Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Des particules qui s'agglutinent

Année 2018-2019

Adélie BENHAIM et Jules BIOULAC (2e), Nathan DOBOL et Grégoire FERTON (3e),
Rosalie HAZAN (3e, Collège Pierre de Ronsard)

Établissement : Lycée Carnot (Paris)

Professeurs : Philippe PAUL et Ariane MARTIN

Chercheur : Amic FROUVELLE (Université Paris-Dauphine)

Sommaire

1. Présentation du sujet ... 1
2. Exemples avec quatre points ... 2
  2.1. Exemple en quatre coups ... 2
  2.2. Exemple en cinq coups ... 4
3. Statistiques avec quatre points ... 5
4. Trois points ... 6
5. Centre de gravité ... 8
6. Conclusion ... 9
7. Annexe ... 10

Notes d'édition ... 11

1. Présentation du sujet

L'expérience « Des particules qui s'agglutinent » consiste à choisir un nombre défini de «particules» (2/3/4/5…) placées sur un plan de façon aléatoire.

Une fois cela fait, chaque seconde les deux particules les plus éloignées, se regroupent au milieu du segment formé par celles-ci. Les particules regroupées restent néanmoins des particules distinctes, ce qui veut dire que, si plus tard, ces particules regroupées se retrouvent à former la plus grande distance avec une autre particule l'une des deux appliquera la règle et ira au milieu du segment formé avec la troisième particule et l'autre restera à sa place. Si dans une situation, plusieurs particules se retrouvent à la même distance les unes des autres, alors on choisit une des paires aléatoirement. Ces actions se répètent jusqu'à ce que toutes les particules se rassemblent en un seul et même point, ou que celles-ci se soient rapprochées après un grand nombre d'étapes.

L'expérience « Des particules qui s'agglutinent » a donc pour objectif l'observation et la compréhension du comportement de ces particules au bout d'un temps plus ou moins long.

2. Exemples avec quatre points

2.1. Exemple en quatre coups

Afin de mieux comprendre le principe, nous allons observer un exemple avec quatre points. Pour commencer, nous disposons quatre points de manière aléatoire sur un plan (Figure 1).

Figure 1 : Exemple en quatre coups : état initial

Par la suite, nous allons prendre les deux points les plus éloignés l'un de l'autre et nous les regroupons au milieu du segment qu'ils forment (Figure 2). On se retrouve donc avec deux points de mêmes coordonnées. Pour mieux visualiser ce qu'il se passe, nous représentons dans cet exemple les points regroupés par deux points côte à côte bien qu'ils soient en réalité aux mêmes coordonnées.

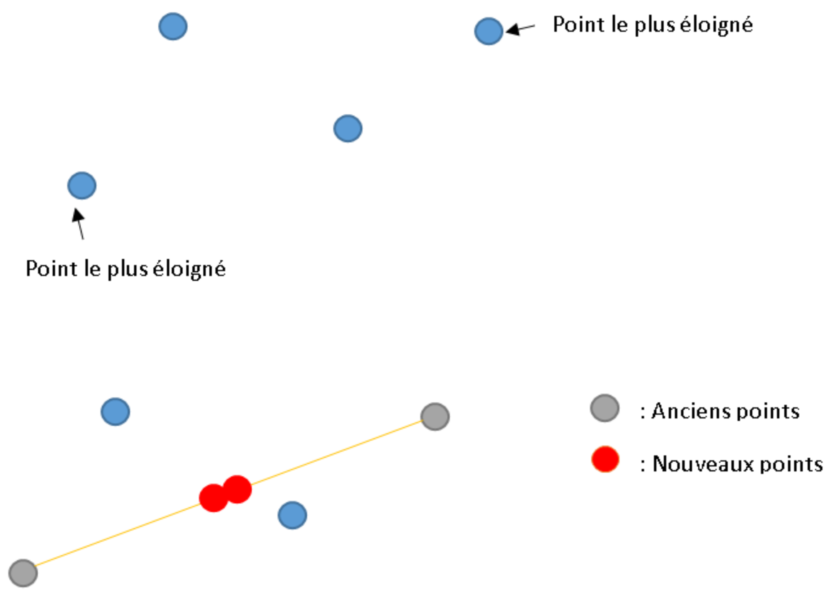


Figure 2 : Exemple en quatre coups : étape 1

Après cela, on recommence ce que l'on vient de faire, on reprend les deux points les plus éloignés et on les regroupe au milieu du segment qu'ils forment (Figure 3).

