Perspective

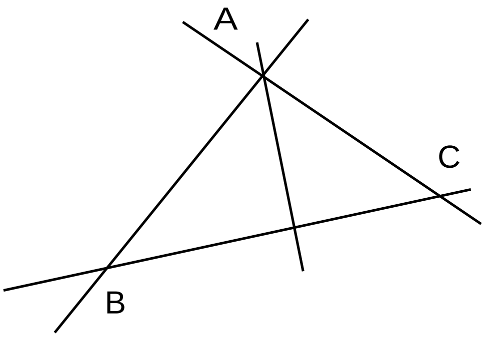
par Cédric Lagarde, Geneviève Trilling, Edouard Wales, élèves de TC1
du Lycée Emmanuel Mounier de Grenoble

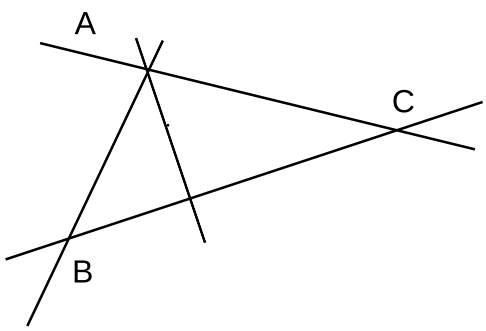
enseignants : MM. Stéphane Chavaz et André Laur

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

I.— Préliminaires

Qu'est-ce que Cabri-Géomètre ? C'est un logiciel qui permet de faire des dessins sur une feuille (l'écran) comme à la régle et au compas ; par exemple à partir de 3 points, on peut dessiner les segments joignant ces points, ou les droites passant par ces points, les hauteurs, etc … Si l'on déplace l'un des points de départ, tous les objets dépendant de ce point se déplacent en même temps.





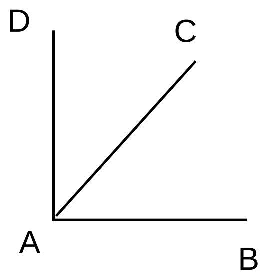
Comment représenter dans le plan des objets de l'espace?

Plusieurs méthodes existent. Nous avons adopté la perspective cavalière, qui est la méthode la plus souvent utilisée au lycée.

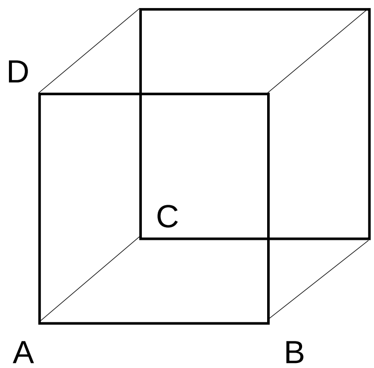
<u>Loi de Estelle 3</u>

Il y a 19 nombres qui s'écrivent en utilisant un seul chiffre entre 0 et 99 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.
Il y a 81 nombres qui s'écrivent avec deux chiffres différents entre 0 et 99 : tous les autres !

Ainsi pour représenter un cube dans l'espace avec Cabri-Géomètre, il suffit de représenter 3 arêtes de base AB, AC, AD,



et de compléter chaque face à l'aide de parallélogrammes (car la perspective cavalière conserve le parallélisme).



Nous n'avons pas cherché au départ à représenter les arêtes cachées avec des pointillés ; par la suite nous n'avons pas réussi à résoudre ce problème.

Après avoir passé un certain temps à nous entraîner sur le logiciel Cabri-Géomètre, nous avons travaillé sur les deux thèmes suivants :

