Pavage du rectangle

Année 2006 – 2007

Guillaume Camelot, Luc Darné, Antoine Carof, Baudouin Auzou, Rémy Patin, Elodie Martin, Hélène Martin, Aurélie Verdon,élèves de Terminale S

Établissements : Lycée Sud-Medoc, Lycée Montaigne

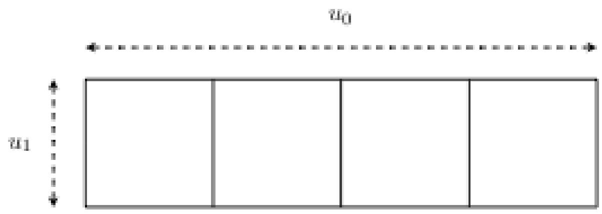
Encadrés par : M. Claudel, D. Grihon, P. Grihon,

Chercheur : Robert Deville, Université Bordeaux 1.

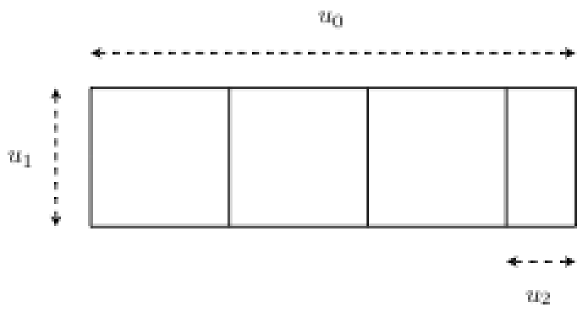
1. **Présentation du sujet** :

On dispose d'un rectangle de côtés u_0 et u_1 tel que $u_0 > u_1$ et $u_0 = 1$.(1) On divise alors le rectangle en carrés de longueur u_1 et on obtient alors deux possibilités :

– Soit on obtient exactement que des carrés de côté u_1 .

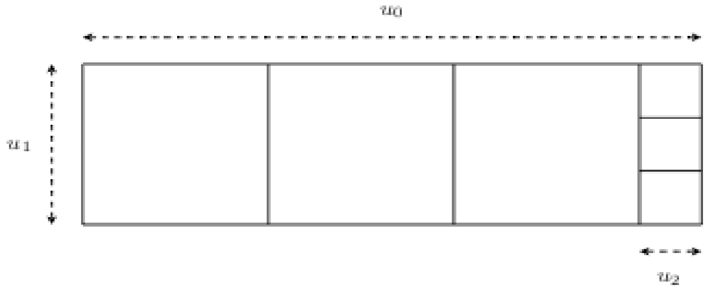


– Soit ce n'est pas le cas et il reste alors un rectangle de largeur $u_2 < u_1 < u_0$.

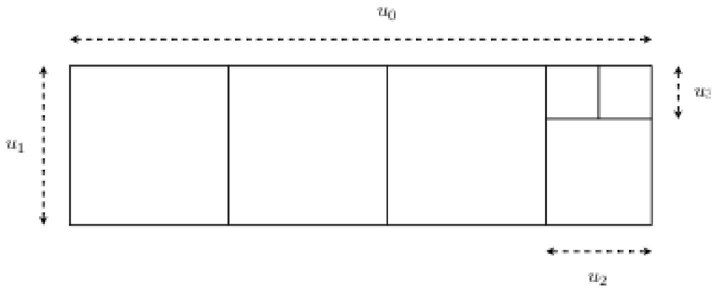


Ce nouveau rectangle a pour dimension u_1 et u_2 . On peut remarquer qu'en renouvelant le procédé dans le rectangle restant, on peut obtenir diverses situations :

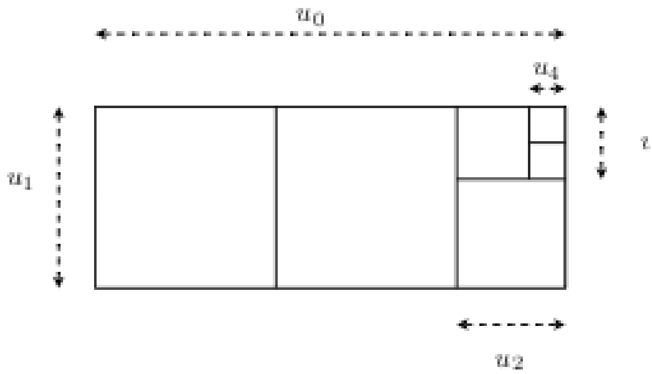
– Ici, le procédé s'arrête quand 3 carrés de côté u_2 ont été tracés.



