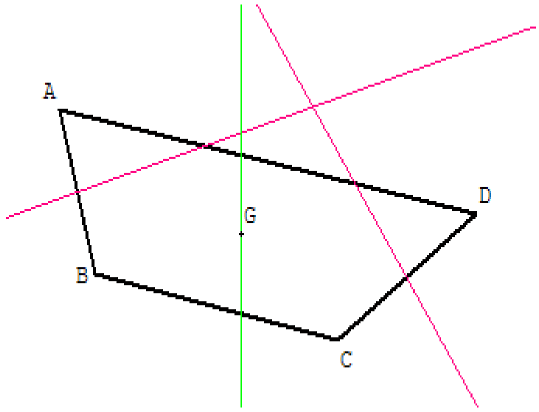
Les voûtes
Atelier Math en jean's 2003/2004
Lycée d'Altitude de Briançon
Par Blanc Frédéric & Amoros Benoît.

Une voûte est une succession de pierres associées pour former une arche.
Comment ces pierres tiennent-elles ?

Pour ne pas tomber, il faut que les médiatrices des côtés [AB] et [CD] de la pierre et la verticale passant par le centre de gravité soient concourantes.



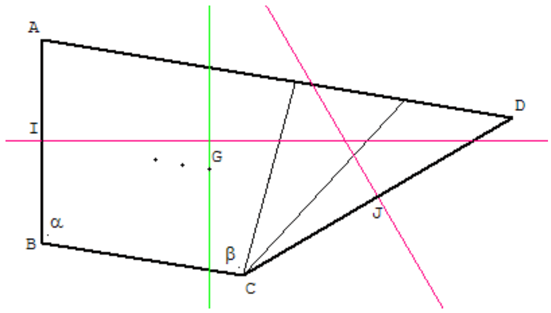
Nous nous imposons quelques mesures:
Il n'y a pas de clé de voûte.
Le côté [AB] de la pierre est vertical et mesure une unité
On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC]
Le côté [BC] mesure aussi une unité.
L'angle ABC est noté α, et l'angle BCD β.
Les côtés [AD] et [BC] sont parallèles.

Notre problème est alors pour A, B et C fixés (autrement dit α fixé) trouver la position de D pour que les trois droites soient concourantes (trouver β)

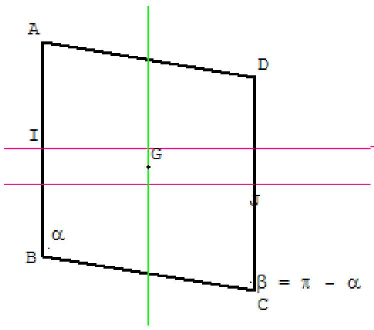
<u>Premier problème:</u> ***Où se situe le centre de gravité ?***

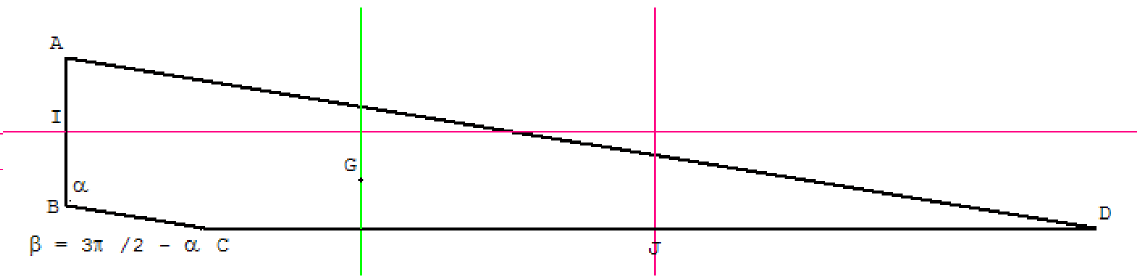
Le centre de gravité se trouve au milieu de [IJ]. Or le point I est fixe et le point J décrit (quand D varie) une droite parallèle à (BC) passant par I (d'après la propriété de la droite des milieux)

Le centre de gravité se trouve sur la droite parallèle à (BC) passant par I.

