

Pavage de la place de la mairie

année scolaire 2015-2016

BOIS Mathieu, HAMM Gabrielle, JOURDAN-FERRY Bastien, PEAN Paul, VALLETTE Jame, élèves de 4ème
encadrés par **Aurélien SACHOT**, professeur de mathématiques.
Établissement : collège Le Vieux Chêne, 4 rue des Éturcies 72200 La Flèche.
Enseignant-chercheur : François DUCROT, université d'Angers.

1. Présentation du sujet :

En début d'année nous avons décidé de travailler sur le problème des pavages réguliers car il nous a paru une grande source de questionnements.

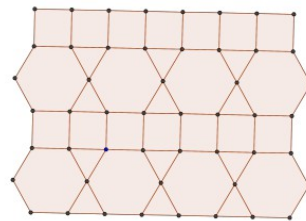
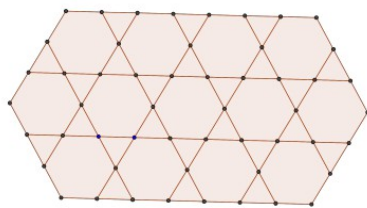
Voici le problème que M.DUCROT nous a donné :

Une municipalité souhaite paver la place du village. Pour cela, le cahier des charges dit que :

- Tous les pavés sont des polygones réguliers (on peut utiliser un ou deux types de polygones)*
- Le pavage lui-même est régulier (en un sens à préciser).*

Pouvez-vous aider le maire à faire la liste de tous les motifs envisageables ?

Il faudra se demander par ce que l'on entend par pavage régulier. Ainsi dans les deux schémas proposés, le premier est régulier; le deuxième ne l'est pas. Pourquoi ?

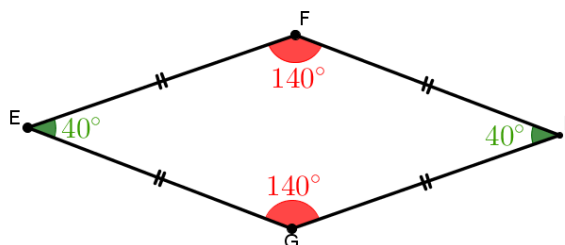
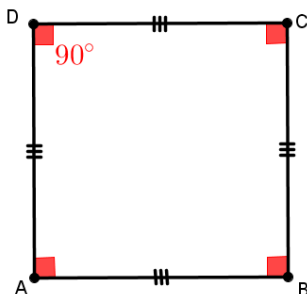


2. Nos recherches durant l'année scolaire.

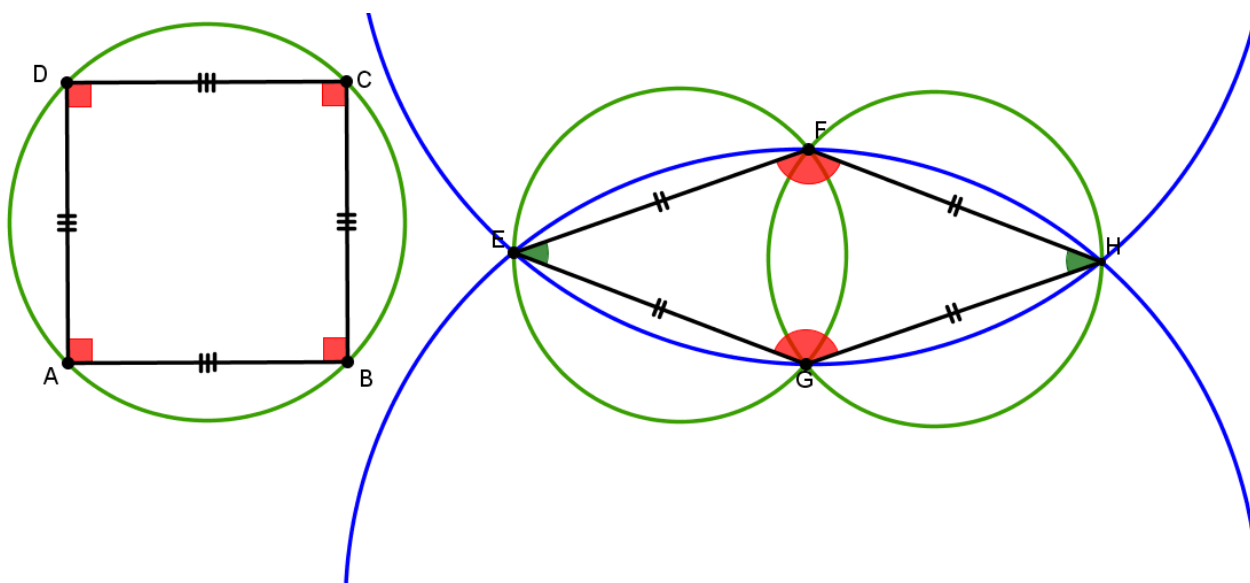
Définissons d'abord ce qu'est un **polygone régulier** et un **pavage régulier**.