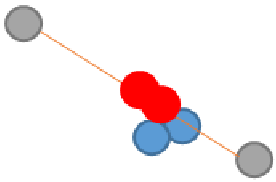


Figure 3 : Exemple en quatre coups : étape 2

Puis on répète ce que l'on vient de faire jusqu'à ce que les quatre points se trouvent tous en un point de même coordonnée (Figure 4). Pour les étapes suivantes, nous agrandissons l'échelle afin que ce soit plus compréhensible.

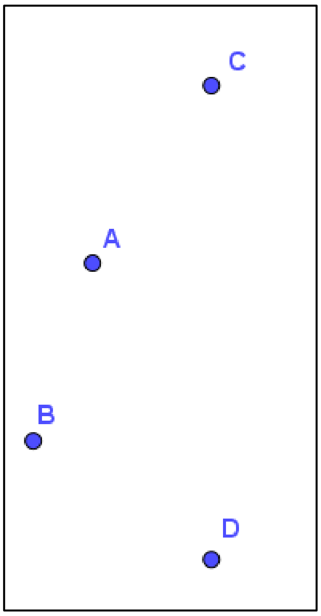
Figure 4 : Exemple en quatre coups : étape 3 et 4

On peut remarquer qu'après cela, les quatre points se retrouvent au même endroit. Par conséquent, ils ont tous les mêmes coordonnées. Donc une fois arrivé à cette étape, nous comptons le nombre de coups qu'il nous a fallu pour arriver à ce résultat. Ici, nous avons fini l'expérience en quatre coups.

Seulement, le nombre de coups utilisés est relatif au nombre de points choisi au début de l'expérience et de leur position, comme vous allez le voir ci-dessous. Dans la suite de cet article, pour des soucis de lecture, les points de mêmes coordonnées sont représentés par un seul et unique point.

2.2. Exemple en cinq coups

Lorsque l'on réalise l'expérience avec quatre points au départ de la manière suivante :



Points bleus : un point

Points rouges : deux points superposés

Points verts : quatre points superposés

Points bleu clair : positions initiales (point fictif)

Figure 5 : position initiale des points

Pour cette résolution, nous notons les positions initiales des points en bleu clair, ces points n'interviennent pas dans la résolution. Ils sont uniquement représentés à titre indicatif afin de visualiser la position des points à l'étape finale par rapport aux positions initiales.

Ces derniers ne se rassemblent que cinq coups plus tard (Figure 6) :

- A l'étape 1 : les points C et D sont les plus éloignés et se rapprochent ;
- A l'étape 2 : ce sont les points B et C qui se rassemblent ;
- A l'étape 3 : les points A et D se rapprochent ;
- Aux étapes 4 et 5 : les points A et B puis que les points C et D se regroupent en un point final.

Nous pouvons donc en déduire que dans certains cas, le nombre d'itérations peut être supérieur à quatre.

