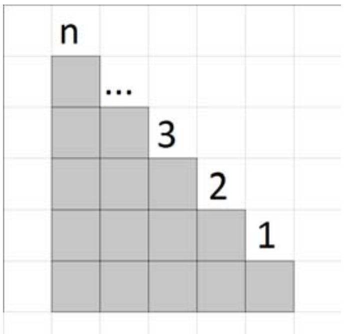
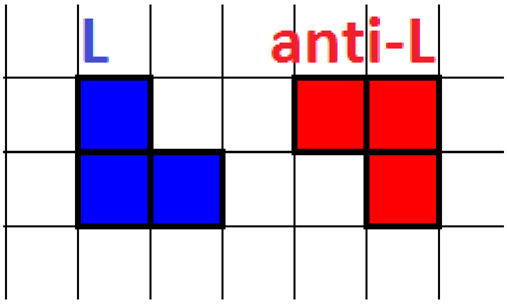
Article sur le pavage en L

Équipe du lycée Victor et Hélène Basch, Rennes :
Guo Alice, Stalin Hugo, Godbillot Faustine
Encadrés par le chercheur Vincent Guirardel (Université de Rennes 1) et Mme Chrystèle Caret, professeur de mathématiques.

I. *Présentation*

Notre problème nous a été présenté par le chercheur Vincent Girardel :
Il s'agissait de « paver » un polygone Δn en escalier de n colonnes et de n lignes avec des blocs « L » ou « anti-L ». Il nous était impossible de les tourner, ils se présentaient donc toujours ainsi :





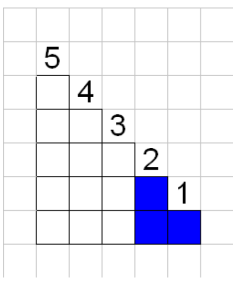
Δn

Notre objectif était de comprendre le mécanisme du pavage en L et ainsi de savoir quels Δn sont pavables ou non.

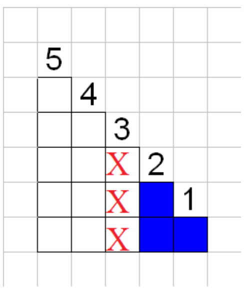
Les questions secondaires étudiées étaient :
- Y a-t-il une infinité de Δn pavables ?
- Y a-t-il une infinité de Δn non-pavables ?
- Que se passe-t-il pour n = 5, 6, 7,8, 10, 11, 12, 13... 100, 101, 102... 2012, 2013, 2014, 2015, 2016... ?

Nous avons donc commencé par paver les plus petits Δn : (1)

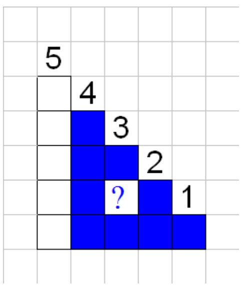
Δ2



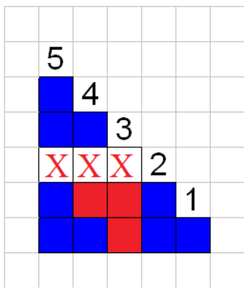
Δ3



Δ4



Δ5

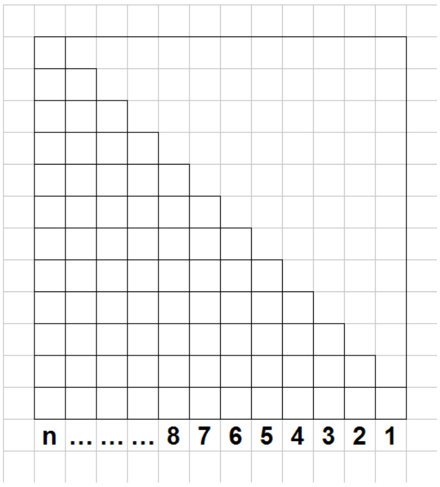


II. 1ère règle : L'aire

En essayant de paver Δ4, nous avons découvert une première règle pour la pavabilité ou la non-pavabilité des différents Δn :