Un polygone régulier est un polygone non croisé, inscritible dans un cercle dont tous les cotés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Voici deux exemples : Le carré est régulier alors que le losange (pas carré) ne l'est pas :



En effet, le carré a 4 côtés de même longueur et 4 angles droits. Le losange a bien ses 4 côtés égaux mais il n'a pas ses 4 angles égaux. De plus, pour le losange on peut trouver 4 cercles passant par 3 de ses sommets, mais jamais un cercle passant par les 4 sommets en même temps (voir le schéma ci-dessous).

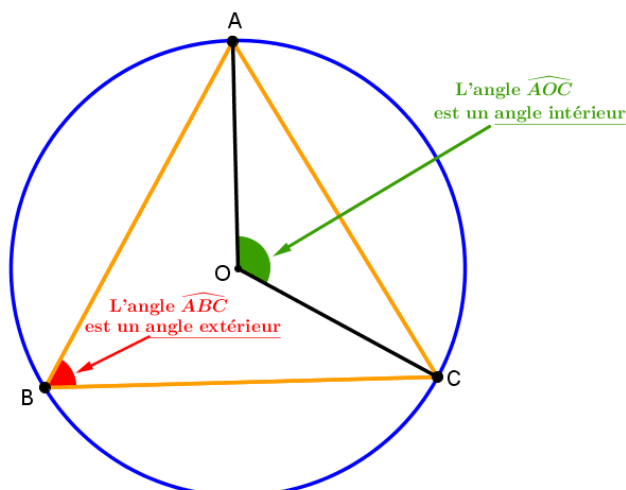


Pour les **pavages réguliers** voici la définition dont nous nous sommes servis : un **pavage régulier** doit être composé de polygones réguliers, de plus, autour de chaque sommet, les polygones qui l'entourent sont les mêmes et sont disposés de la même manière. Sur les exemples de l'énoncé du sujet,

- **le pavage régulier** : chaque sommet des polygones est entouré de **triangle équilatéral-hexagone-triangle équilatéral-hexagone** (dans l'ordre de lecture).
- **Le pavage non régulier** : certains sommets sont entourés de 2 carrés, 1 triangle équilatéral et un hexagone. Alors que d'autres sommets sont entourés de 2 triangles équilatéraux et de 2 hexagones. Ils n'y a donc pas la même composition de polygones réguliers.

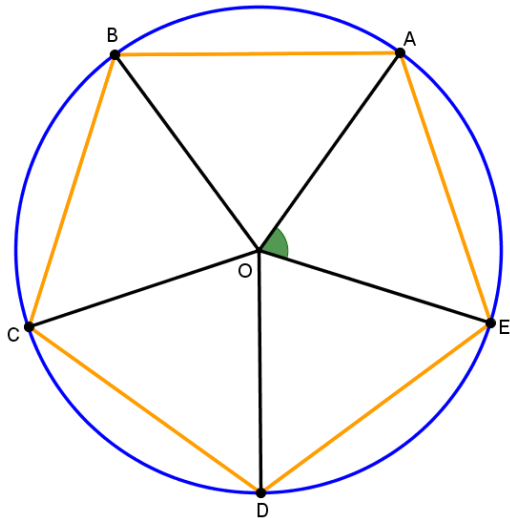
Au début de nos recherches, nous sommes allés sur géogébra pour chercher tous les pavages possibles, mais notre enseignant-chercheur nous a conseillé de chercher une règle qui s'applique pour tout le problème. Nous avons conclu que pour un sommet quelconque, la somme des angles extérieurs des polygones qui le bordent **doit être égale à 360°** .