– Ici, le procédé s'arrête aux carrés de côtés u_3 . Il a ainsi fallu poursuivre le procédé.



– Ici, le procédé s'arrête aux carrés de côtés u_4 .



On peut donc se demander si le phénomène s'arrête toujours ou si il peut dans certaines situations être infini. Par quelles lois est régit le découpage d'un rectangle en carrés ?

2. **Modélisation du procédé**

Le procédé peut être assimilé à la construction d'une suite. Ainsi par exemple, on peut avoir la suite suivante(2) :

$$\begin{cases} u_0 = 2u_1 + u_2 \\ u_1 = 3u_2 + u_3 \\ u_2 = 5u_3 + u_4 \\ \ldots \end{cases}$$

On a plus généralement $u_n = p_n u_{n+1} + u_{n+2}$ avec $p_n \in \mathbb{N}$

<u>Situation pour laquelle le rapport des longueurs est rationnel</u>

Nous allons ici étudier le cas où $\frac{u_0}{u_1}$ est rationnel. On peut alors procéder à un "changement d'unités" tel que $u_0 u_1 > 1$ et $u_{0,} u_1 \in \mathbb{N}$

Par exemple, si $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{11}{29}$, on considère $u_0 = 29$ et $u_1 = 11$ (3)

On remarque ici que la suite s'arrête. On a ainsi :

$$\begin{aligned}29&=11\times2+7\\11&=7\times1+4\\7&=4\times1+3\qquad (4)\\4&=3\times1+1\\3&=1\times3\end{aligned}$$

On ne peut regarder ces calculs sans penser à l'algorithme d'Euclide.(5)

Il en résulte que si le rapport $\frac{u_0}{u_1}$ est rationnel alors on peut prendre u_0 , $u_1 \in \mathbb{N}$ et à partir de ceci, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide.

La suite des (u_n) sera ainsi entièrement composée d'entiers naturels, sera décroissante et minorée, et bien sûr finie.(6)

Trouver le dernier terme u_n revient donc à chercher le PGCD de u_0 et u_1 .

En conclusion, si le rapport $\frac{u_0}{u_1}$ est rationnel, le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini de découpage

Réciproquement, nous allons montrer que si le procédé s'arrête alors forcément le rapport $\frac{u_0}{u_1}$ est un rationnel. Pour cela, nous allons reprendre un exemple(7).

$$\begin{aligned}37&=13\times2+11\\13&=11\times1+2\\11&=2\times5+1\\2&=1\times2\end{aligned}$$

De la première égalité, on en déduit que :

$$\frac{37}{13}=2+\frac{11}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{11}}$$

Mais la seconde égalité donne elle $\frac{13}{11}=1+\frac{2}{11}$

En utilisant ces deux égalités, on obtient finalement :

$$\frac{37}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{11}}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{11}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{2}}}$$

On peut répéter alors le procédé pour obtenir finalement

$$\frac{37}{13}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$$

On montre ainsi que le rapport $\frac{u_0}{u_1}$ est égal à une fraction que l'on dit *fraction continue* construite à partir du procédé de découpage. On constate au niveau de cette fraction continue la suite des p_n intervenant dans le procédé de découpage.

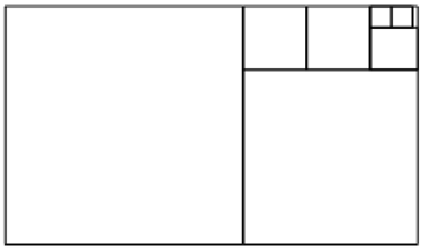
Si donc le procédé de découpage s'arrête, il est alors possible d'exprimer $\frac{u_0}{u_1}$ comme une fraction continue finie. Or une fraction continue finie est un nombre rationnel(8).

En conclusion, cela veut dire que si le procédé de découpage s'arrête alors le rapport $\frac{u_0}{u_1}$ est un nombre rationnel.

3. **Quand le rapport des longueurs est irrationnel**

Comme on vient de le prouver, on sait que la suite des u_n est finie uniquement si le rapport initial $\frac{u_0}{u_1}$ est rationnel.

Donc dans le cas où $\frac{u_0}{u_1}$ est irrationnel, la suite est infinie. Cependant, on observe qu'elle reste décroissante par construction (on prend toujours la plus petite longueur pour construire les carrés).



