

Pavage du cube

Année 2015- 2016

Prénoms et Noms des élèves, niveaux :

6ème : Adélie SERAFINI, Rosalie SERRE, Romane LOISEAU, Noé TERRON, Milo ALDROVANDI,
Vianney DE LAMARZELLE

5ème : Hanny DAHER HASSAN, Justine CAIRONI, Zoé MAISTRE, Laetitia GOUZOWSKY,
Aurélien THEVENY, Ilan OUZEN, Valentin DURY, Ethan PETREQUIN

3ème : Mathis VIDAL, Alice LAURENDON

Établissement :

Collège des Gratte-Ciel Morice Leroux, Villeurbanne

Enseignantes :

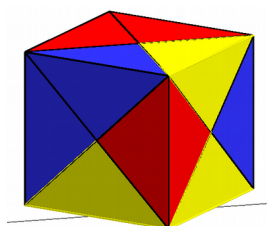
Natalie Jacotey, Christel Bouvier

Chercheurs :

Daniel Hirschkoﬀ, Sebastian Barbieri, Bertrand SIMON, Matthieu ROSENFELD, Simon CASTELLAN
ENS Lyon

Présentation du sujet

Notre problématique : assembler des tuiles pour paver un cube



Sommaire

Partie 1: Définitions et représentation

- I. Les tuiles
- II. Colorier les tuiles avec deux couleurs
- III. Assembler les tuiles
- IV. Les patrons

Partie 2 : Conjectures et résultats obtenus

- I. Pavage du cube de côté 1 avec deux couleurs
- II. Pavage du cube de côté 2 avec deux couleurs
- III. Pavage du pavé 2-1-1 avec deux couleurs
- IV. Pavage du cube de côté 1 avec trois couleurs
- V. Pavage du cube de côté 1 avec des tuiles toutes différentes

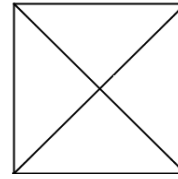
Partie 3 : Illustration avec Scratch

[Lien vers un projet Scratch illustrant notre sujet](#)

Partie 1: Définitions et représentation

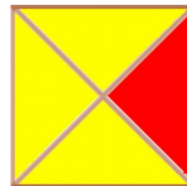
I. Les tuiles

Définition : Une tuile de Wang est un carré dont les diagonales forment quatre triangles.

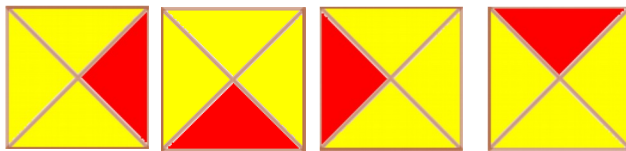


II. Colorier les tuiles avec deux couleurs

Exemple de tuile à deux couleurs :

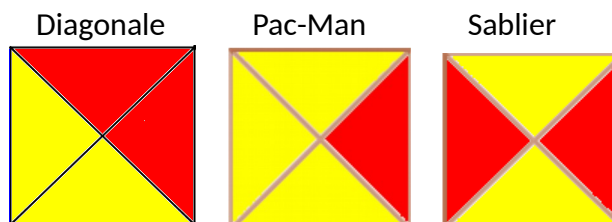


Il est possible de faire des rotations :



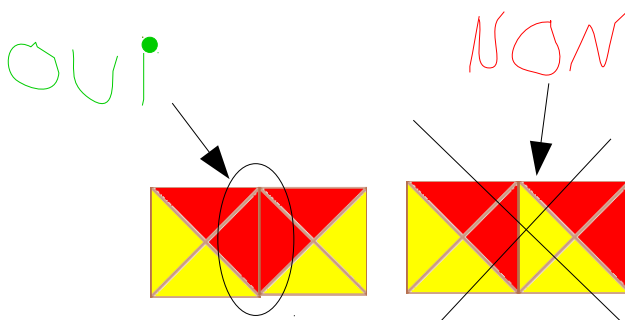
Notations :

Voici les différentes tuiles à deux couleurs, que nous nommerons ainsi :



III. Assembler les tuiles

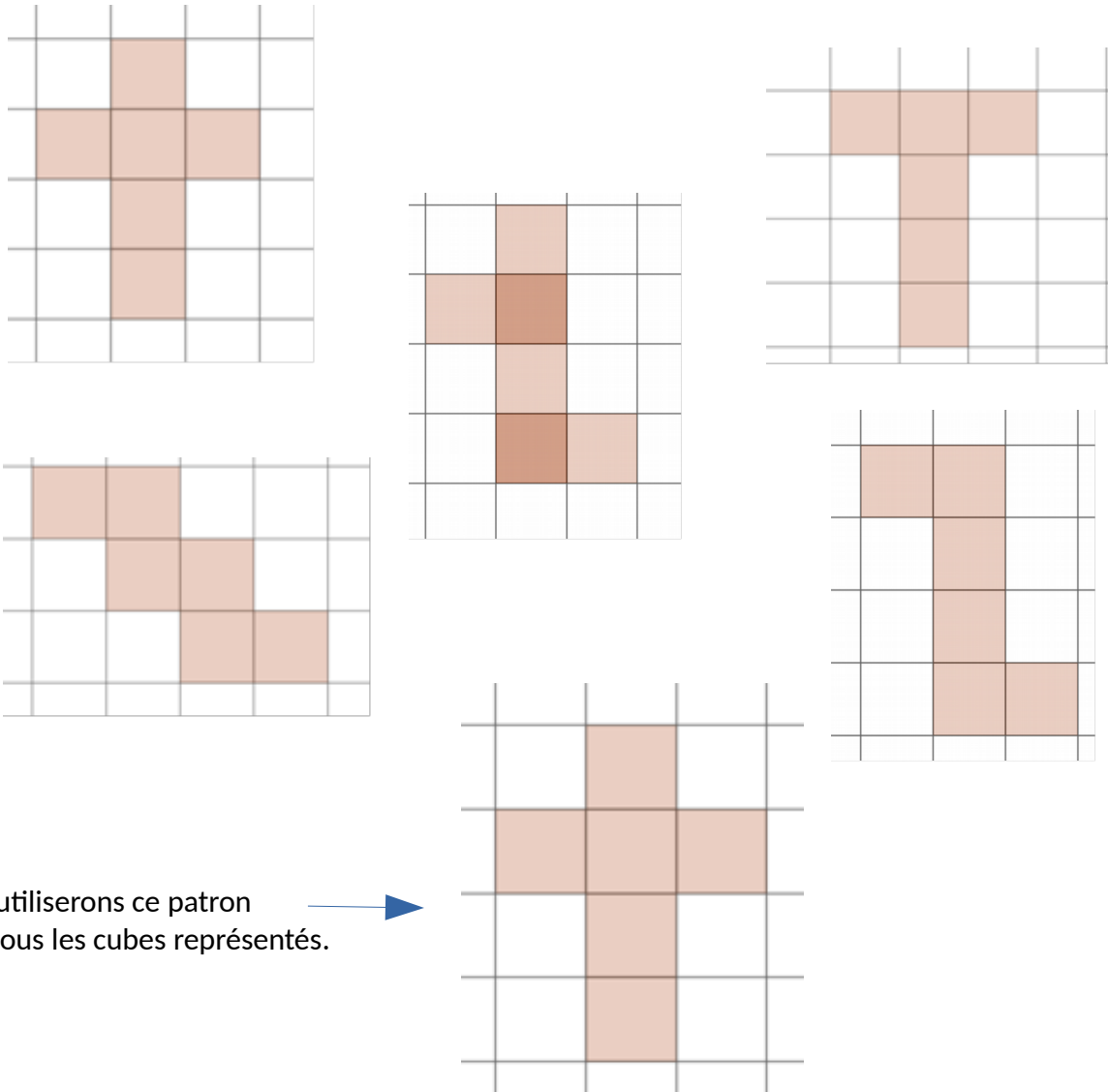
Pour assembler deux tuiles, les deux triangles adjacents doivent avoir la même couleur.



