Le choix optimal des pièces de monnaie

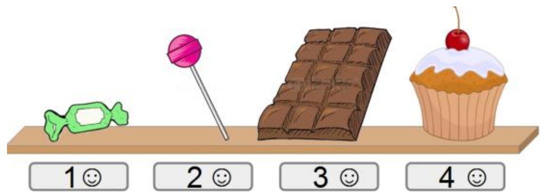
Année 2015-2016

Élèves : Edyta Krakowiak, Monika Majkowska, Monika Plutecka, Julia Pszczołowska en classe de 1ère
Établissement : Lycée bilingue Żmichowska, Varsovie, Pologne
Enseignante : Mme Jolanta Otrębska
Chercheur : M. Marcin Moszyński, Université de Varsovie

Imaginons une planète. Sur cette planète l'unité monétaire c'est le sourire et les pièces de monnaie ont les valeurs de 1 sourire, 2 sourires, 3 sourires… 23 sourires... 38 sourires… (donc tous les nombres naturels). On a un magasin où les prix sont aussi des nombres naturels. Mais ce magasin est un peu bizarre, parce qu'il ne rend pas la monnaie. À côté du magasin vivent le petit Jean et sa mère.

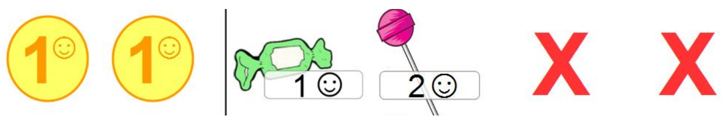
La mère, parfois, donne au petit Jean quelques pièces pour qu'il puisse acheter des sucreries dans ce magasin. Imaginons qu'elle lui donne un porte-monnaie avec deux pièces. Le petit Jean a des problèmes de mémoire, alors sa mère lui dit: «Jean, tu peux acheter n'importe quoi qui ne coûte pas plus que... » Dans cette situation il ne doit se souvenir que d'un seul nombre et il est donc plus facile pour le petit Jean de se souvenir.

Alors le petit Jean va au magasin, où il voit un certain nombre de produits sur l'étagère. Voici un example d'étagère :



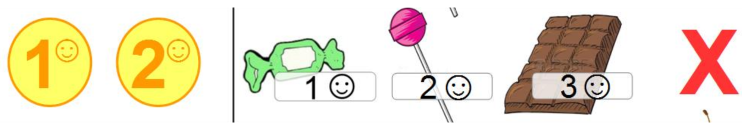
Maintenant nous considérons ce que petit Jean peut acheter avec les pièces, que lui a données sa maman.

Si le petit Jean a les pièces 1 et 1, il peut acheter des confiseries qui coûtent 1 ou 2 (1+1)



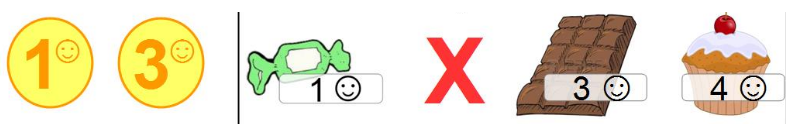
Donc sa mère peut lui dire : "Jean, tu peux acheter n'importe quoi qui ne coûte pas plus que 2"

Si le petit Jean a les pièces 1 et 2, il peut acheter des confiseries qui coûtent 1, 2 ou 3 (1+2)



Donc sa mère peut lui dire : "Jean, tu peux acheter n'importe quoi qui ne coûte pas plus que 3"

Si le petit Jean a les pièces 1 et 3, il peut acheter des confiseries qui coûtent 1, 3 ou 4 (1+3)



Donc sa mère peut lui dire : "Jean, tu peux acheter n'importe quoi qui ne coûte pas plus que 1"

Selon sa mère, la deuxième solution est la meilleure, car le petit Jean a plus de choix. (1)

Alors notre problème c'est « comment choisir, pour chaque nombre de pièces, le meilleur ensemble des pièces » l'ensemble de pièces qui lui offre le plus de choix.

Problème de recherche

Pour aller plus loin, on doit parler « mathématique » et on a besoin de quelques notations.

- « k » est le nombre de pièces dans notre porte-monnaie
- les sommes qu'on peut payer avec les pièces, peuvent être écrites 1, 2, 3, 4, 5, … jusqu'à **S**, sachant que S est la plus grande somme que Jean peut payer (à condition qu'il puisse payer aussi chaque somme inférieure à S) . Dans ce cas on voit qu'il est indispensable d'avoir dans chaque ensemble une pièce 1, pour que S soit supérieur à 0

D'après l'histoire, notre petit garçon a des problèmes de mémoire, donc il peut seulement retenir le prix jusqu'auquel il peut payer ses achats.