On a bien $u_0 > u_1 > u_2 > \ldots.$

Mais même si cette suite se poursuit indéfiniment, elle peut être régulière(9).

Nous allons en voir ici quelques exemples. Pour cela, nous allons utiliser un petit programme qui va nous permettre d'obtenir la décomposition en fraction continue d'un nombre irrationnel. Par exemple, pour obtenir la fraction continue de $\sqrt{2}$, on applique le procédé de découpage à un rectangle de longueur $\sqrt{2}$ (10) et de largeur 1. On constate qu'après avoir enlevé un premier carré, à chaque fois, on enlève deux carrés. La fraction continue de $\sqrt{2}$ donne :

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

Cette fraction continue est bien infinie. De plus, comme on a pu le voir précédemment, on retrouve dans cette fraction continue la suite des p_n intervenant dans le procédé de découpage. C'est à cette suite de (p_n) que l'on s'intéresse.

Le tableau ci-dessous montre l'apparition de régularité dans la décomposition en fraction continue.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$
p_1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
p_2	2	1	4	2	1	1	6	3	2
p_3	2	2	4	4	1	4	6	6	6
p_4	2	1	4	2	1	1	6	3	2
p_5	2	2	4	4	4	6	6	6	6
p_6	2	1	4	2	1	1	6	3	2

p_7	2	2	4	4	1	4	6	6	6

On voit donc bien ici apparaître une périodicité dans la suite des (pn). Cette périodicité fait apparaître des cycles. C'est à cette périodicité que nous allons nous intéresser(11).

- **Cycle de longueur 1**

Un cycle de longueur 1, cela signifie que l'on peut construire toujours le même nombre de carrés dans un rectangle à un rang n donné.

EXEMPLE : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0.617$

Comparons le rectangle $R_0(u_{0,} u_1)$ avec $R_3(u_{3,} u_4)$ (12). On a

$\frac{u_0}{u_1} \simeq 1.62$ et . $\frac{u_3}{u_4} \simeq 1.57$

Donc les rectangles R_0 et R_3 sont presque similaires. Leurs longueurs sont presque proportionnelles.
Dans le cas ci-dessus, nous avons étudié avec un seul carré se formant à chaque fois, ce qui se traduit par $u_n = u_{n+1} + u_{n+2}$.

La suite des u_n s'écrit sous la forme $un = aq_1^n + bq_2^n$ [1], a et b étant quelconques(13). Donc on a :

$$u_n = u_{n+1} + u_{n+2} \Leftrightarrow aq_1^n + bq_2^n = aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1} + aq_1^{n+2} + bq_2^{n+2} .$$

Si $b=0$ et $a \neq 0$ alors on a $aq_n = aq_{n+1} + aq_{n+2}$ ce qui entraîne que $1 = q_1 + q_1^2 (q_1 \neq 0)$.

De même si $a=0$ et $b \neq 0$, on obtient $1 = q_2 + q_2^2$. Finalement q_1 et q_2 sont tous les deux solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. On obtient ainsi comme solution :

$$q_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

On remarque ici le nombre d'or φ de Fibonacci.

Dans le cas général, à chaque étape se formeraient α carrés. On a donc :

$$u_n = \alpha u_{n+1} + u\, n + 2 \quad \text{avec} \quad u - n = a\, q_1^n + b\, q_2^n$$

Par le même procédé, on obtient :

$$1 = \alpha q_1 + q_1^2 \quad \text{et} \quad 1 = \alpha q_2 + q_2^2$$

Ainsi q_1 et q_2 sont solutions de l'équation $x^2 + \alpha x - 1 = 0$ dont le discriminant est égal à $\Delta = \alpha^2 + 4$. De ce fait, on a :

$$q_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} , q_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} = -\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

L'équation est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$ donc on a : $q_1 . q_2 = -1$ donc $q_1 = -\frac{1}{q_2}$ .De plus $\alpha \geq 1$ soit

$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} > 1$ donc $-q2 > 1$ et $q2 < 0$ donc $\frac{1}{-q_2} < 1$

Donc $q_1 < 1$,or $q_1 . q2 < 0$ et $q_2 < 0$ donc $q_1 > 0$ .Finalement $q_1 \in]0 ; 1[$.