IV- Les patrons

Définition : Un patron permet de représenter un solide à plat

Nous avons trouvé plusieurs patrons pour le cube :

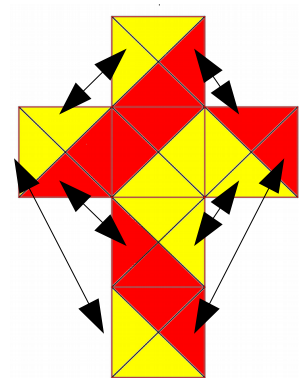


Nous utiliserons ce patron
pour tous les cubes représentés.



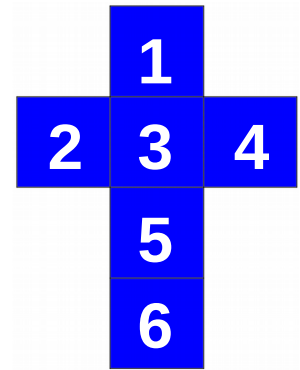
Comment faire pour savoir si un patron est correct ?

Pour savoir si un patron est correct, il faut vérifier
que les triangles adjacents sont de la même couleur.



Combien y a-t-il de patrons différents pour un cube dont les faces sont numérotées? [1]

On considère ce patron d'un cube dont les faces sont numérotées :



Théorème : Il y a 24 patrons différents de ce cube

Preuve :

Pour le démontrer, on regarde la manière dont une face, la face 1 par exemple, peut apparaître sur les différents patrons.

- La tuile 1 peut être tournée de 4 manières différentes .