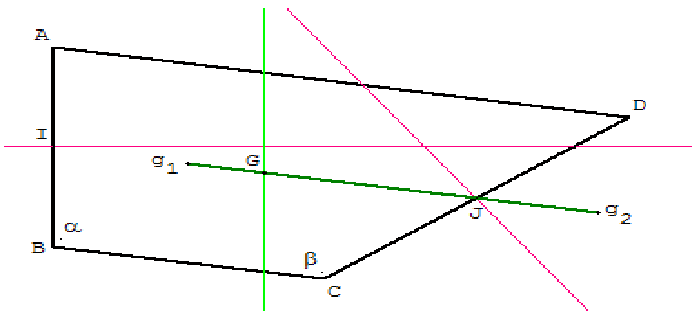


On peut être plus précis. L'angle β va varier de $\pi-\alpha$ (les côtés [AB] et [CD] sont parallèles) à $\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$ (le côté [DC] est horizontal)





Le centre de gravité décrit un segment [g1g2] (qui correspond à ces deux cas extrêmes).



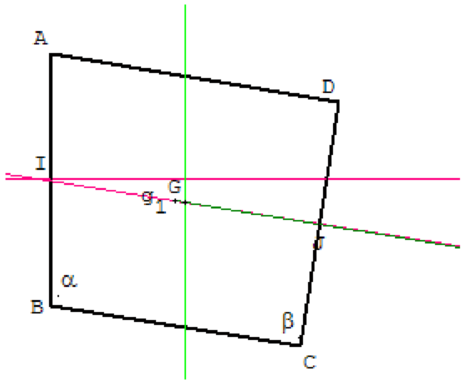
Deuxième problème: ***Comment trouver le point d'intersection des trois droites ?***

Nous avons cherché comment trouver le point de concours des trois droites (quand il existe).

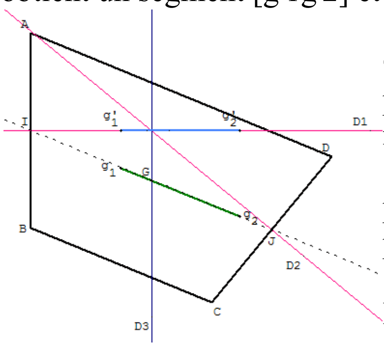
De retour du congrès, nous avons perfectionné notre méthode des « cas extrêmes » et nous avons trouvé un algorithme qui semble converger vers la solution.

On peut réduire l'intervalle [g1g2] de cette manière:
Les deux médiatrices se coupent soit en I soit quand (CD) est horizontale.
Ce qui réduit un peu l'intervalle de G.

Mais cette méthode, que nous avions exposée lors du congrès, ne permet pas d'aller plus loin et la réduction de l'intervalle est minime.

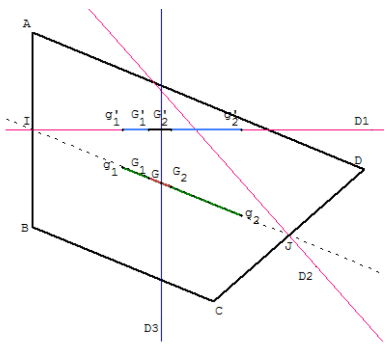


Par contre la méthode suivante semble plus performante et permet d'assurer l'existence du point de concours des droites dans tous les cas et l'algorithme à suivre pour obtenir ce point. Faute de temps nous n'avons pas démontré la convergence de l'algorithme, mais nous sommes quasiment sûrs de nos résultats.
On part de l'intervalle [g1g2] obtenu précédemment en regardant les cas extrêmes de la pierre. Le point de concours des trois droites doit être sur la médiatrice de [AB] (que l'on notera D1) et sur la verticale que passe par G (que l'on notera D3). Nous avons projeté le segment [g1g2] sur D1. On obtient un segment [g'1g'2] et le point de concours ne peut qu'être sur ce segment.