Mais on sait que $0 \leq u_n < u_0$ quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui donne que $0 \leq a\, q_1^n + bq_2^n < u_0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Or la suite formée des termes bq_2^n n'est pas bornée si $b \neq 0$ puisque q_2 < −1 donc on en

1 résultat fourni par le chercheur et les professeurs

déduit que $b=0$. Ceci entraîne que $u_n=aq_1^n$ donc (u_n) est une suite géométrique.

Cela vérifie bien les relations d'agrandissement et de proportionnalité vérifiée dans l'exemple.

Donc, dans le cas d'un nombre constant de carrés α , on a :

$u_n=u_0 . q^n$ avec $q=\dfrac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$; de plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ (14)

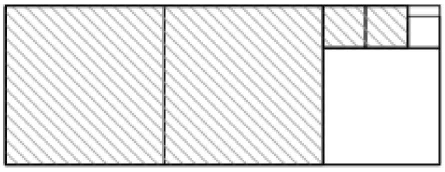
Le rapport initial doit alors être :

$$\frac{u_0}{u_1}=\frac{1}{q}=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$$

Est fournie en Annexe une autre démonstration proposée par le chercheur.

- **Si p_n alterne entre deux valeurs**

EXEMPLE : On suppose que p_n alterne entre les valeurs $a=2$ et $b=1$.(15)



On s'aperçoit alors que les rectangles sont deux à deux des réductions, comme ici les deux exemples hachurés.
(16) On pose alors $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$. On se demande si ces deux suites sont des suites géométriques.
Ces deux suites sont définies par :

$$\begin{cases} v_k=a\cdot w_k+v_{k+1} \\ w_k=b\cdot w_{k+1}+w_{k+1} \end{cases}$$

Dans le cas général, on aura :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_k=\dfrac{v_k-v_{k+1}}{a}, w_{k+1}=\dfrac{v_{k+1}-v_{k+2}}{a} \\ \dfrac{v_k-v_{k+1}}{a}=bv_{k+1}+\dfrac{v_{k+1}-v_{k+2}}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_k=aw_k+v_{k+1} \\ v_k-v_{k+1}=abv_{k+1}+v_{k+1}-v_{k+2} \end{cases}$$

On obtient finalement $v_k-(ab+2)v_{k+1}+v_{k+2}=0$. Donc si la suite (v_k) est une suite géométrique de raison q alors q doit être solution de l'équation $q^2-(ab+2)q+1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=(ab+2)^2-4=ab(ab+4)$. Et on suit alors le même raisonnement que pour la situation précédente.

On aura $q=\dfrac{ab+2-\sqrt{ab(ab+4)}}{2}$, l'autre valeur étant strictement supérieure à 1.

On a donc avec cette valeur pour q , $v_n=v_0 q^n$ soit $u_{2n}=u_0 q^n$ et donc $\dfrac{u_0}{u_2}=\dfrac{1}{q}$ .De plus,

$$w_n=u_{2n+1}=\frac{v_n-v_{n+1}}{a}=\frac{u_0 q^n-u_0 q^{n+1}}{a}=q^n\frac{1-q}{a}u_0$$

EXEMPLE D'APPLICATION : avec $a=2$ et $b=1$, on a $q=\dfrac{2+2-\sqrt{2(2+4)}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $u_2=(2-\sqrt{3})u_0$, ce qui correspond bien à une réduction.

Les valeurs initiales seraient u_0 *et* $u_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}u_0$.

4. Annexe

On se place dans la situation où la suite des (p_n) présente un cycle de longueur 1, ce qui veut dire qu'elle est constante. Ceci entraîne que tous les R_n sont similaires (on enlève à chaque fois un même nombre de carrés donc les longueurs de deux rectangles consécutifs sont proportionnelles).

Dans ce cas, on a $a=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qui est indépendant de n, et donc $u_n=a\cdot u_{n-1}=a^2\cdot u_{n-2}=a^n\cdot u_0$.

Comme $a=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{-p_n u_n+u_{n-1}}{u_n}=-p_n+\frac{1}{a}$, on en déduit que a est solution de l'équation $x^2+p_n x-1=0$ pour tout n (en effet,on a $a=-p_n+\frac{1}{a}$ donc $a^2=-p_n a+1$)

Or comme la suite (p_n) est constante égale à p , a est donc solution de l'équation $x^2+p\,x-1=0$. Pour $p=1$, on enlève un seul carré à chaque fois. On a alors $0<a<1$ et a racine de $x^2+x-1=0$. Donc $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Si on choisit $u_0=1$, on a alors $u_n=a^n$

Notes d'édition

(1) L'hypothèse " $u_0=1$ " n'est pas utile. D'ailleurs, dans la suite du document, on élude cette hypothèse à plusieurs reprises. Ce qui nous intéresse, c'est surtout u_1/u_0 , le rapport largeur/longueur du rectangle (égal à u_1 si $u_0=1$).