Haut en haut



Haut à droite

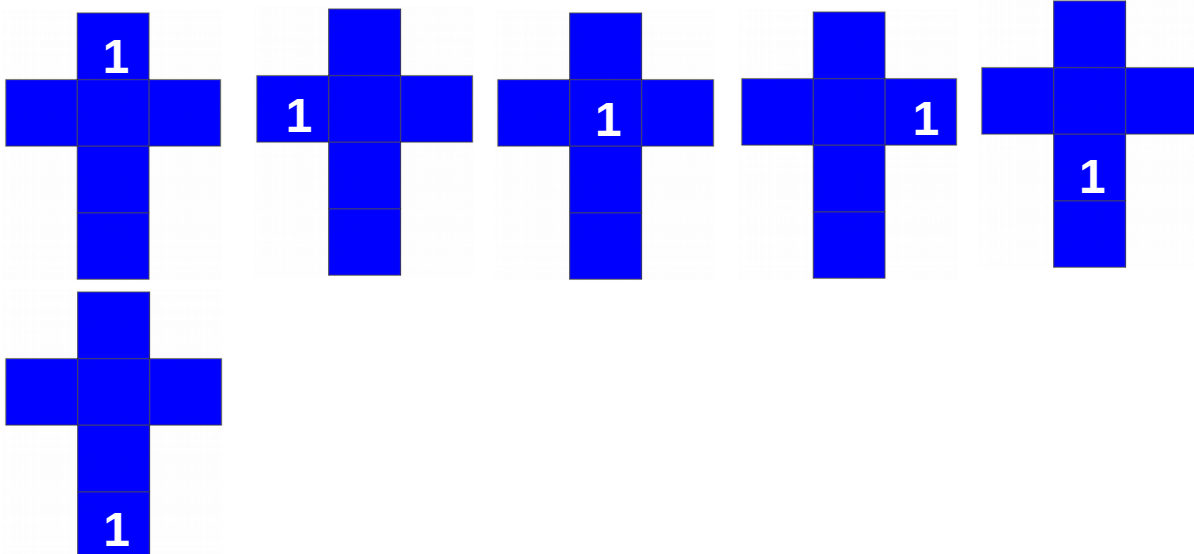


Haut en bas



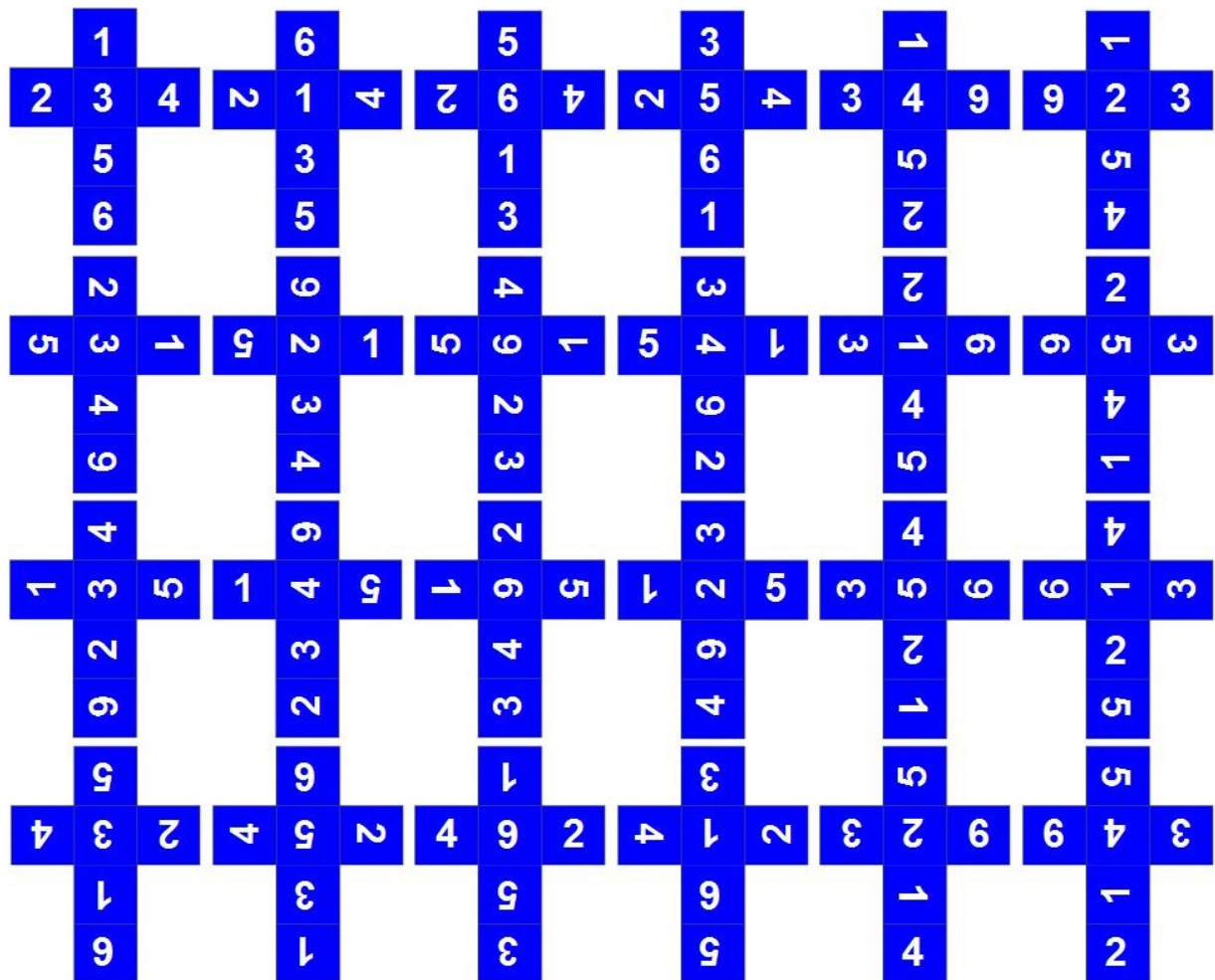
Haut à gauche

- La tuile 1 peut occuper 6 positions différentes sur le patron :



Conclusion : la face portant le numéro 1 pouvant être tournée de 4 manières différentes, à 6 positions différentes, le calcul suivant $6 \times 4 = 24$ donne donc 24 patrons différents.

Voici les 24 patrons différents que l'on peut obtenir :



I. Pavage du cube de côté 1 avec deux couleurs

Théorème : Il est impossible de paver un cube avec la tuile sablier.



Preuve :

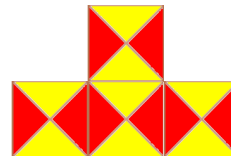
On place une tuile sablier au centre.



On est obligé de placer les deux tuiles adjacentes de façon à ce que les triangles de même couleur se touchent.



Mais quand on place une tuile au-dessus de la première tuile placée, on remarque que c'est impossible car les deux triangles en angle droit ne sont pas de même couleur.

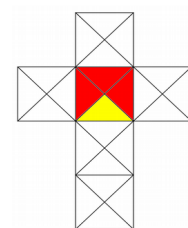


Conclusion : il est impossible de paver un cube avec la tuile sablier uniquement !

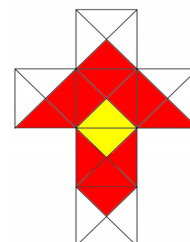
Théorème : Il y a deux cubes différents, et seulement deux, qui puissent être pavés avec la tuile Pac-Man.

Preuve :

Au départ, on place une première tuile sur le patron :

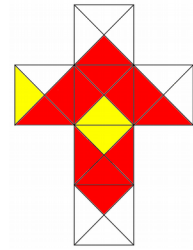


Puis on place les triangles imposés sur les tuiles adjacentes :

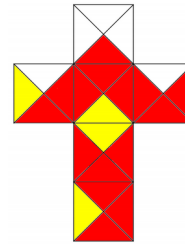


Ensuite, deux choix s'offrent à nous pour placer le triangle jaune : [2]

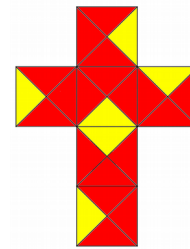
- 1^{er} choix : à l'ouest :



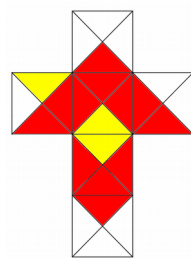
A ce moment-là, le triangle jaune à l'ouest impose le triangle jaune sur la tuile du bas.



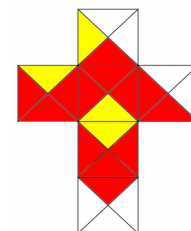
Ensuite, on place le reste des triangles des tuiles et on obtient le patron final avec le 1^{er} choix (ouest) :



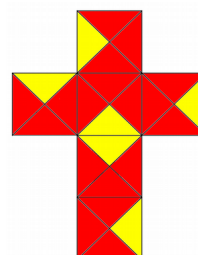
- 2^{ème} choix : au nord:



A ce moment-là, le triangle jaune au nord impose le triangle jaune sur la tuile du haut



Ensuite, on place le reste des triangles des tuiles et on obtient le patron final avec le 2^{ème} choix (nord) :



Nous avons vérifié, en formant les deux cubes correspondant à chaque patron, que ces deux cubes étaient différents.

Conclusion : Il y a deux cubes différents, et seulement deux, qui puissent être pavés avec la tuile Pac-man. [3]

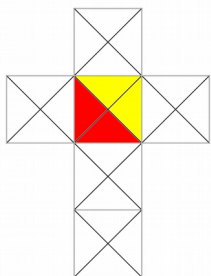
Théorème : Il y a deux cubes différents, et seulement deux, qui puissent être pavés avec la tuile diagonale.