But

Notre but est de créer, pour chaque k donné, un ensemble où S sera le plus grand possible.
On appellera cet ensemble « l'ensemble optimal ». Notre S d'ensemble optimal sera écrit $S_{OPT(k)}$. Nous devons aussi vérifier :

- si un tel ensemble existe
- (et, si oui) s'il est unique (pour k donné)

Ici on voit quelques exemples d'ensembles de 3 pièces :

Nombre de pièces « k »	Ensemble de pièces	Sommes possibles	S	Pourquoi?
3	1, 3, 4	1, , 3, 4, 5, , 7, 8	1	Jean peut payer chaque somme jusqu'à 1
3	1, 2, 5	1, 2, 3, , 5, 6, 7, 8	3	Jean peut payer chaque somme jusqu'à 3
3	1, 1, 2	1, 2, 3, 4	4	Jean peut payer chaque somme jusqu'à 4
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7	Jean peut payer chaque somme jusqu'à 7

On voit que, si on a un ensemble de pièces 1, 3 et 4, on peut payer le prix 1 – parce qu'on a la pièce « 1 ». On ne peut pas payer le prix 2, parce que on n'a pas les pièces appropriées – un trou se forme en 2.
Donc on voit que le premier cas n'est pas le meilleur : on a 3 pièces et on ne peut acheter que des choses qui ne coûtent pas plus que 1 – on n'a pas beaucoup de choix.

Il faut donc essayer de créer un autre ensemble : la deuxième situation est meilleure, parce que le trou se forme en 4.

Le cas avec les pièces 1, 1, 2 est encore meilleur, mais <u>c'est le quatrième cas qui semble être le meilleur.</u>

<u>**Alors, attention ! Notre question est : « Est-ce que l'ensemble de pièces 1, 2, 4 est l'ensemble optimal pour k=3 ? » ?**</u>

Pour résoudre ce problème on a utilisé la méthode essai-erreur. Voici quelques exemples d'ensembles pour k = 1, 2, 3. Bien sûr, ce ne sont pas tous les ensembles possibles.
Les ensembles considérés comme optimaux sont marqués en gris :

k	Ensemble de pièces	Sommes possibles	S
1	1	1	1
2	1, 1,	1, 2,	2
	1, 2,	1, 2, 3	3
	1, 3,	1, , 3, 4	1
3	1, 2, 3	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
	1, 2, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7
	1, 2, 5	1, 2, 3, , 5, 6, 7, 8	3

Hypothèse

Comment peut-on créer ces ensembles ? Notre première idée était de créer l'ensemble optimal suivant à la base de l'ensemble précédent.

Soit un ensemble optimal pour k=3
Il faut créer l'ensemble pour k=4.

k	Ensemble de pièces	Sommes possibles	S
1	1	1	1
2	1, 2,	1, 2, 3	3
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7
4			

Premièrement on réécrit les valeurs et sommes de l'ensemble de 3 pièces.
On voit que la somme la plus grande qu'on puisse obtenir, c'est le 7. On ajoute la quatrième pièce avec une valeur nominale, qui est la première valeur qui ne peut pas être composée avec les pièces précédentes. Ici, c'est le 8. Voici notre ensemble :

k	Ensemble de pièces	Sommes possibles	S
1	1	1	1
2	1, 2,	1, 2, 3	3
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7
4	1, 2, 4, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	15

On obtient les nouvelles sommes et notre S augmente de 7 à 15.

Nous avons remarqué que :

- la dernière valeur dans l 'ensemble optimal est toujours égale à : (S de l'ensemble précédent) + 1
- les valeurs nominales sont égales aux puissances consécutives de 2
- la dernière valeur, c'est $2^{(k-1)}$
- S de l'ensemble composé de k pièces est égal à $2^k - 1$

Donc, à la base de nos résultats, on a posé l'hypothèse que pour obtenir l'ensemble optimal (pour chaque valeur k), les valeurs nominales doivent être les puissances consécutives de 2.

Théorèmes

La première étape de notre recherche était de prouver quelques théorèmes.

1er théoreme : **pour l'ensemble $2^0, 2^1, \dots, 2^n$, le prix le plus grand qu'on peut payer (la somme des nominaux) est égal à $2^{(n+1)} - 1$.**

Démonstration :
Soit x la somme de toutes nos pièces.

