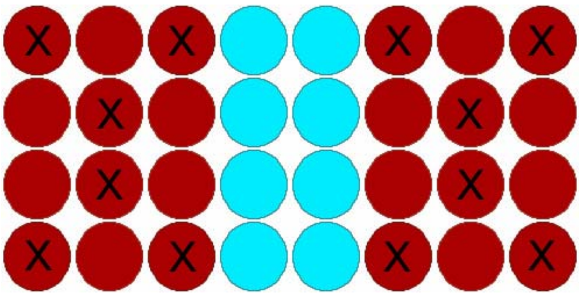


Le motif peut rester à un bord (droit ou gauche) mais si on veut résoudre des damiers 4xn grâce à ce motif, il faut séparer chaque reproduction du motif de la suivante par 2 colonnes qui ne seront pas « cliquées ». Les damiers ainsi accolés n'interfèrent pas entre eux.
On est donc en mesure de résoudre des damiers de 4x (5n) car on peut enchaîner les damiers de 4x5 à l'infini suivant ce principe.



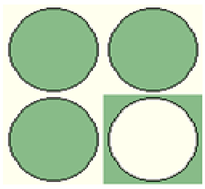
En supprimant une ou deux colonnes vides aux extrémités du motif, on peut résoudre les damiers de 4x(5n-1) et 4x(5n-2). Seulement il faut faire attention à ne pas supprimer une des colonnes vides entre les différents motifs du damier. On peut également répéter ce schéma à l'infini.

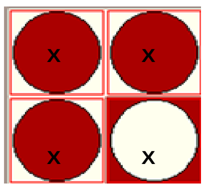




4) Carrés

(a) Le carré 2x2 :

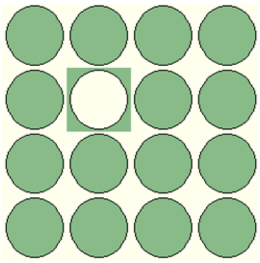
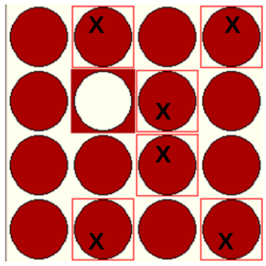


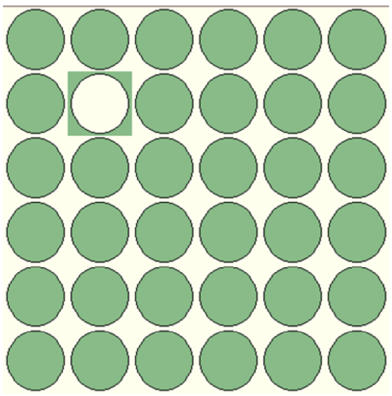
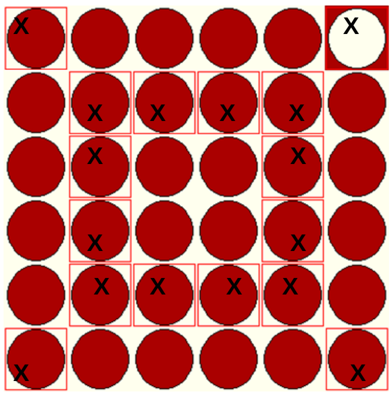


(b) Autres carrés pairs

Notre équipe conjecture qu'ils sont tous possibles.
Voici quelques exemples :

2x2, si dessus, 4x4, 6x6…

Pour les carrés 2x2 et 6x6, le motif possède quatre axes de symétrie, tandis que le motif pour le carré 4x4 n'en a qu'un.
Les cases blanchies sont celles sur lesquelles on peut cliquer

(c) Les carrés impairs

Ces carrés impairs on été la source de bien des ennuis. Notre équipe n'a pas pu prouver mathématiquement qu'ils étaient impossibles, même si nous le conjecturons.

Avec la manière forte (c'est à dire en essayant les 2^9=512 possibilités), nous avons observé que le carré 3x3 restait irréalisable… mais cette méthode s'arrête là, impossible d'utiliser une symétrie, ou une règle précise, pour l'infinité de carrés impairs…

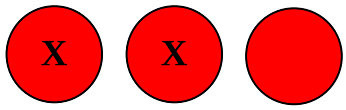
5) Damiers de 1xn

(a) Cas possibles :

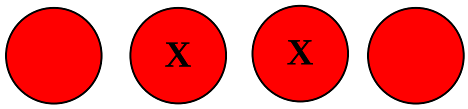
Toutes les damiers de type 1xn sont possibles à une exception près : les damiers de taille 1x(4n+1) (voir plus loin)

Exemples :

1x3 :



1x

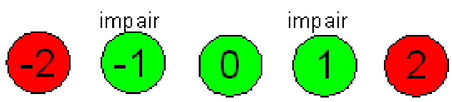


On ne s'est pas intéressé à l'ordre des cliquages .

(b) Cas impossibles : 1x(4n+1)

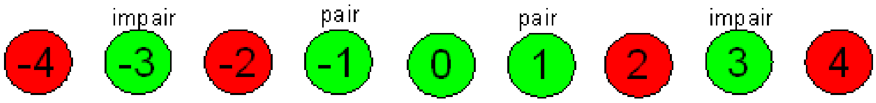
Nous avons démontré que les damiers de 1x(4n+1) étaient impossibles :
<u>Principe :</u> Dans les damiers 1x(4n+1), on peut repérer les jetons en prenant comme origine celui du milieu. Les extrémités ont donc comme abscisses -2n et 2n, qui sont pairs. On les retourne en cliquant sur les jetons impairs d'abscisses -2n+1 et 2n-1, ce qui retourne aussi les jetons (pairs) -2n et 2n. On recommence avec les jetons pairs suivants, et ainsi de suite : on fait la même chose de chaque côté du jeton central, en cliquant sur des jetons impairs pour retourner les pairs. Finalement, les jetons -1 et 1 seront cliqués avec la même parité, donc le jeton central sera retourné un nombre pair de fois.

Illustration avec le damier 1x5 :
Dans ce damier, pour retourner les cases situées aux extrémités (-2 et 2)   il faut forcément cliquer sur les cases -1 et 1 un nombre impair de fois. Les cases des extrémités sont ainsi

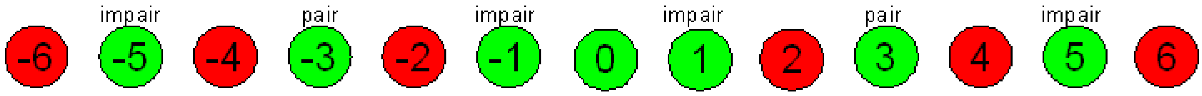


retournées un nombre impair de fois :

Cependant la case située au centre est retournée un nombre pair de fois (impair plus impair), donc n'est pas retournée.
Pour donner un autre exemple voici les damiers de 1x9 et 1x13 (on a indiqué la parité du nombre de clics) :



Grille de 1x9



Grille de 1x13

Notes de l'édition

(1) On peut se demander pourquoi cette solution n'est pas réutilisable.

(2) Comment applique –t-on ce motif à la résolution du damier ?