Nous allons définir ce que nous appelons, **un angle extérieur**. Nous avons besoin aussi de savoir ce qu'est **un angle intérieur**. Sur le schéma ci-dessous d'un polygone régulier (triangle équilatéral), cela définit les deux angles décrits:



Comment calculer la mesure d'un angle extérieur ?

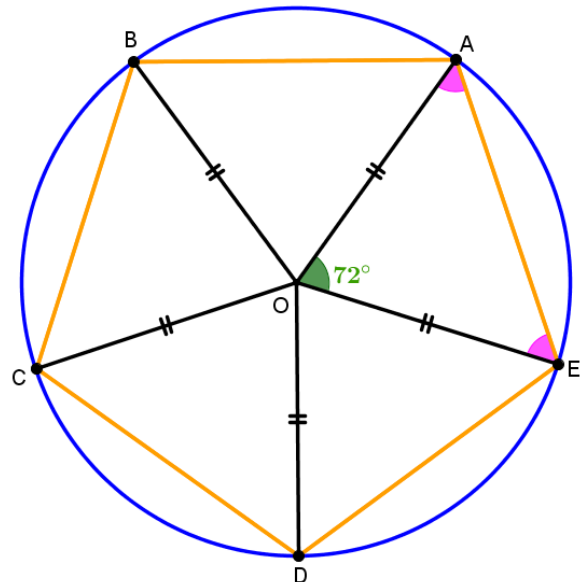
M.SACHOT nous a d'abord dit de calculer cet angle extérieur pour un exemple de polygone régulier. Nous avons choisi le pentagone régulier. Nous avons d'abord calculé l'angle intérieur :



$$\widehat{AOE} = \frac{360^\circ}{\text{nombre de côtés du polygone}} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

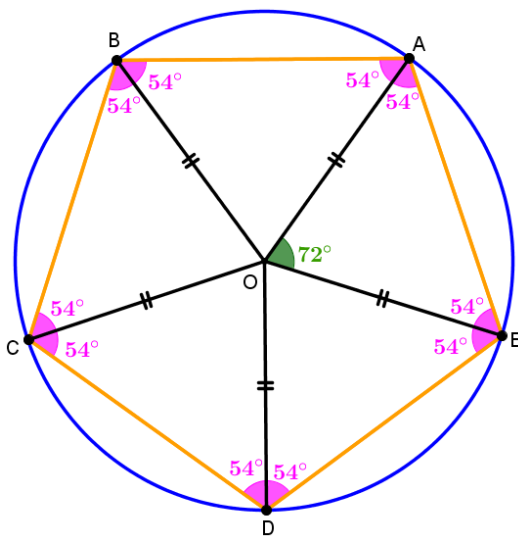
Donc l'angle intérieur vaut 72° .

Nous allons utiliser cet angle intérieur pour calculer l'angle extérieur.

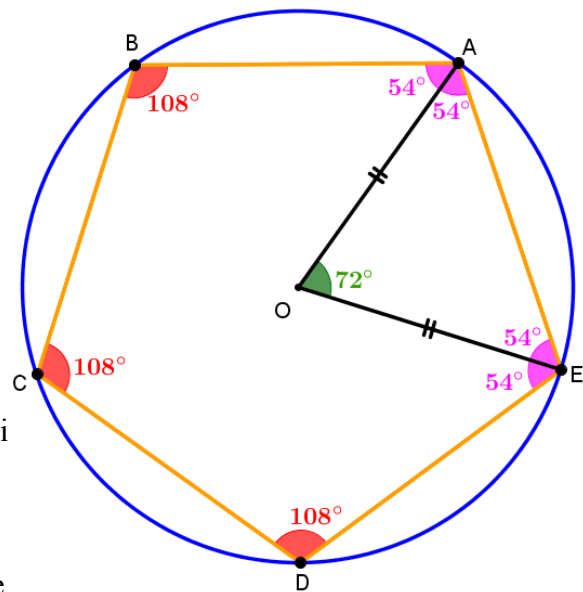


Si on regarde bien, le pentagone est composé de triangles isocèles tous identiques (car deux côtés sont des rayons du cercle). Et nous savons que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° , donc dans le triangle AOE isocèle en O, on a (1)

$$\widehat{OAE} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$



Donc les angles extérieurs du pentagone sont égaux à $54^\circ \times 2 = 108^\circ$



M.SACHOT nous a demandé ensuite d'écrire la mesure de l'angle extérieur en fonction de l'angle intérieur pour essayer de dégager une formule qui sera utile dans le cas général.