Preuve :

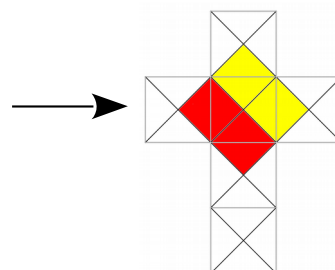
Nous avons essayé de paver un cube avec cette tuile :



Commençons par placer cette tuile au centre du patron.

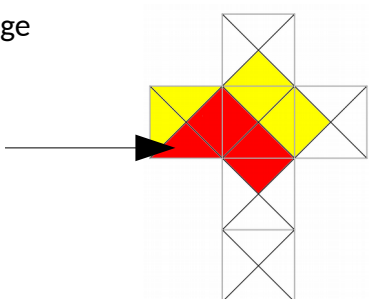


Ce qui nous oblige à placer les triangles adjacents de même couleur

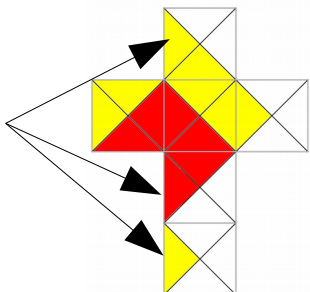


Ensuite, il y a un choix à faire pour placer un triangle rouge sur la tuile de gauche :

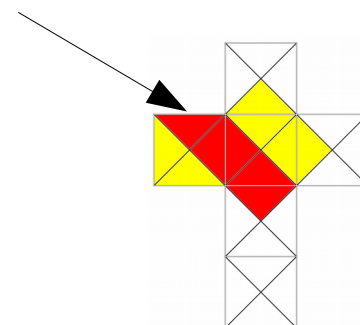
1^{er} choix : le triangle rouge au sud



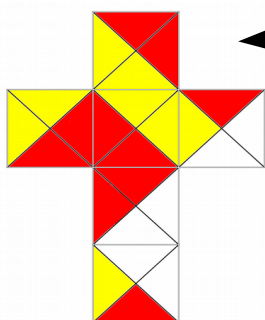
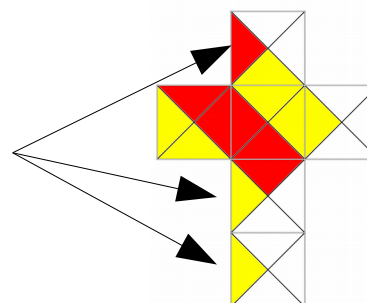
Ce qui nous oblige à placer les triangles adjacents de même couleur



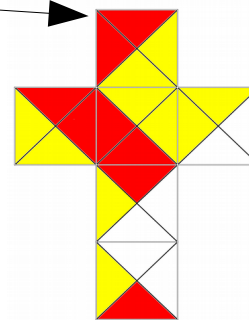
2^{ème} choix : le triangle rouge au nord

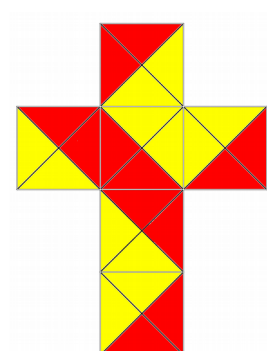
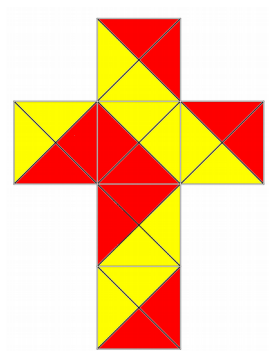


Ce qui nous oblige à placer les triangles adjacents de même couleur



Etant donné que nous ne voulons utiliser que des tuiles diagonales, nous devons obligatoirement mettre les deux triangles rouges à l'opposé des deux jaunes.





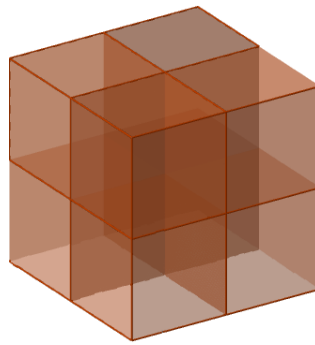
Nous avons vérifié en formant les deux cubes correspondant à chaque patron que les deux cubes étaient différents.

Conclusion :

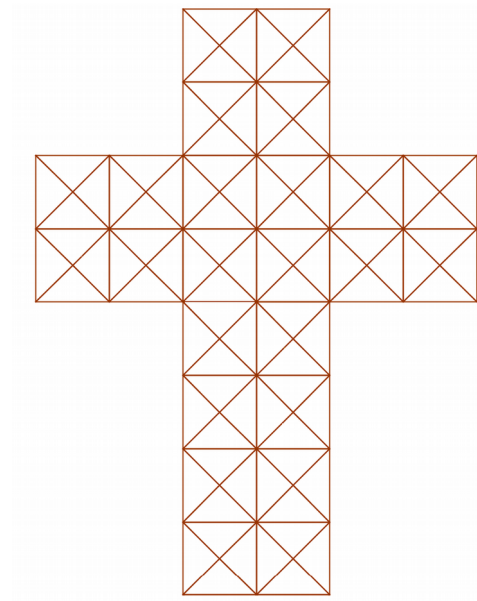
Il y a deux cubes différents, et seulement deux, qui puissent être pavés avec la tuile diagonale.

II. Pavage du cube de côté 2 avec deux couleurs

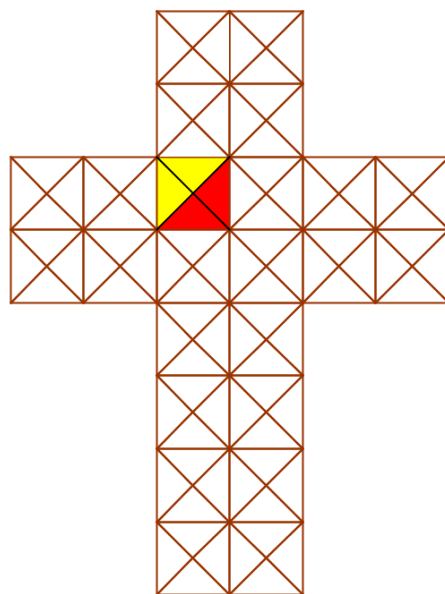
Nous avons travaillé sur le cube de côté 2.