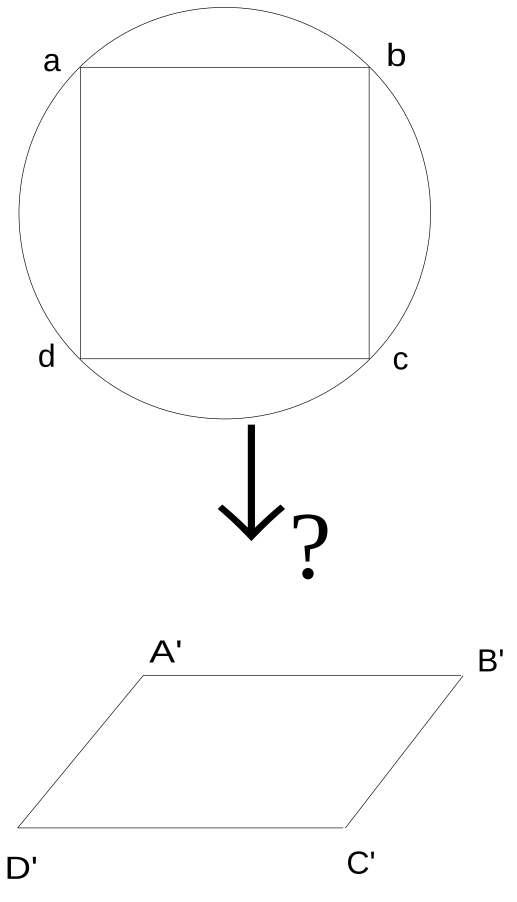
1 - Un cube étant dessiné sur l'écran avec Cabri-Géomètre comment le faire "tourner", c'est-à-dire quels déplacements effectuer sur la représentation à l'écran pour simuler une rotation du cube dans l'espace ?

2 - Comment représenter l'intersection d'un cube par un plan défini par 3 points et comment mesurer l'aire de la section ?

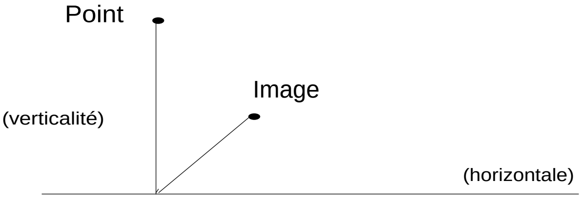
II.— Rotation d'un cube selon un axe vertical à l'aide de Cabri-Géomètre

Pour simplifier les choses nous allons essayer de ne faire tourner qu'une face du cube par exemple celle du dessus A'B'C'D'. La face du dessus correspond à la projection sur le plan de l'écran d'un carré de l'espace.

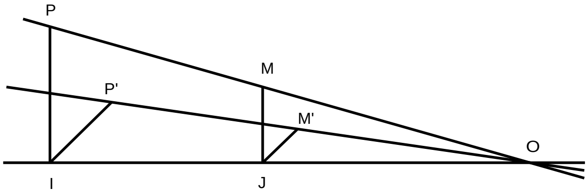
Nous avons donc représenté cette face du dessus en vraie grandeur, dans un cercle. Pour faire tourner la face du dessus, il suffit de faire tourner le point a sur le cercle. Comment passer de cette face (abcd) en vraie grandeur à sa représentation (A'B'C'D') en perspective cavalière ?



Nous l'avons fait à l'aide d'une projection non orthogonale définie par les éléments suivants:



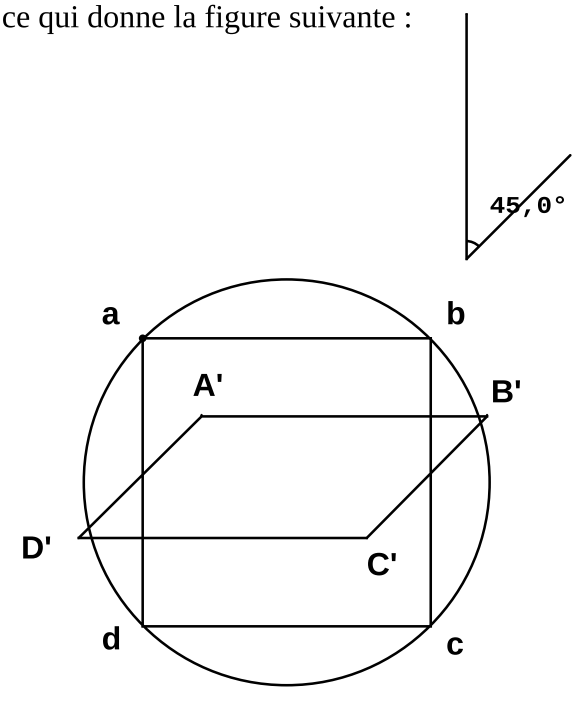
Pour construire l'image d'un point M, nous procédons comme suit :



Traçons (PM) et prenons l'intersection O de cette droite et de l'horizontale. Traçons (P'O) et prenons l'intersection de (P'O) avec la parallèle à (IP') passant par J soit M' ; M' est l'image de M par la transformation.