Déjà nous nous sommes rendu compte que l'angle extérieur était égale à $180^\circ - 72^\circ$ (2), et qu'il était inutile de diviser par 2 (3). A la place de 72° , on écrit la formule de l'angle intérieur :

$$\text{angle extérieur} = \widehat{ABC} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$$

Ainsi **dans le cas général :** $\text{angle extérieur} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ avec un polygone régulier à n côtés.

Des formules plus simples :

Donc autour d'un sommet, plusieurs polygones peuvent le border. La somme de tous les angles extérieurs des polygones qui le bordent doit être égale à 360° (un tour complet).

Nous avons remarqué aussi en faisant plein de polygones réguliers sur géogébra, que plus le nombre de côtés était grand et plus l'angle extérieur était grand. Comme le plus « petit » (en nombre de côtés) polygone régulier étant le triangle équilatéral, autour d'un sommet, on pourra mettre au maximum $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ polygones.

De plus en regardant la formule des angles extérieurs d'un polygone, les angles extérieurs d'un polygone régulier mesure moins que 180° , or $180^\circ \times 2 = 360^\circ$, donc **il ne peut pas y avoir seulement 2 polygones qui bordent un sommet.**

Ainsi, cela réduit les possibilités, il y a soit 3, 4, 5 ou 6 polygones qui bordent un sommet.

- **Pour 6 polygones qui bordent un sommet**, nous n'avons pas le choix, c'est **6 triangles équilatéraux**.
- **Pour 3 polygones qui bordent un sommet**, nous avons trouvé une formule simple grâce à M.DUCROT et M.SACHOT pour résoudre une équation (nous n'avons pas encore vu les équations en cours classique).

Nous sommes partis de 3 polygones ayant n , p et q côtés. Alors les angles extérieurs de ces polygones mesurent $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, $180^\circ - \frac{360^\circ}{p}$ et $180^\circ - \frac{360^\circ}{q}$.

$$\text{Ainsi } \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{p}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{q}\right) = 360^\circ$$

$$\text{donc } 360 - \frac{360}{n} - \frac{360}{p} + 180 - \frac{360}{q} = 360$$

on soustrait 360 à chaque membre, on obtient une nouvelle équation :

$$-\frac{360}{n} - \frac{360}{p} - \frac{360}{q} + 180 = 0$$

on factorise par -180 :

$$-180 \times \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1 \right) = 0$$

Nous obtenons un produit qui est égale à 0, donc le deuxième facteur est égale à 0. Ainsi

pour que $\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1 = 0$, il faut que $\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1$

Cette formule s'applique pour tous les pavages avec trois polygones autour d'un même

sommet. Un exemple : $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

correspond à trois polygones à six côtés autour d'un même sommet, donc trois hexagones. Chaque angle des hexagones mesure 120 degrés, donc $120^\circ \times 3 = 360^\circ$.

Nous avons ensuite, réussi à trouver les formules pour 4 et 5 polygones qui bordent un sommet, sans l'aide du professeur

- Pour 4 polygones qui bordent un sommet : $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$

- Pour 5 polygones qui bordent un sommet : $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{3}{2}$

Connaissant les formules, nous avons fait des tests avec des nombres sur tableur, et ensuite nous avons cherché si cela fonctionnait bien sur géogébra. Nous avons constaté que certaines équations fonctionnaient mais cela ne fonctionnait pas en réalité. Notre professeur, M.SACHOT nous a expliqué que les équations que nous avons trouvées fonctionnaient si on s'intéressait à un sommet en particulier. Mais sur tous les sommets, rien ne dit que cela fonctionne. Il nous a dit que si l'équation était vraie, c'était **une condition nécessaire mais pas suffisante** pour un pavage régulier. Cela réduit quand même les cas à traiter. (4)