Voici le patron que nous avons choisi d'utiliser, il faut 4 tuiles pour chaque face.

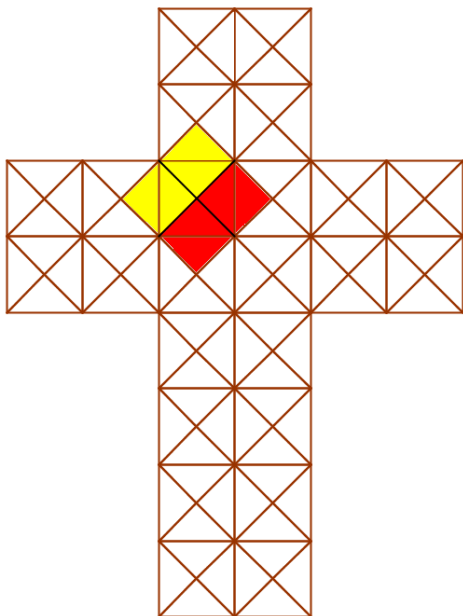


Nous avons choisi de rechercher tous les cubes utilisant la tuile diagonale.

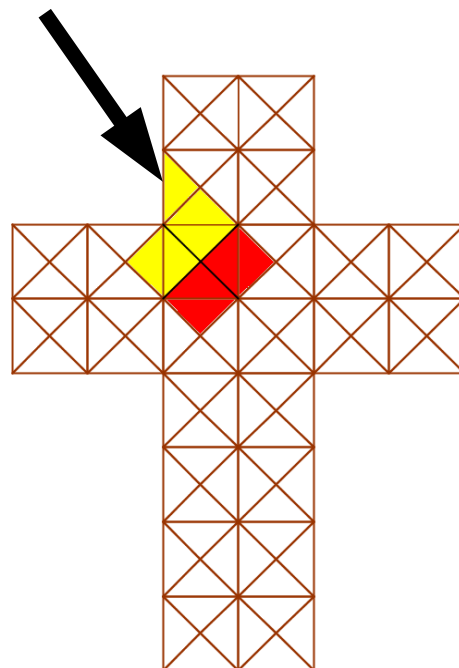


Nous avons fait le choix de fixer la tuile de départ sur la face du milieu en haut à gauche.

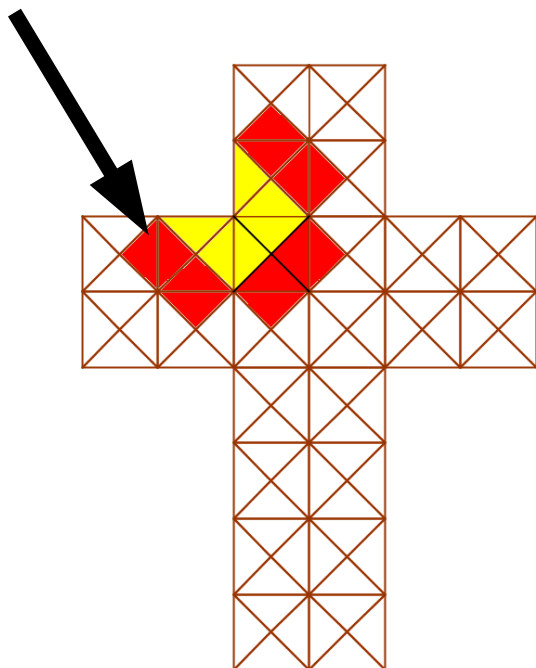
Nous sommes ensuite obligés de mettre de la même couleur les triangles qui se trouvent autour.



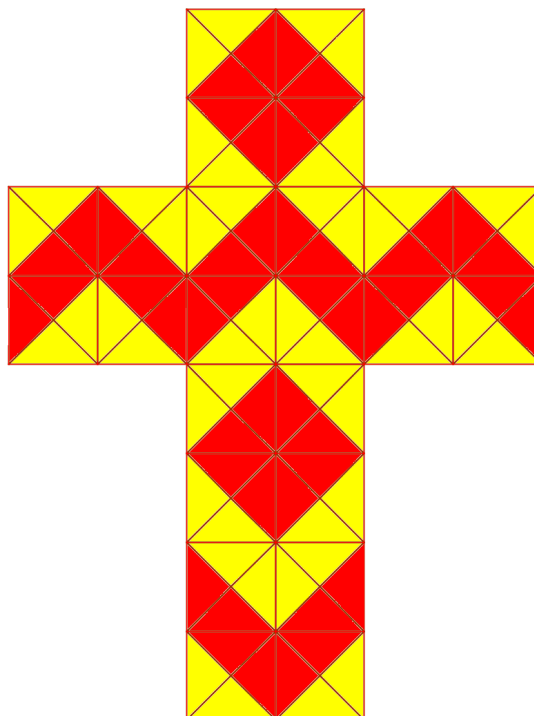
nous avons dû faire un 1^{er} choix : nous avons mis un triangle jaune à l'ouest sur la tuile du haut.



Nous avons complété jusqu'à ce qu'il y ait un 2^{ème} choix à faire : nous avons choisi de mettre un triangle rouge à l'ouest sur la tuile tout en haut à gauche.



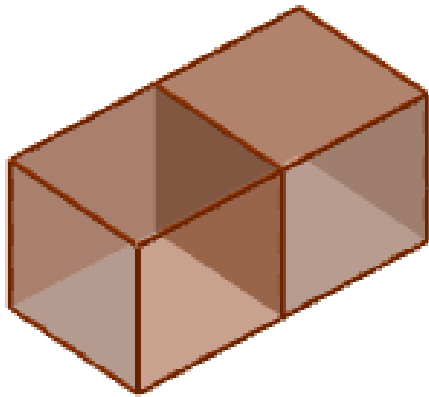
Et ainsi de suite jusqu'à la fin.



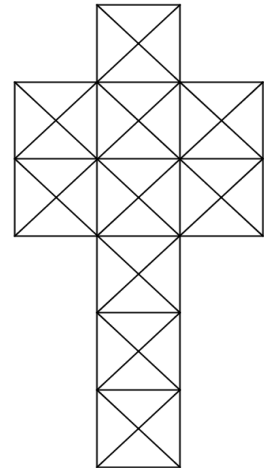
De cette manière, nous avons trouvé 8 patrons qui donnent 8 cubes différents.