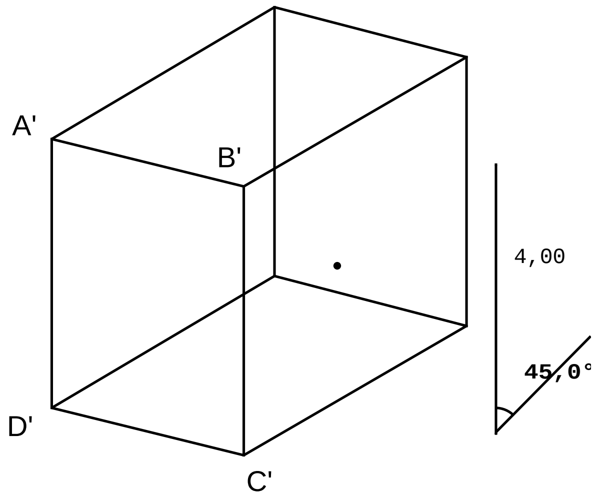
Dans Cabri-Géomètre, on peut définir une "macro" qui à tout point M associe son image M' de façon immédiate ("macro" "macro-construction").

Aux quatre sommets du carré (abcd) inscrit dans un cercle, on associe leurs images par la projection vue ci-dessus à l'aide de la macro; ce qui donne la figure suivante :

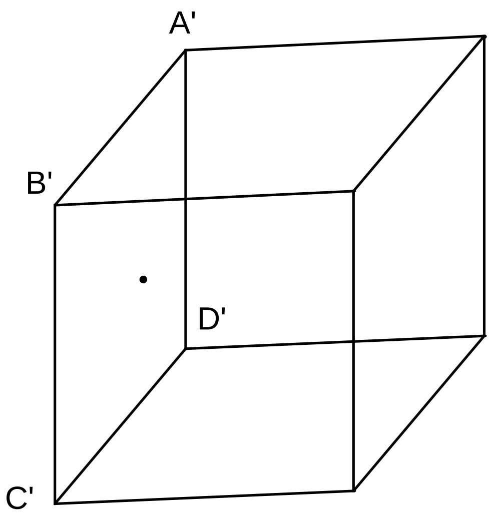


En faisant décrire le cercle aux quatre sommets du carré, le lieu de points obtenu avec les images est une ellipse, ce qui est normal car (abcd) décrit un cercle et l'image d'un cercle par une projection (différente d'une projection perpendiculaire) est une ellipse. Ainsi nous faisons tourner la face du dessus du cube. A partir de cette face et d'une arête verticale, nous construisons le reste du cube.

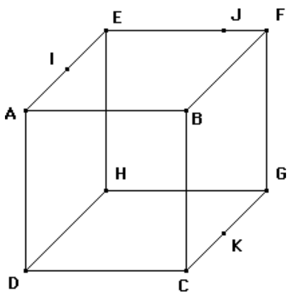
Voici la figure finale, en ayant enlevé quelques objets qui n'étaient pas indispensables, en particulier le carré (abcd) et son cercle circonscrit. Le gros point noir est la "manette" qui permet de faire tourner le cube, c'est le point a du carré initial.



Après rotation (en déplaçant la manette), on obtient par exemple :



III.— Coupe d'un cube par un plan.

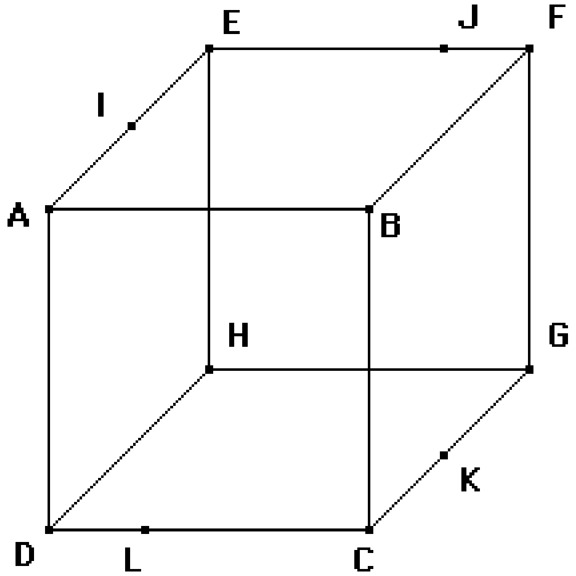


Soit I, J, K des points pris arbitrairement sur (AE), (EF), (CG) et (P) le plan défini par ces trois points.