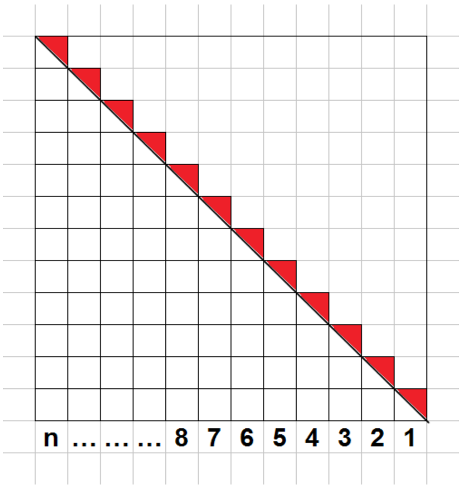
L'aire totale du Δn doit être remplissable par des blocs « L » ou « anti-L » de trois cases ; l'aire totale de Δn doit donc être divisible par 3.

Nous avons calculé l'aire de Δn ainsi :



Nous avons d'abord vu que l'aire du carré de côté n était de n^2 :

Nous l'avons divisé par 2, ce qui donne une aire de $n^2/2$; il ne nous reste que des moitiés de n carreaux :



Il y a n moitiés de carreaux, donc n/2 carreaux en plus ; l'aire totale est donc de $(n^2+n)/2$.

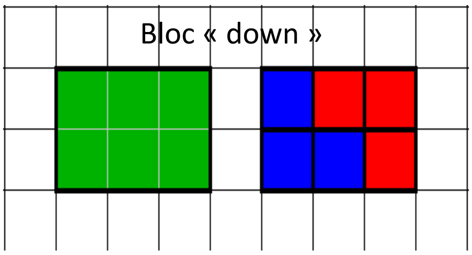
Nous vérifions que cette aire est divisible par 3 ; pour simplifier les vérifications, nous vérifions que $(n^2+n)/6$ est entier.

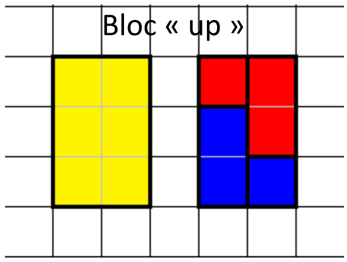
Cette règle élimine donc Δ1, Δ4, Δ7, Δ10, Δ13...
Nous avons supposé que tous les Δ(3k+1) avec k appartenant à $\mathbb{N}$ sont éliminés par cette règle.

III. 2ème règle : l'addition de Δn

a) Colonnes d'up & down

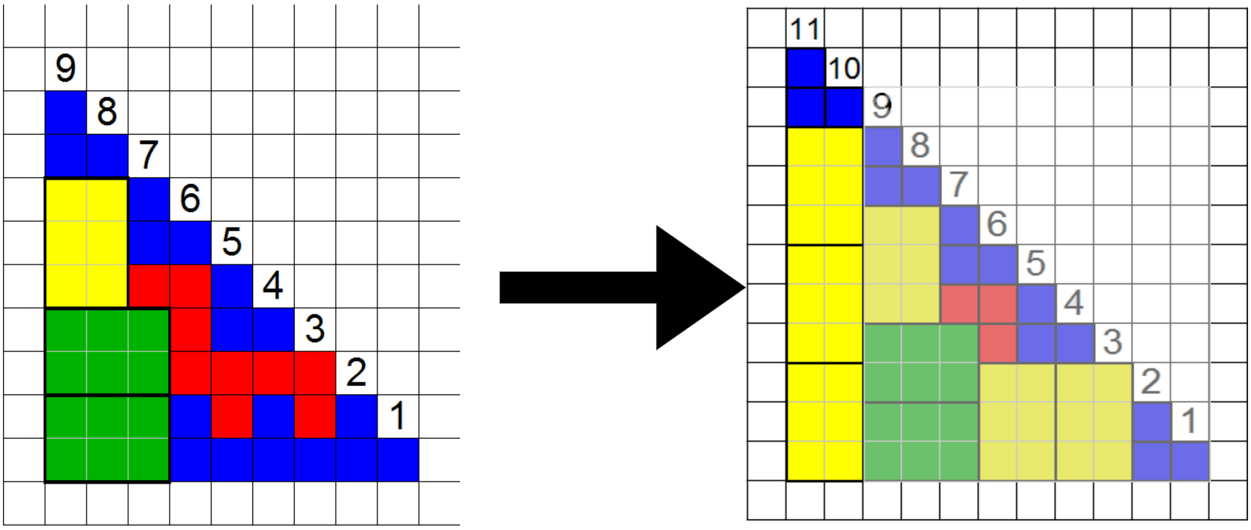
Pour simplifier le pavage, nous avons créé des blocs « up » et des blocs « down ».