II. Pavage du pavé 2-1-1 avec deux couleurs

1. Le pavé formé avec deux cubes



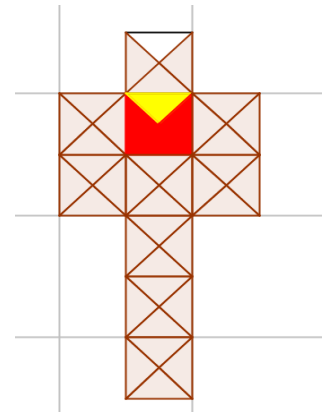
Voici un patron :



Théorème : Il y a 5 pavés différents, et seulement 5, utilisant la tuile Pac-Man.

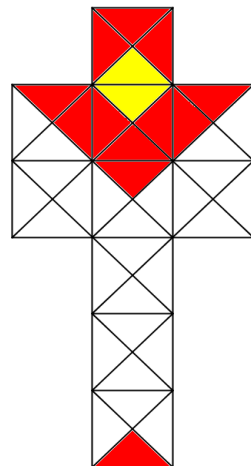
Preuve:

Au départ nous avons fixé une tuile Pac-Man sur le pavé.



Cela impose les couleurs des triangles adjacents :

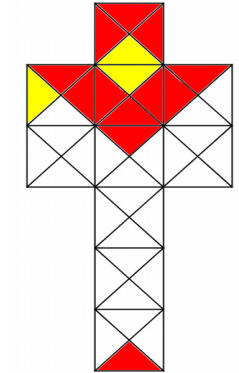
la tuile jaune du haut impose la couleur rouge des triangles adjacents et donc aussi la couleur de la tuile du bas qui touche la tuile du haut.



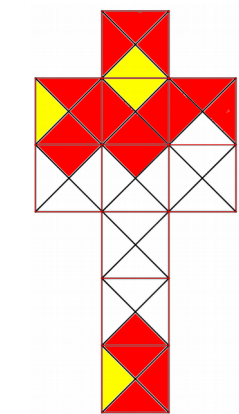
A ce moment-là, il y a un choix à faire.

Ce choix sera fait sur une des tuiles sur la gauche du patron.

1^{er} choix : nous plaçons le triangle jaune à l'ouest de la tuile de gauche,
(tous les patrons ainsi obtenus formeront **la famille des patrons A**) :

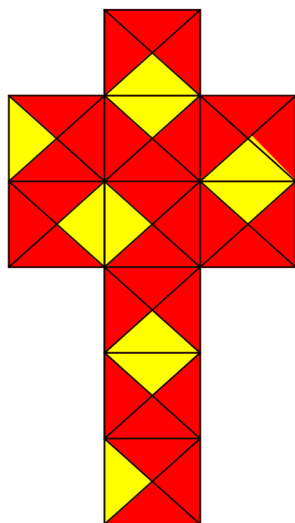


Cela impose un triangle rouge sur la tuile de gauche et
un triangle jaune sur la tuile du bas, qui va imposer à son tour
la couleur rouge aux triangles adjacents et sur la tuile en haut à droite :

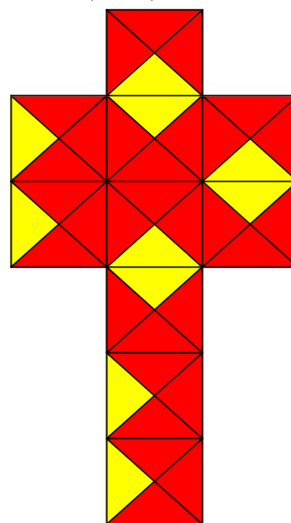


Par la suite, nous aurons de nouveau un choix à faire, et nous obtenons finalement 2 patrons A différents.

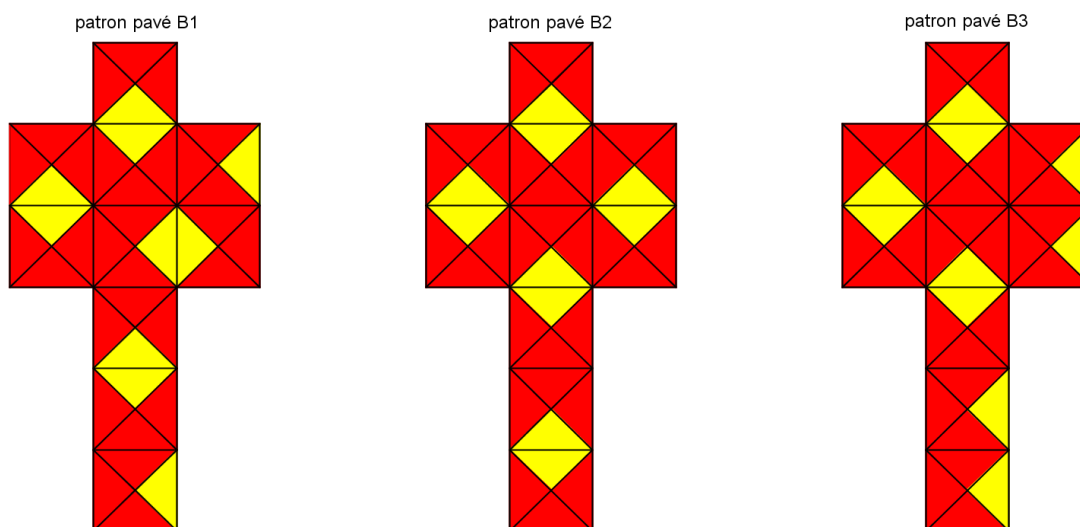
patron pavé A1



patron pavé A2



Nous avons utilisé le même principe pour le 2nd choix (c'est la famille des patrons B), ce qui va donner ces trois patrons :



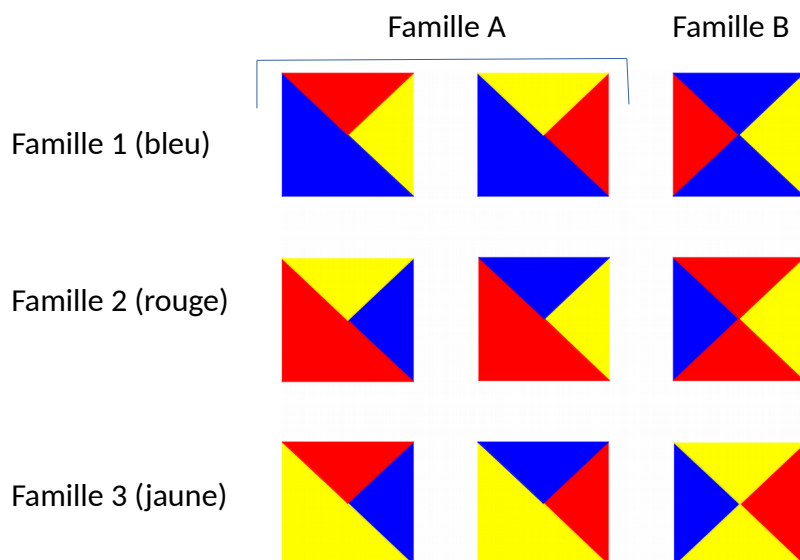
Nous avons vérifié que les pavés obtenus étaient tous différents.