$x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{(n-1)} + 2^n$
Donc $2x = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{(n-1)} + 2^n + 2^{(n+1)}$

On effectue la soustraction :

$$\begin{array}{rl} 2x = & 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{(n-1)} + 2^n + 2^{(n+1)} \\ - \quad x = & 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{(n-1)} + 2^n \\ \hline x = & -2^0 + 2^{(n+1)} \end{array}$$

On obtient x égal $2^{n+1} - 1$, ce qu'il fallait démontrer.

2e théorème : **on peut payer chaque somme de 1 à $2^{n+1} - 1$ avec les pièces $2^0, 2^1, \dots, 2^n$.**

Démonstration (par récurrence) :

L'étape initiale, c'est de prouver le théorème pour n=0 :
Pour n=0, on peut payer la somme $2^{0+1} - 1 = 1$
<u>Donc le théorème est vrai au rang 0.</u>

Dans l'étape suivante on se base sur l'hypothèse que le théorème est vrai pour n et on démontre qu'il est vrai aussi pour n+1.
A l'ensemble de pièces 2^0, 2^1, … , 2^n on ajoute encore une pièce, celle de 2^{n+1}, et on se pose la question suivante : « Quels prix peut-on payer avec les pièces ? ».

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ (\ldots) \\ 2^{n+1} - 1 \end{array}\right\} \text{d'après la supposition, on peut payer ces prix avec les pièces de 1 à } 2^n$$

$$2^{n+1} \longrightarrow \text{notre pièce ajoutée}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{n+1} + 1 \\ 2^{n+1} + 2 \\ (\ldots) \\ 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{on peut payer ces prix avec les pièces précédentes} \\ \text{et avec la pièce ajoutée}\end{array}$$

On voit que le dernier prix pour n+1 est égale à $\underline{2^{n+2} - 1}$, alors on peut payer chaque prix de 1 jusqu'à $2^{n+2} - 1$.
<u>La propriété est donc vraie au rang n+1.</u>

La propriété est vraie au rang 0 et, en la supposant vraie au rang n, elle est encore vraie au rang suivant.
Par conséquent, **le théorème est vrai pour tout n∈N.**

3^e théorème : **l'ensemble $2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}$ est l' ensemble optimal pour k pièces de monnaies. Il est unique.**

Démonstration:
Soit un ensemble composé de k pièces de monnaie. On range les pièces dans l'ordre croissant. Voici notre ensemble:

$$\mathbf{2^0, 2^1, \dots, 2^n, x, \dots\dots\dots}$$

D'abord, nos pièces sont des puissances de 2 (on est sûr qu'il y en a au moins une, parce que $1=2^0$). Puis, on a le x qui n'est pas la puissance suivante de 2, alors il n'est pas égal à 2^{n+1}.
Il faut remarquer que x ne doit pas être la pièce dont la valeur est la plus grande – x peut être suivi de pièces qui sont soit des puissances de 2 supérieures à x soit d'autres nombres.

Alors on a deux cas :

- x supérieur à 2^{n+1}
- x inférieur à 2^{n+1}

1^{er} cas : x supérieur à 2^{n+1}
Si x est supérieur à 2^{n+1}, il n'est pas possible de payer le prix 2^{n+1} parce qu'on n'a pas de pièces convenables.
En utilisant les pièces $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ la somme la plus grande à obtenir, c'est $2^{n+1} - 1$. On ne peut évidemment pas utiliser les pièces supérieures ou égales à x.
Dans ce cas, le S de notre ensemble est égal à $2^{n+1} - 1 < 2^k - 1$. Notre S est donc égal à S de l'ensemble $2^0, 2^1, \dots, 2^n$.

Voici un exemple:

k	Ensemble de pièces	x	Sommes possibles	S
3	1, 2, x=5	x=5; x>4	1, 2, 3, , 5, 6, 7, 8	3

Soit un ensemble de 3 pièces (k=3), nos pièces sont 1, 2 et 5. Dans ce cas, notre « x », c'est 5 qui est supérieur à 4, donc notre 2^{n+1}. Regardons les prix possibles. On voit qu'on n'est pas capable de payer le prix 4 – on ne possède pas de pièces convenables. Le S de cet ensemble égale 3, il est le même que le S de l'ensemble composé seulement de pièces 1 et 2. Une telle situation n'est pas du tout profitable pour nous.

2^e cas : x inférieur à 2^{n+1}
Ce cas est un peu plus compliqué.
Remarquez que maintenant, notre x est le prix qu'on peut payer de deux manières différentes : en utilisant la seule pièce x ou bien en utilisant les pièces précédentes, comme on sait déjà que c'est possible – avec un ensemble $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ on peut payer tous les prix de 1 jusqu'à $2^{n+1} - 1$, donc notre x aussi. Suite à ce phénomène, le S de cet ensemble va diminuer.