Après Δ2, le premier pavable est Δ9. (2)

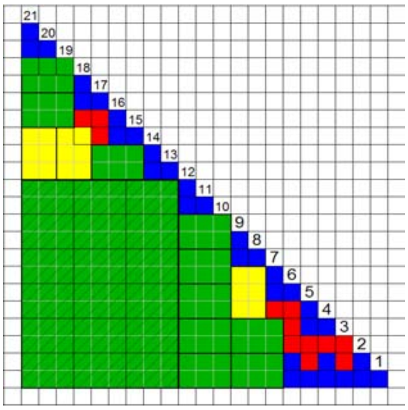
Nous avons pu ajouter au Δ9 une colonne de blocs « up », ou bien une colonne de blocs « down », créant ainsi Δ11 et Δ12 pavables.



b) Additions de Δn

Nous avons ensuite trouvé une autre technique de pavage : en ajoutant Δn et Δn' bout à bout, nous créons un rectangle vide. Si celui-ci a un côté divisible par 2 et un autre par 3, alors ce rectangle peut être rempli par des blocs « up » ou « down ».

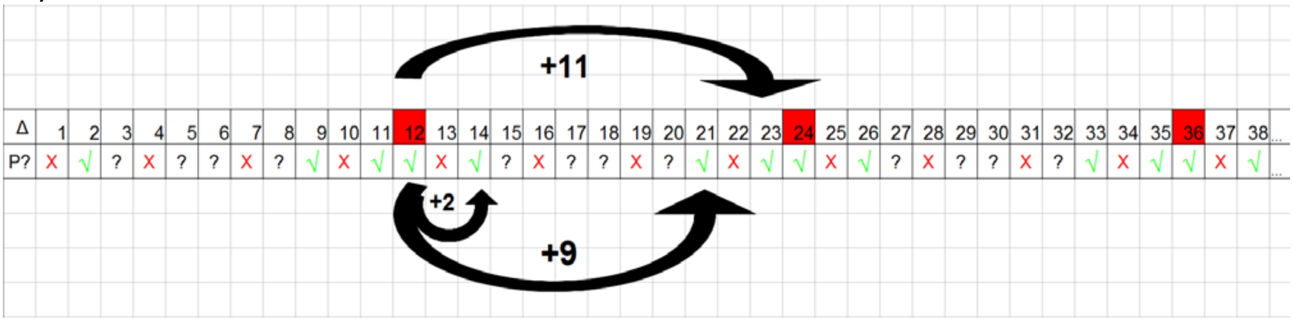
On a besoin aussi que les deux Δn de base soient pavables, et n doit être divisible par 2 ou 3 (si n est divisible par 2, alors n' doit être divisible par 3).