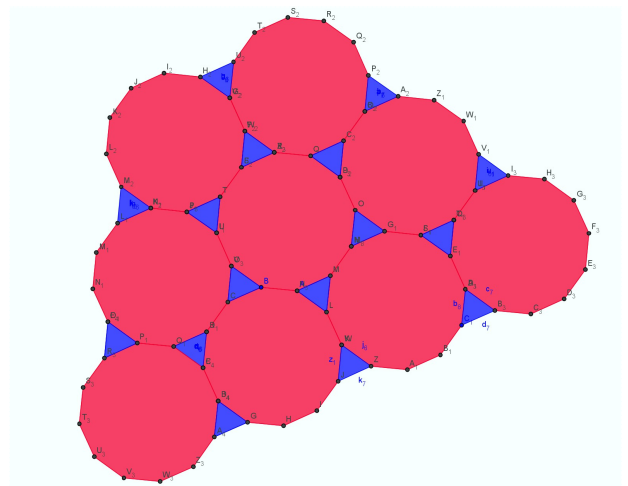
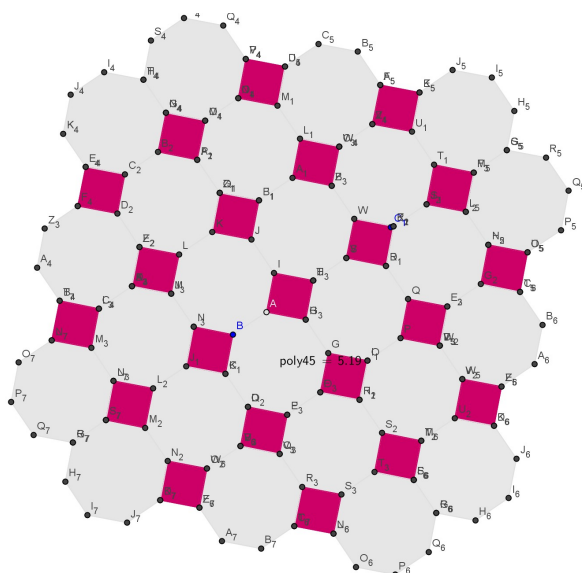
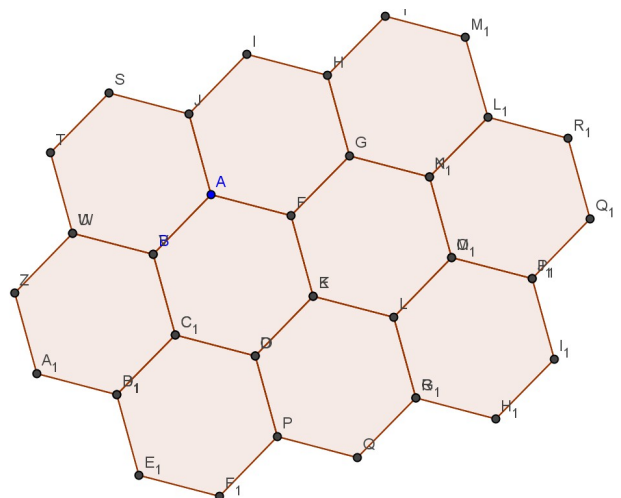
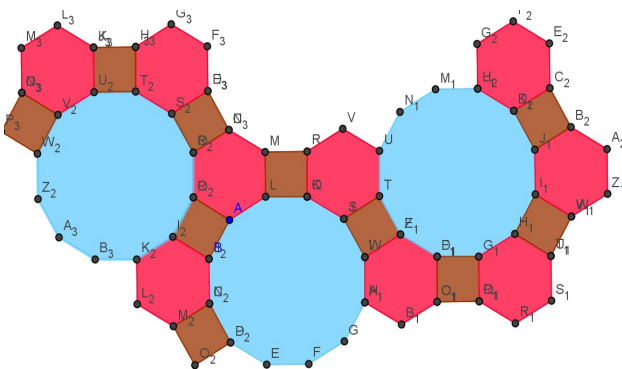
Par exemple, 3-7-42, cela fonctionne en équation mais pas en construction : en effet,