On fait passer la médiatrice de [CD] (que l'on notera D2) par g'1 (puis par g'2) - les deux nouveaux cas extrêmes – et on obtient deux nouveaux centres de gravité, autrement dit un nouveau intervalle [G1G2]. On répète l'opération: projection de [G1G2], faire passer D2 par G'1 et G'2, nouveau intervalle.

De proche en proche, cette algorithme semble converger vers la solution.



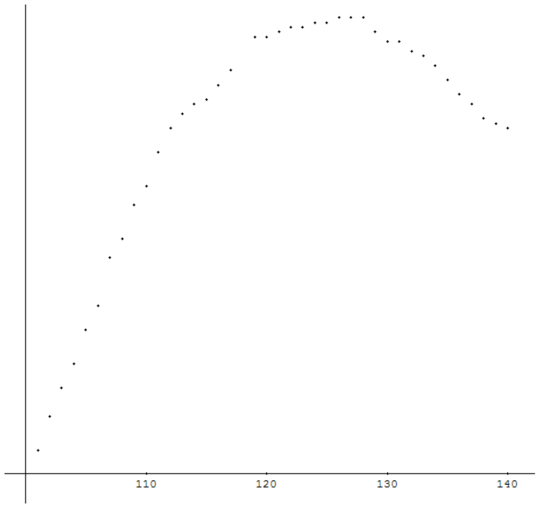
Cette méthode ne nous permet pas de trouver exactement l'emplacement du point de concours (et donc la forme de la pierre), mais elle nous permet de nous assurer de l'existence et nous fournit un algorithme. C'est surtout la seule méthode que nous avons trouvée.

Formule empirique:

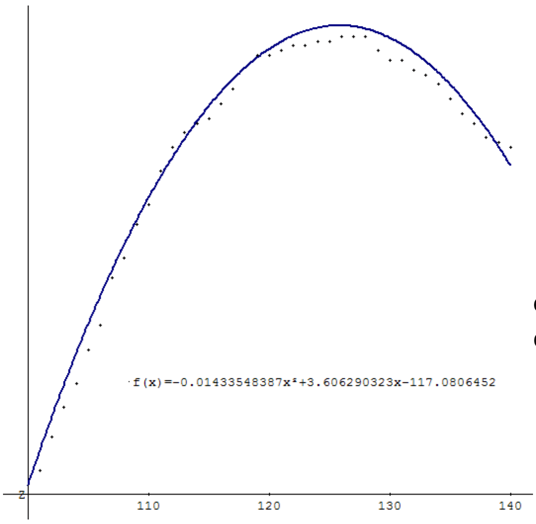
Avant notre découverte, avec le logiciel *géoplan,* nous avions remarqué que pour chaque valeur de α, une seule valeur de β était possible et nous avions alors réalisé des mesures:

α	β	α	β	α	β	α	β
100	100	110	106	120	109,1	130	109
101	100,5	111	106,7	121	109,2	131	109
102	101,2	112	107,2	122	109,3	132	108,8
103	101,8	113	107,5	123	109,3	133	108,7
104	102,3	114	107,7	124	109,4	134	108,5
105	103	115	107,8	125	109,4	135	108,2
106	103,5	116	108,1	126	109,5	136	107,9
107	104,5	117	108,4	127	109,5	137	107,7
108	104,9	118	108,8	128	109,5	138	107,4
109	105,6	119	109,1	129	109,2	139	107,3
						140	107,2

A partir de ces mesures, on a établi un graphique:



Nous nous apercevons que nos mesures semblent former une parabole renversée d'équation:
$f(x)=-0,01433548387x^2+3,606290323x-117,0806452$



que l'on a obtenue en résolvant un système de trois équations à trois inconnues.

Conclusion:

Nous avons obtenu une formule empirique de l'angle β en fonction de l'angle α dans le cas où [AB] est vertical.
Ceci est la première pierre de voûte, si [AB] n'est pas vertical, il faut tout refaire.

A vous de faire la suite.
Vous pouvez aussi construire une voûte (avec notre algorithme)
et étudier la forme de l'édifice.