(2) La première équation signifie qu'on a pu retirer 2 carrés de côté u1 au rectangle initial et qu'il reste un rectangle de largeur u_2 . La deuxième équation signifie qu'on a pu retirer 3 carrés de côté u_2 au rectangle qu'il restait à l'étape précédente et qu'il reste un rectangle de largeur u_3 . Et ainsi de suite.

(3) En toute généralité, si u_1 est rationnel, il peut s'écrire p/q avec p et q entiers naturels. Alors on considère $u_0=q$ et u ¿$1=p$.

(4) Il vaudrait mieux écrire 29 = 2x11+7 pour se conformer à l'écriture $u_n=p_n u_{n+1}+u_{n+2}$, car ici $p_0=2$.

(5) En effet, chaque équation est une division euclidienne de u_n par u_ $n+1$ où p_n est le dividende et u_{n+2} le reste de la division.

(6) Comme restes de divisions euclidiennes, les u_n sont effectivement des entiers naturels et sont donc minorés par 0. La suite des (u_n) est décroissante parce que le reste d'une division euclidienne étant toujours strictement plus petit que le diviseur, on a à chaque étape $u_{n+2}<u_{n+1}$. On ne peut pas avoir de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante (sinon il y aurait une infinité de nombres entiers entre 0 et u_0), ce qui explique pourquoi la suite s'arrête (le dernier rectangle est entièrement recouvert par des carrés).

(7) En mathématiques, on ne démontre pas un résultat en le prouvant sur un exemple ; il faut prendre le cas général, sinon la preuve ne vaut que pour l'exemple choisi. De plus, même l'exemple ne tient pas vraiment parce qu'on présente des divisions euclidiennes sur des entiers, c'est à dire qu'on suppose déjà qu'on a fait un changement d'échelle pour se ramener à des entiers, possible uniquement avec u_1 rationnel, alors qu'on veut justement prouver que u_1 est rationnel ! Cependant, on n'est pas loin du bon raisonnement : il suffit d'écrire l'équation initiale

$u_n=p_n u_{n+1}+u_{n+2}$

et d'en déduire que

$u_n/u_{n+1}=p_n+1/(u_{n+1}/u_{n+2})$.

Mais c'est aussi valable pour n+1 :

$u_{n+1}/u_{n+2}=p_{n+1}+1/(u_{n+2}/u_{n+3})$.

En combinant les deux équations, on a

$u_n/u_{n+1}=p_n+1/(p_{n+1}+1/(u_{n+2}/u_{n+3}))$

et en itérant, on obtient

$u_0/u_1=p_0+1/(p_1+1/(p_2+...+1/p_N))$

si le processus s'arrête à la N-ième étape. La fraction a la forme voulue.

(8) En effet, il suffit de mettre les additions au même dénominateur itérativement.

(9) Ici, par suite régulière, on signifie une suite périodique à partir d'un certain rang.

(10) Ici la longueur du rectangle est strictement supérieure à 1, mais cela ne change en rien le raisonnement,

comme indiqué dans la note n°1. De plus, on rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
(11) On se demandera en particulier comment choisir le rectangle initial pour observer cette périodicité.
(12) $R_n(u_n, u_{n+1})$ désigne le n-ième rectangle du procédé, de longueur u_n et de largeur u $¿n+1$, noté brièvement R_n .
(13) a et b dépendent des conditions initiales u_0 et u_1 de la suite (u_n) .
(14) À chaque étape du procédé de découpage, on obtient donc un rapport largeur/longueur u_{n+1}/u_n égal à q . Tous les rectangles sont donc semblables, au sens où ils ont tous ce rapport largeur/longueur. Dans l'exemple, on obtient ainsi un rapport constant égal à q_1 , le nombre d'or.
(15) Ici, les notations a et b n'ont rien à voir avec celles du paragraphe précédent.
(16) On veut dire que tout rectangle du procédé a le même rapport longueur/largeur que celui qui arrive deux étapes plus tard.