Pavage avec des polygones

[Année 2015- 2016]

Noms et Prénoms des élèves, niveaux : GARDERE Aurélie, ISMAEL Thomas, MESANGE Dimitri en classe de 5ème.

Établissements (indiquer la ville et l'établissement jumelé) : Collège Henry de Montherlant de Neuilly-en-Thelle.

Enseignant :IDE Morgan

Chercheur(s) ou Chercheuse(s) avec leur université : BONINO Marc de l'université Paris 13

Le pavage avec des polygones consiste à remplir le plan de polygones tel que:

-ils ne se superposent pas
-ils doivent être coin à coin **(1)**
-il ne doit pas y avoir de trou
-ils doivent être identiques et de même taille

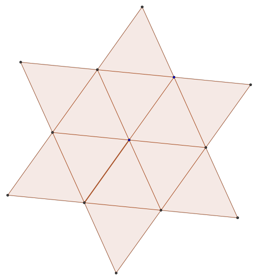
Question une
Pouvons-nous paver avec tous les polygones réguliers ? **(2)**

Question deux
Pouvons-nous paver avec tous les quadrilatères ?

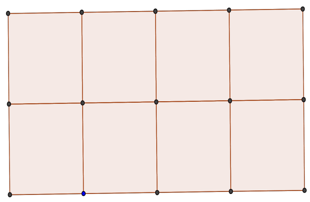
Conjecture 1 **: En réalisant de nombreuses figures géométriques nous avons conjecturé que parmi les polygones réguliers de trois à douze côtés seuls le carré, le triangle équilatéral et l'hexagone régulier permettent de paver notre plan. Nous avons aussi conjecturé que seul le pentagone permet d'en tracer trois autour d'un point avant superposition.**

Démonstration de la première conjecture:
Autour d'un point, la partie d'angle disponible est de 360°. Pour pouvoir paver, il faut ajouter des polygones de telle façon qu'il n'y est ni trou ni superposition. Il suffit d'effectuer la division euclidienne de 360 par l'angle du polygone. Si le reste est nul, cela signifie qu'il est possible de paver avec ce polygone et le quotient correspond au nombre de fois que le polygone apparaît autour du point.

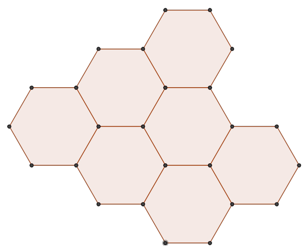
Triangle équilatéral:
L'angle d'un triangle équilatéral est de 60°. Le quotient et le reste de la division euclidienne de 360 par 60 sont 6 et 0. Comme le reste est nul (c'est à dire égal à 0) nous pouvons paver avec ce polygone. Il y aura 6 triangles équilatéraux autour de ce point.



Carré:
L'angle d'un carré est de 90°. Le quotient et le reste de la division euclidienne de 360 par 90 sont 4 et 0. Comme le reste est nul nous pouvons paver avec ce polygone. Il y aura 4 carrés autour de ce point.

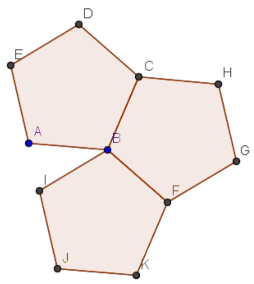


Hexagone régulier:
L'angle d'un hexagone régulier est de 120°. Le quotient et le reste de la division euclidienne de 360 par 120 sont 3 et 0. Comme le reste est nul nous pouvons paver avec ce polygone. Il y aura 3 hexagones réguliers autour de ce point.