<u>Loi de Albine 3</u>

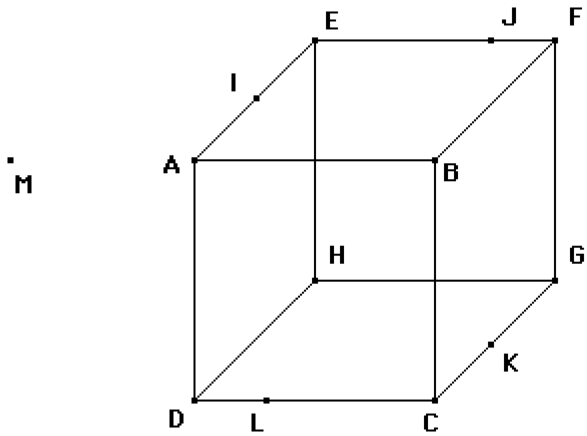
Tous les nombres qui commencent par 8 et qui finissent par 3 multipliés par 5 commencent par 4 et finissent par 5.

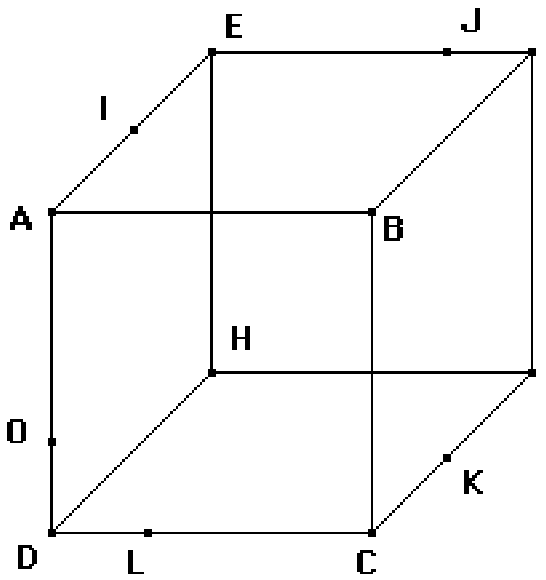
ex : 89113 x 5 = 445565



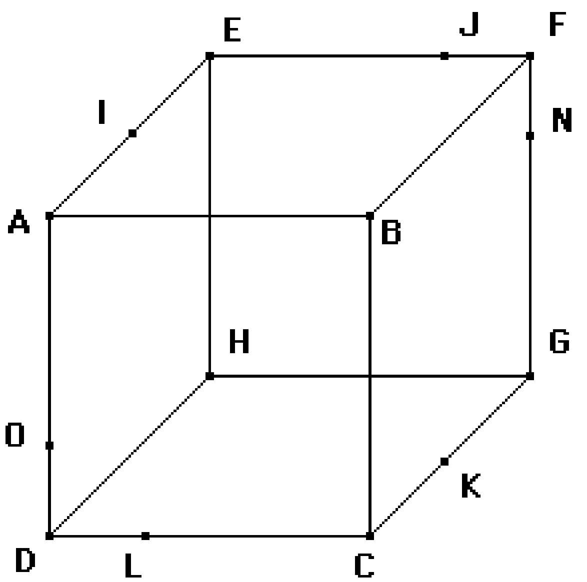
Soit L l'intersection de (P) avec (DC). Nous traçons la parallèle à (IJ) passant par K et l'intersection entre (DC) et cette droite est le point L.

Soit M le point d'intersection entre (AB) et (IJ). Le point M appartient au plan ABCD et au plan (P) car M est sur (IJ).





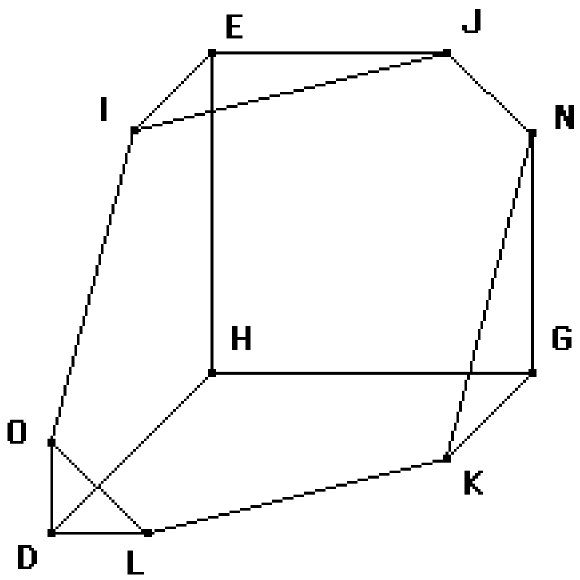
Soit O le point d'intersection entre (ML) et (AD) c'est-à-dire le point d'intersection entre (AD) et le plan (P).