Conclusion :

Il y a cinq pavés différents, et seulement cinq, qui puissent être pavés avec la tuile pac-man.

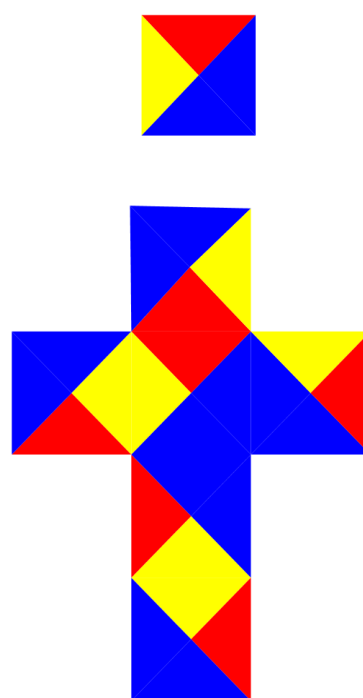
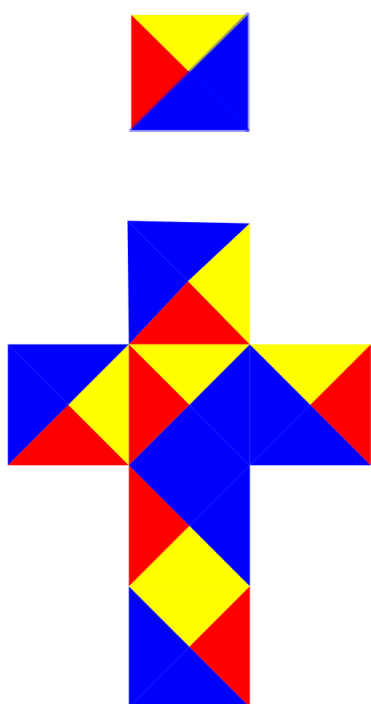
IV. Pavage du cube avec trois couleurs

Nous avons trouvé 9 tuiles différents à 3 couleurs que l'on a organisé en plusieurs familles : [4]



Il y a les familles (horizontales) par couleur et il y a les familles que l'on distingue grâce à position des deux triangles de même couleur : dans la famille A, les triangles de même couleur se touchent tandis que dans la famille B (les tuiles sablier) ils ne se touchent pas.

Remarque : Sur chacune des lignes, les deux tuiles de la famille A sont différentes car selon que l'on place l'une ou l'autre de ces tuiles en position centrale sur les deux patrons ci-dessous, on obtient un patron faux à gauche et un patron juste à droite.

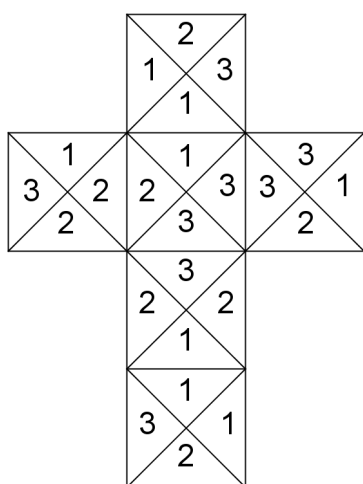


Pavage du cube avec des chiffres

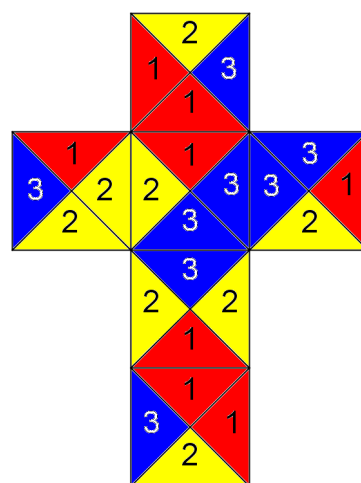
Nous avons essayé de remplir le cube autrement qu'avec des couleurs, nous avons alors pensé à une autre technique : remplir le cube avec des chiffres qui seraient remplaçables par des couleurs, prédéfinies ou non.

Exemple :

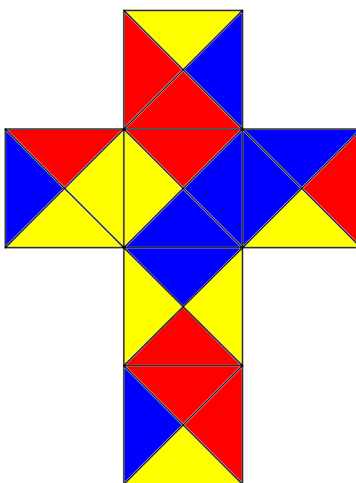
Prenons ce patron
codifié avec des
chiffres.



En prédéfinissant les
couleurs (1 = rouge ;
2 = jaune ; 3 = bleu),
nous obtenons ce
patron, ce qui revient
exactement au
même.

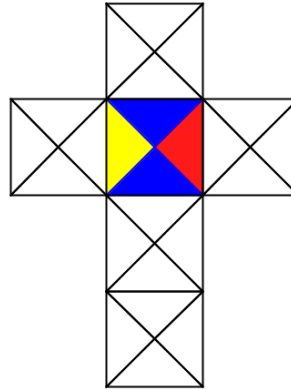


Voici ce patron
avec uniquement
des couleurs.

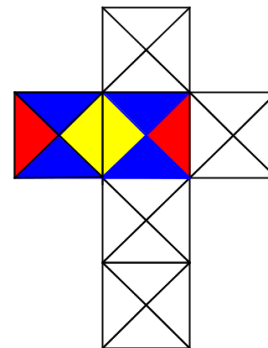


Théorème : On ne peut pas paver un cube avec une des trois tuiles sablier.