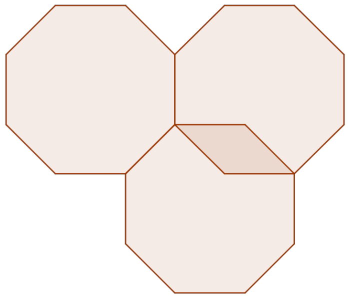
Maintenant nous avons prouvé pourquoi ces trois polygones peuvent être pris pour paver

Nous allons maintenant montrer pourquoi le pentagone régulier ne permet pas de paver.
Comme vous pouvez le constater sur l'image, le pentagone régulier ne fonctionne pas car l'espace restant est trop petit pour en mettre un quatrième (c'est la seule figure qui peux contenir 3 polygones avant superposition)
calcul: 360= 3 x 108 + 36
comme le reste n'est pas de 0, nous pouvons donc conclure que cette figure ne peut pas être prise pour faire un pavage.



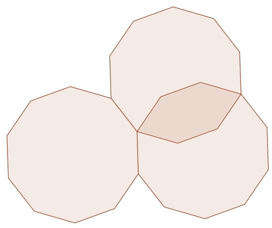
Nous allons faire de même avec l' octogone.

Nous allons maintenant montrer pourquoi l'octogone régulier ne permet pas de paver.
Comme vous pouvez le constater sur l'image, l'octogone régulier ne fonctionne pas car l'espace restant est trop petit pour en mettre un troisième. **(3)**
calcul: 360= 135 x 2 + 90
comme le reste n'est pas de 0, nous pouvons donc conclure que cette figure ne peut pas être prise pour faire un pavage.



Nous allons faire de même avec le décagone.

Nous allons maintenant montrer pourquoi le décagone régulier ne permet pas de paver.
Comme vous pouvez le constater sur l'image, le décagone régulier ne fonctionne pas car l'espace restant est trop petit pour en mettre un troisième. **(3)**
calcul: 360= 144x2+72
comme le reste n'est pas de 0, nous pouvons donc conclure que cette figure ne peut pas être prise pour faire un pavage.



Pour les autre polygones régulier, l'angle augmente car il y a plus de côtés donc moins d'espace pour paver **(4)**. Il sera donc impossible de paver avec l'heptagone et les polygones suivants. **(5)**

Pour conclure, nous remarquons que seul le triangle équilatéral, le carré et l’hexagone régulier permettent de pavée le plan.
Concernant la question 2, nous avons pavé avec certains quadrilatères mais nous n'avons pas eu le temps de démontrer nos résultats.

Notes d'édition :

(1) Le terme « coin à coin » signifie que les sommets des polygones doivent forcément toucher que des sommets. Il n'est pas possible qu'un somme touche l'un des côtés d'un des polygones.

(2) Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles également. En particulier, un losange non carré n'est pas un polygone régulier car ses quatre angles ne sont pas égaux.
Cette dernière propriété sera très utilisée dans la démonstration de la première conjecture.

(3) Le comité d'édition pense que c'est un « copier/coller » malheureux car il faudrait plutôt dire que les polygones se superposent (en l'occurrence, l'affirmation n'est pas fausse puisqu'il n'y a pas d'espace du tout mais elle pourrait porter à confusion).

(4) Le comité d'édition regrette que cette affirmation ne soit pas plus expliquée. Même si nous observons empiriquement que la mesure de l'angle augmente avec le nombre de côtés, il aurait été bien que les élèves expliquent que c'est dû au fait que nous avons des polygones réguliers. En particulier, le lecteur intéressé pourra remarquer que les polygones sont en fait composés de triangles isocèles de même aires dont la base est l'un des côtés du polygones et les sommets opposés se rencontrent au même point. En partant de l'un des côtés et en revenant à ce dernier, nous pouvons remarquer que l'angle formé fait 360°. Comme cet angle est divisé en angles égaux aussi nombreux que le nombre de côté, leur valeur diminue et par conséquent, les angles de l'autre côté du triangle vont voir leurs valeurs augmenter.

(5) Dans leur introduction, les élèves ont laissé entendre que leur démonstration s'arrêtait pour des polygones avec un nombre de côté inférieur ou égale à 12. Toutefois, nous pouvons remarquer que leur démonstration s'étend à tous les polygones réguliers.