Comment ça marche : en utilisant un ensemble composé de k pièces on peut créer $2^k - 1$ sous-ensembles non vides – alors des prix qui ne sont pas égaux à 0. Pour nous, la meilleure situation est la suivante : tous les prix sont différents. Par contre, si on pouvait payer un prix de deux manières différentes, ça veut dire que, bien sûr, on a $2^k - 1$ de prix, mais comme l'un d'eux se répète, on en obtiendra au maximum $2^k - 2$ qui sont différents.

Voici un exemple :

k	Ensemble de pièces	x	Sommes possibles	S
3	1, 2, x=3	x=3; x<4	1, 2, 3, 4, 5, 6	6

Soit un ensemble de 3 pièces (k=3) : 1, 2, 3. Dans ce cas, notre « x », c'est 3. Remarquez qu'on peut obtenir le 3 de deux manières différentes : en utilisant seulement la pièce 3 ou en composant 3 de pièces 1 et 2. Ce sont donc les deux sous-ensembles qui donnent le même prix. Regardons les prix possibles, ce sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le S de cet ensemble est égal à 6.

Voyons maintenant l'ensemble suivant :

k	Ensemble de pièces	x	Sommes possibles	S
3	1, 2, 4	x=4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7

Cet ensemble est composé seulement de pièces dont les valeurs sont des puissances de 2. Regardons les prix possibles. Remarquez qu'on peut les payer chacun d'une seule manière, par exemple pour payer 3 on utilise les pièces 1 et 2, parce qu'il n'y a pas d'autre possibilité. Comme on paie chaque prix d'une seule manière, ça veut dire qu'on en a $2^k - 1$, autant que les sous-ensembles. Les prix possibles sont: 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Le S de cet ensemble est égal à 7, il est plus grand que celui de l'ensemble précédent où S égale 6.

Le troisième ensemble est donc l'ensemble optimal pour k=3.
On a prouvé que les meilleures valeurs de pièces de monnaie sont toujours les puissances consecutives de 2.

Conclusions pour un seul porte-monnaie

Dans l'ensemble optimal :

- pour chaque k il existe un seul ensemble optimal
- les valeurs nominales de pièces sont toujours des puissances consécutives de 2
- $S_{OPT(k)}$ est égal à $2^k - 1$

Plusieurs porte-monnaies

Un seul porte-monnaie n'était pas la fin de notre travail. On a décidé de trouver les formules pour plusieurs porte-monnaies (les ensembles de pièces dans les porte-monnaies sont identiques). Maintenant k est un nombre de pièces dans un porte-monnaie. Si nous avons k=1 on peut obtenir les sommes 1 et 2. Alors si nous avons k=2 on ajoute la pièce 3, parce que c'est la première somme qu'on ne peut pas obtenir en utilisant 1 et 1.

Nombre de porte-monnaies	k	Ensemble de pièces	$S_{OPT(k)}$
1	k	$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{k-1}$	2^k-1
2	k	$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{k-1}$	3^k-1
		$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{k-1}$	

On voit que les pièces sont les puissances suivantes de 3 et les S sont définies par la formule $S_{OPT}= 3^k - 1$ (k – nombre des pièces). Nous avons trouvé aussi la formule pour les trois porte-monnaies et nous avons observé que toutes ces formules ne sont pas occasionnelles.

Nombre de porte-monnaies	k	Ensemble de pièces	$S_{OPT(k)}$
1	k	$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{k-1}$	2^k-1
2	k	$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{k-1}$	3^k-1
		$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{k-1}$	
3	k	$4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \ldots, 4^{k-1}$	4^k-1
		$4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \ldots, 4^{k-1}$	
		$4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \ldots, 4^{k-1}$	
q	k	$\left.\begin{array}{l}(q+1)^0, (q+1)^1, (q+1)^2, (q+1)^3, \ldots, (q+1)^{k-1} \\ (q+1)^0, (q+1)^1, (q+1)^2, (q+1)^3, \ldots, (q+1)^{k-1} \\ \ldots\end{array}\right\}$ fois	$(q+1)^k-1$

Conclusion pour q porte-monnaies

Si on veut trouver l'ensemble optimal pour q porte-monnaies, les pièces sont des puissances consécutives du (q+1).

Note d 'édition (1)
D'après la description ci-dessus les solutions 2 et 3 offrent le même nombre de possibilités; en vue de ce qui est indiqué plus bas il semble qu'il manque une contrainte (qui rendrait donc la solution 3 non acceptable) : le petit garçon doit être en mesure d'acheter les friandises **par ordre croissant de prix**.