Soit N le point d'intersection entre le plan (P) et (FG). Nous obtenons N en traçant la droite parallèle à (IO) passant par K et N est l'intersection de cette droite et de (FG).

[NDLR : attention au changement de notation dans la partie IV …]

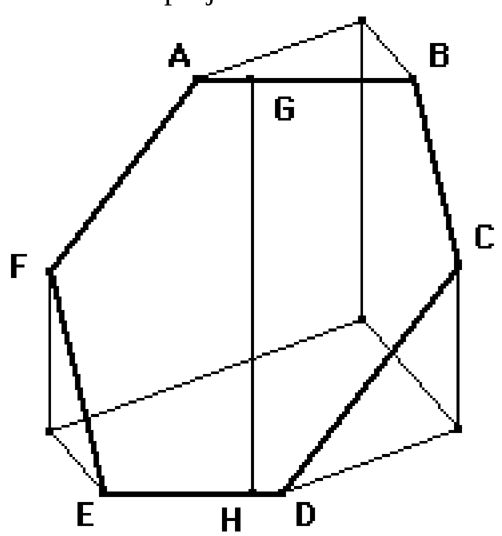
Voici la section d'un cube par le plan (P).



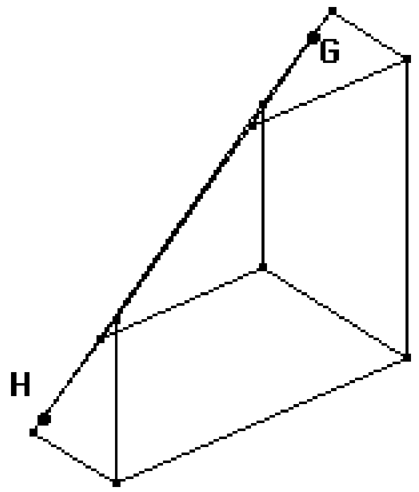
IV.— Calcul de la section d'un cube par un plan

Notre objectif est de calculer l'aire réelle de la section , c'est-à-dire l'aire dans l'espace et non l'aire projetée sur l'écran de l'ordinateur. Cette dernière nous est donnée immédiatement par le logiciel Cabri-géomètre. Il suffit alors de connaître le rapport permettant de passer de l'aire projetée à l'aire réelle pour calculer cette dernière.

Grâce à la posibilité de faire tourner le cube, on le positionne sur l'écran de façon à ce que les droites (AB) et (DE) soient parallèles à l'horizontale (repérée à l'écran). Cabri-géomètre calcule alors directement l'aire projetée A' et la hauteur projetée GH = a.



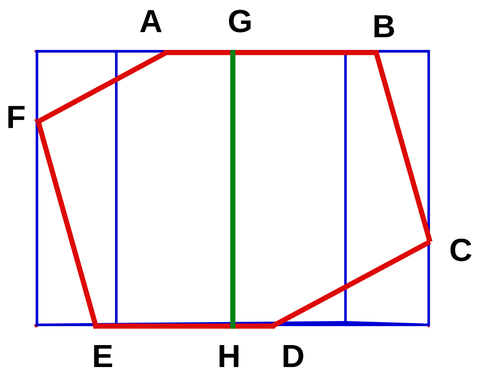
Toujours grâce à la rotation du cube, on positionne la figure de façon à ce que le plan sécant soit perpendiculaire à celui de l'écran. Cabri-géomètre calcule la nouvelle valeur de la longueur GH = b (en vraie grandeur). Pour passer de l'aire projetée à l'aire réelle, le rapport cherché est b/a .



Donc l'aire réelle A vaut $\frac{b}{a}$ A'.

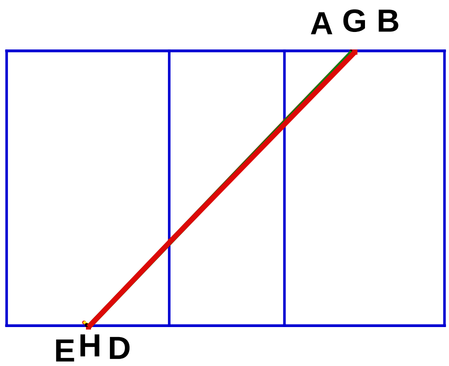
[NDLR Cette méthode de calcul d'aire de la section adaptée au logiciel utilisé est très astucieuse. Malheureusement, exposée telle quelle, elle n'est pas correcte.