Les premiers Δn pavables de base peuvent donc être : Δ2, Δ9 et Δ12.
Nous pouvons donc paver Δ2+9, Δ12+2, Δ12+9, d'où Δ12+2+9 ou Δ12+11...

IV. La base de 12

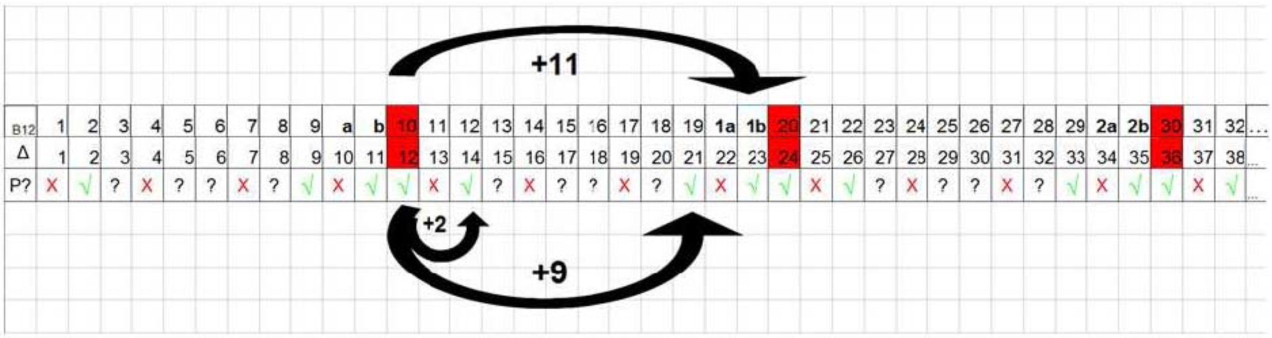
Lorsque nous avons mis tous nos résultats dans un tableau, nous nous sommes rendus compte qu'il y avait un schéma récurrent.



Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P?	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X

Δ	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
P?	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	...

Ce schéma se répétait tous les 12 Δ. En effet, le 12 étant multiple de 2 ET de 3, tous ses multiples sont pavables en répétant la règle d'addition le nombre de fois souhaité ; tous les Δ12k+m avec k appartenant à ℕ et m appartenant à {2,9,11} sont donc pavables.
Nous avons remarqué que cette répétition correspondait à la base de 12 :



B12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P?	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X

B12	18	19	1a	1b	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2a	2b	30	31	32	...
Δ	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
P?	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	...

En effet, on peut voir dans la première ligne de ce tableau qu'en se basant sur une base à 12 chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b), 12k+x finira toujours par le nombre x. Ainsi, nous pouvons plus aisément voir quels nombres sont des Δ12+{2,9,11}, en l'occurrence dans la base de 12 des Δ12+{2,9,b}.

Conclusion :

Nous avons finalement réussi à résoudre deux tiers du problème posé. Les Δ12k + {0,2,9,11} sont pavables et les Δ12k + {1,4,7,10} ne sont pas pavables. Néanmoins le dernier tiers demandant encore de nombreuses heures de recherche, nous n'avons pas été en mesure de démontrer si les Δ12k + {3,5,6,8} sont pavables ou non. Nous pouvons tout du moins conjecturer qu'ils ne le sont pas car Δ3, Δ5, Δ6 et Δ8 ne sont pas pavables. Un chercheur nous a conseillé de nous pencher sur la piste des couleurs ! (affaire à suivre...)

Notes de l'édition

(1) Il s'agit d'essais de pavage. Le pavage est réussi uniquement pour Δ2. Pour mieux comprendre les dessins, il faut comprendre que les cases vides ne font pas partie des Δn étudiés.

(2) Il n'est pas prouvé ici que Δ3, Δ5, Δ6 et Δ8 ne sont pas pavables. Pour Δ3 et Δ5, cela se sent sur les essais de pavages de la première page. Un exemple de pavage de Δ9 est donné dans la figure ci-dessous.