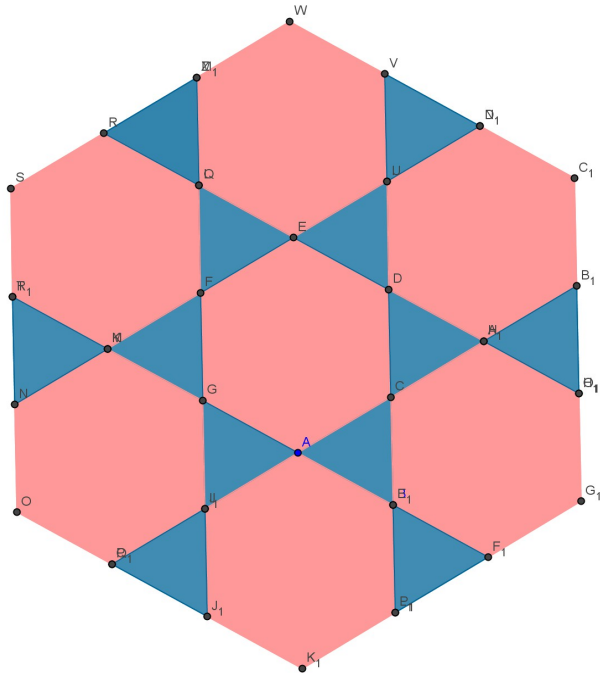
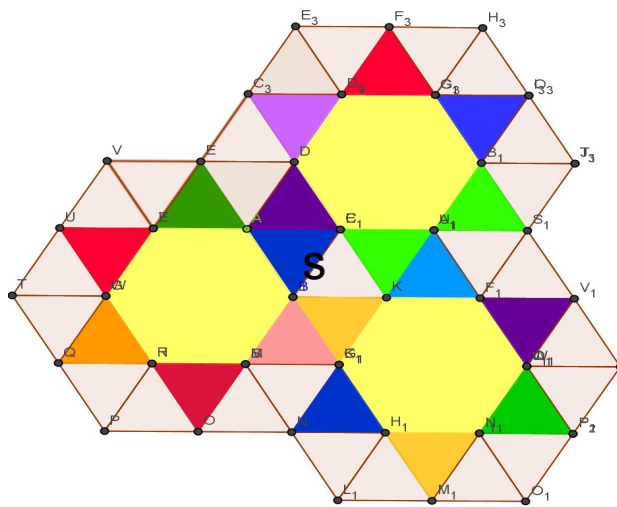
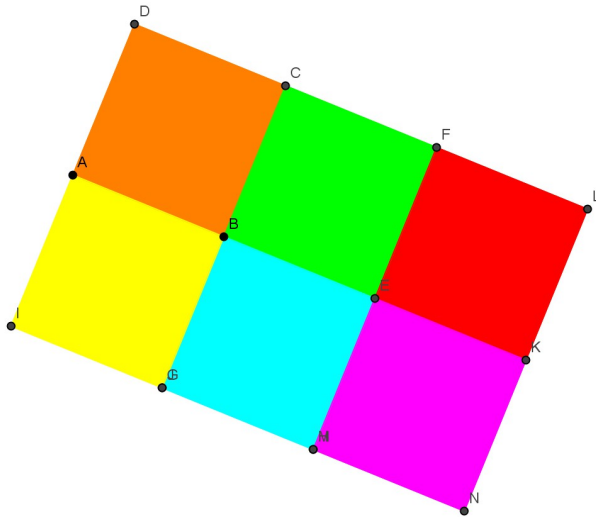
$$\frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{2}{42} = \frac{14}{21} + \frac{6}{21} + \frac{1}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

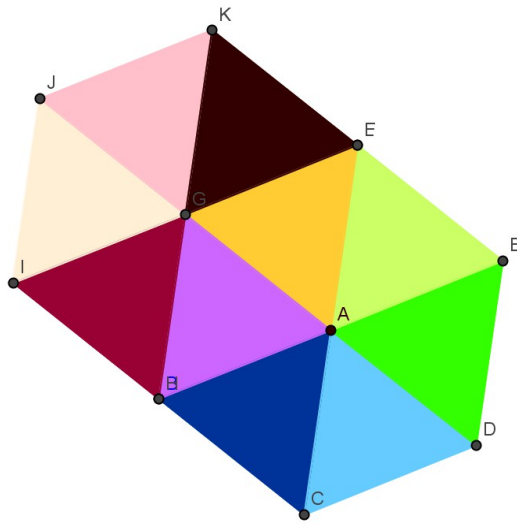
Nous avons trouvé **11 pavages réguliers**, 10 équations. En effet, 1 équation a permis de réaliser 2 pavages. **Les polygones ne sont pas dans le même ordre**. Ce sont les pavages **3-3-4-3-4** et **3-3-3-4-4** qui fonctionnent. (5)

Voici tous les 11 pavages qui fonctionnent :