Pour avoir la hauteur GH de la section en vraie grandeur il est nécessaire que GH soit parallèle au plan de projection, donc que AB soit perpendiculaire à ce plan. La face supérieure du cube doit donc être placée horizontalement. Voir les deux figures suivantes. Cette erreur a d'ailleurs été vue et corrigée par les élèves, après la rédaction de cet article, lors du tournage d'un film pour la Fête de la Science, en juin 1992.



Loi de Charlotte 2

3 x 2 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2
6 x 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4
10 x 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10



Une deuxième remarque : les élèves ont défini leur section en plaçant des points sur les arêtes du cube. En "tournant" le cube, la section était "visuellement" conservée. Ils ont donc considéré implicitement que ces rotations du cube ne modifiaient pas cette section. En fait, Cabri-géomètre maintient les points sur segment dans la même position relative (conservation des rapports) lors des modifications de ces segments. La perspective cavalière conservant les rap - ports, la methode utilisée est donc parfaitement exacte.]

V.— [Annexe] Calcul analytique de l'aire d'un polygone convexe

— **But** : Calculer l'aire de la section d'un cube avec un plan, grâce à un programme sur une calculatrice 'HP 28 S'

— **Calcul analytique**. Soit un triangle ABC, chacun de ses angles est connu par son cosinus qui peut s'écrire :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

L'aire du triangle se calcule à l'aide de la formule :

$$\text{Aire de ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

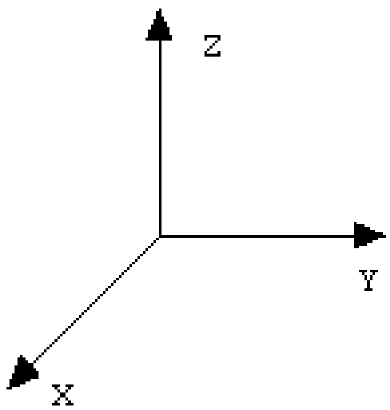
L'angle est donc déterminé grâce à

$$\text{Arc cos}\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\right).$$

* Ces formules sont applicables dans le plan ou dans l'espace.

* Les polygones convexes peuvent être décomposés en triangles dont la somme des aires est l'aire du polygone (dans notre étude le nombre maximum de côtés du polygone est 6).

— **Calcul de l'aire de la section**. Le cube est représenté en perspective cavalière, et les points d'intersection des arêtes avec le plan sécant sont déterminés graphiquement.



Les coordonnées Y et Z peuvent être lues directement ; pour les coordonnées X il faut multiplier la longueur lue sur l'écran par $\sqrt{2}$.

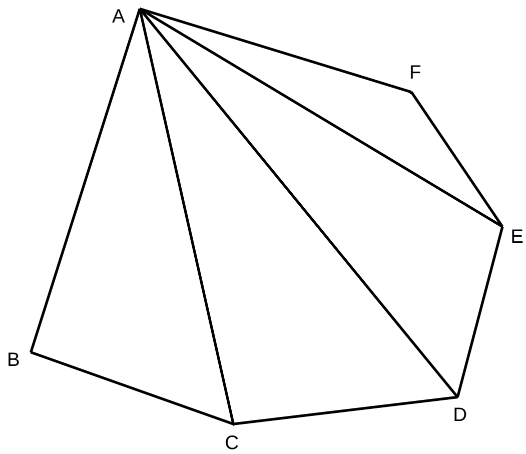
Un programme est réalisé sur HP 28 S pour calculer la surface à partir de la longueur d'une arête et des coordonnées spatiales non corrigées pour l'abscisse X.

Ce programme est décomposé en trois sous-programmes :

a. Correction des valeurs de l'abscisse.

b. Calcul de la surface du triangle. Le calcul de norme et de produit scalaire sont des fonctions intégrées à la machine, et l'angle est obtenu par la formule ci-dessus.

c. Décomposition du polygone en triangles (dans notre étude 4 triangles maximum).



Grâce à une série de tests le programme calcule l'aire des différents triangles existants, et en fait la somme.