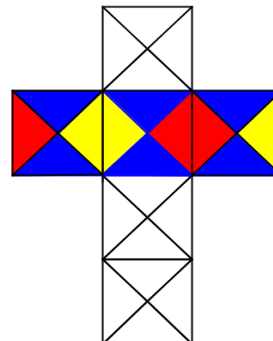
Preuve : On prend la tuile sablier de la famille 1 par exemple, que l'on va placer au centre du patron.



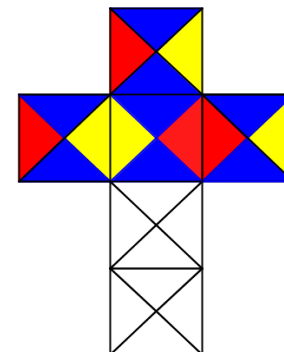
On n'a pas le choix, on doit placer à la gauche de la tuile centrale un autre sablier de la famille 1.



Là non plus, on n'a pas le choix, on doit placer à la droite de la tuile centrale un autre sablier de la famille 1.



On remarque, qu'il y aura un problème.
Si on ajoute une tuile au-dessus de la tuile centrale, ROUGE touchera BLEU et JAUNE touchera BLEU.



Le raisonnement est le même avec les tuiles sablier de la famille 2 ou de la famille 3.

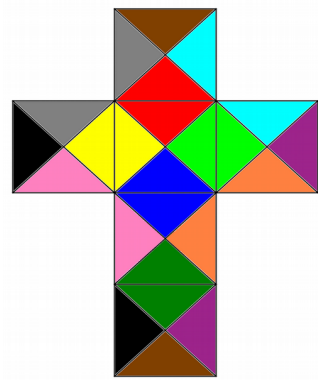
Conclusion : on ne peut donc pas paver le cube uniquement avec une des trois tuiles sablier.

V. Pavage du cube de côté 1 avec des tuiles toutes différentes

1. Première problématique : comment paver un cube avec des tuiles toutes différentes ?

On peut utiliser 12 couleurs : on fixe une couleur différente pour chacune des 12 arêtes.

On obtient un patron tel que celui-ci :



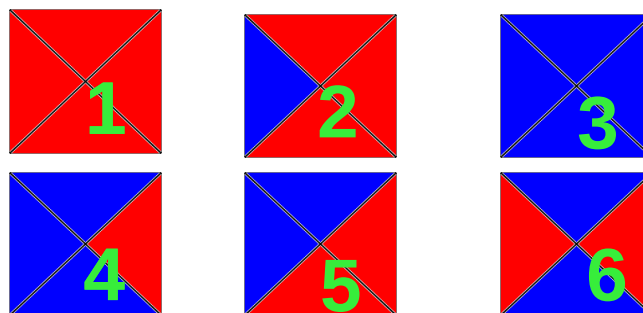
2. Deuxième problématique : combien de couleurs différentes faut-il au minimum pour paver un cube uniquement avec des tuiles toutes différentes ?

a. Avec 1 seule couleur :

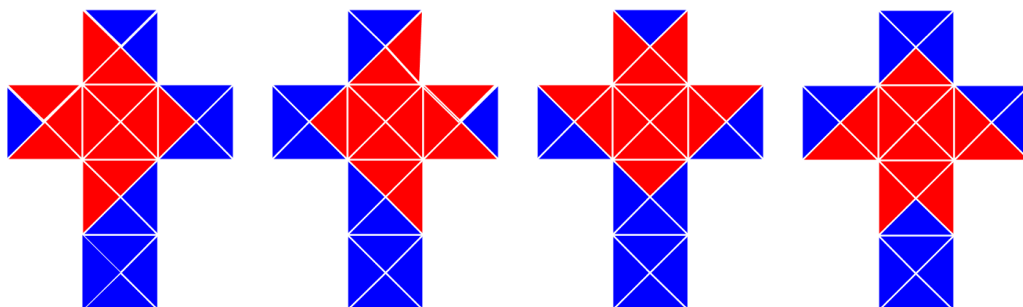
C'est impossible car les tuiles seront forcément identiques puisqu'il n'y a qu'une seule couleur

b. Avec 2 couleurs :

Nous avons remarqué que l'on pouvait faire 6 tuiles différentes avec deux couleurs. Pour paver un cube avec les 6 tuiles, il y aura forcément une tuile sur chacune des 6 faces.



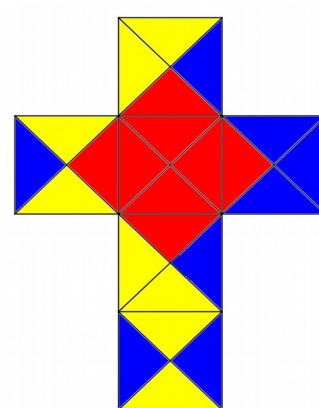
Mais cela est impossible car, en fixant la tuile rouge au centre et en étudiant toutes les possibilités pour faire un patron correct, on se rend compte qu'il y aura toujours 2 tuiles diagonales sur chaque patron.



c. Avec 3 couleurs :

Nous avons trouvé un exemple qui convient,

les tuiles sont toutes différentes :



Conclusion : Trois couleurs sont nécessaires et suffisantes pour paver un cube avec des tuiles qui sont toutes différentes.

Partie 3 : Illustration avec Scratch

Nous avons réalisé un programme avec Scratch pour illustrer ce que nous vous expliquons et pour tester les possibilités de pavage.

Il est possible également de créer ses propres patrons.

Cliquez ici pour accéder au site :

<https://scratch.mit.edu/projects/107032285/>

Merci de votre lecture.

Notes d'édition :

[1] Les auteurs se demandent ici combien de façons il y a de coller un patron en forme de croix sur un cube donné. Ils remarquent qu'il suffit de déterminer sur quelle case du patron on pose la face n°1 du cube, et dans quelle orientation elle est posée. Une fois ceci fixé, il y a une seule façon de poser le patron sur le cube.

[2] On cherche ici à remplir la case à gauche de la case centrale ; la seule chose à déterminer est la place de la partie jaune de la tuile.

[3] On aurait aussi pu placer la première tuile sur la case centrale avec une autre orientation ; est-ce que l'on aurait obtenu des cubes différents ? Cette question se posera plusieurs fois au cours de cet article, où le rôle de l'orientation des tuiles n'est pas toujours clairement décrit.

[4] Précisons que la première et la deuxième tuile d'une ligne sont considérées comme différentes l'une de l'autre car on ne peut pas passer de l'une à l'autre par une rotation (on s'interdit de retourner une tuile).