- Pour 3 polygones qui bordent un sommet (4 pavages) :** 3-12-12 / 4-6-12 / 4-8-8 / 6-6-6
- Pour 4 polygones qui bordent un sommet (3 pavages) :** 3-4-6-4 / 3-6-3-6 / 4-4-4-4
- Pour 5 polygones qui bordent un sommet (3 pavages) :** 3-3-3-3-6 / 3-3-3-4-4 / 3-3-4-3-4
- Pour 6 polygones qui bordent un sommet (1 pavage) :** 3-3-3-3-3-3







Voici tous les pavages non réalisables mais qui fonctionnent avec les équations :

- **3 polygones qui bordent un sommet : 3-7-42 / 3-8-24 / 3-9-18/ 3-10-15 / 4-5-20 / 5-5-10**
- **4 polygones qui bordent un sommet : 3-3-4-12 / 3-3-6-6 / 3-4-3-12 / 3-4-4-6**

3. Le raisonnement par l'absurde

Nous avons dit que nous avons utilisé en grande partie le tableur et géogébra. Nous avons aussi travaillé un raisonnement qui n'est pas au programme du collège, cela s'appelle **le raisonnement par l'absurde**. Pour le cas où il y a 3 polygones autour d'un sommet, M.DUCROT nous a dit que ce serait bien de démontrer que « *au moins un nombre est inférieur ou égal à 6* ». M.SACHOT nous a expliqué le raisonnement par l'absurde sur un autre exemple de géométrie simple et nous avons compris le principe.

En fait, il faut prendre **le contraire de ce que l'on affirme** et finalement trouvé une contradiction, une absurdité.

Ici le contraire est « *tous les nombres sont supérieurs ou égaux à 7* ». Si les nombres sont supérieurs ou égaux à 7, alors pour chaque $\frac{2}{n}$ est inférieur ou égale à $\frac{2}{7}$.

Donc $\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q}$ est inférieur ou égale à $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$ qui est lui même strictement inférieur à 1. Donc $\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q}$ ne pourra jamais être égale à 1 si les 3 nombres entiers sont supérieurs ou égaux à 7.

Donc au moins un des nombres entiers est inférieur ou égal à 6.

Avec ce résultat, cela a permis de réduire les cas à traiter.

Par manque de temps et aussi parce que c'était assez difficile, nous n'avons pas pu faire d'autres démonstrations par l'absurde.

4. Remerciements :

Nous tenons à remercier M.SACHOT pour nous avoir encadré dans cet atelier MATH.en.JEANS , pour nous avoir accompagnés au salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris où nous avons été lauréat du Prix André Parent mention collège 2016. Nous remercions aussi M.DUCROT pour avoir proposé ce sujet et qui a contribué grandement à notre succès en nous aidant et en nous donnant quelques pistes de réflexions.

Notes d'édition :

(1) Rappelons que les deux angles qui ne sont pas obtenus par les deux côtés égaux sont égaux.

(2) Rappelons que l'angle dit « extérieur » est l'un des angles du polygone régulier comme expliquer dans la formule juste après.

(3) Ceci est dû au fait qu'il faut additionner les deux angles précédemment calculés.

(4) Une condition nécessaire signifie qu'un pavage régulier vérifie forcément cette condition mais qu'il peut y avoir des configurations vérifiant cette condition sans être un pavage. Par conséquent, nous pouvons déjà dire que si la condition n'est pas vérifiée alors ce ne sera pas un pavage.

(5) Les élèves ont oublié de préciser ce que signifie cette notation. En fait, chaque polygone régulier est défini de façon unique par son nombre de côté (par exemple 3 pour un triangle équilatéral et un carré sera associé au chiffre 4). À partir de là, nous pouvons donner l'ensemble des configurations autour d'un sommet par des chiffres plutôt que par les noms des polygones. Dans ce cas, 3-3-3-4-3-4 signifie que nous avons 3 triangles équilatéraux côtes à côtes puis un carré, puis un triangle équilatéral et à nouveau un carré. Ce dernier carré touchera alors le premier triangle de la suite des 3 triangles.

Notons que la représentation n'est pas unique puisqu'il est possible de commencer à partir d'un autre polygone. Par exemple, 4-3-4-3-3-3 est équivalent à 3-3-3-4-3-4 ou encore à 3-3-4-3-4-3.