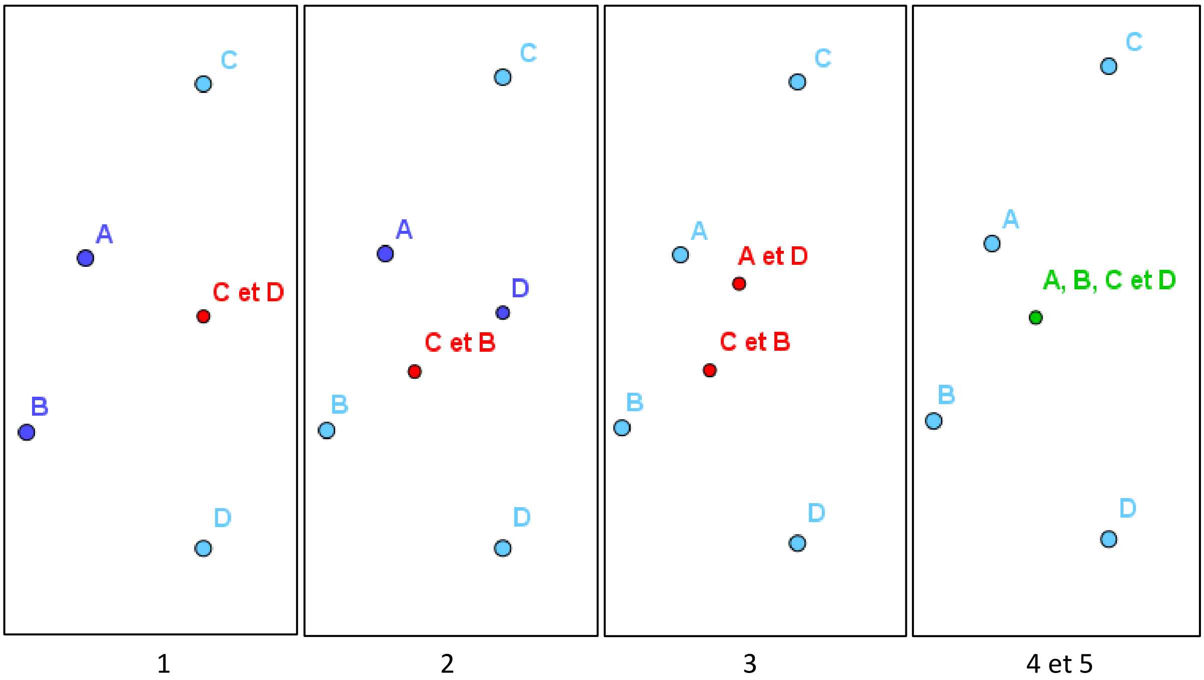


Figure 6 : Résolution en cinq coups du cas de la *Figure 5*

3. Statistiques avec quatre points

Pour montrer que le nombre de coups n'est pas toujours le même, nous avons écrit un algorithme qui simule plusieurs fois un cas de figure avec quatre points et qui compte le nombre de coups que cela a pris pour que les points se rassemblent.
Voici le résultat sous forme de graphique (Figure 7) en fonction du nombre de coups nécessaires pour 10 000 simulations (1).

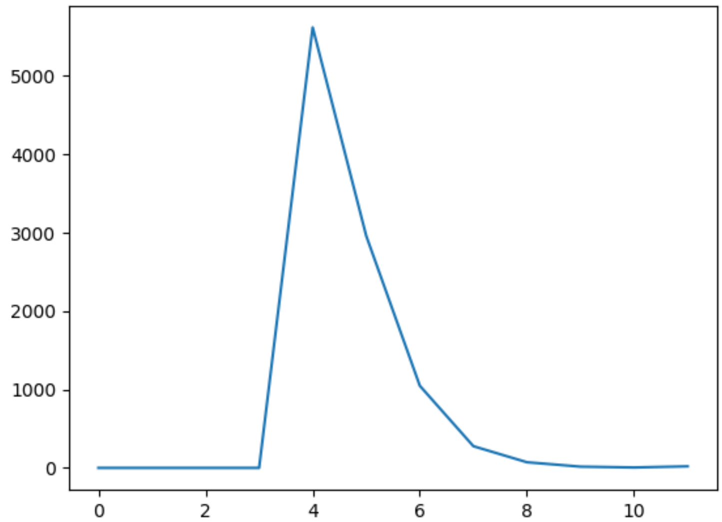
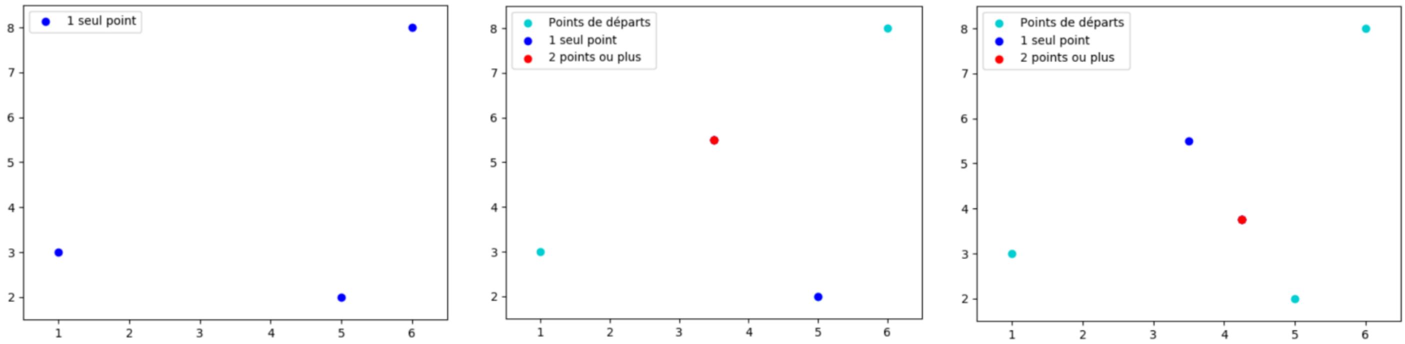


Figure 7 : Graphique du nombre de cas en fonction du nombre de coups nécessaires

On y voit que, malgré certains cas où le nombre de coups peut dépasser parfois 10, il est surtout compris entre 4 et 6 avec une forte présence de 4.

4. Trois points

Nous allons maintenant voir le cas dans lequel nous prenons trois points au début.



1-Position de départ des trois points qui serviront d'exemple
2-Les trois points forment un segment après une itération
3-Le segment reste mais il est plus petit et inversé

Figure 8 : Exemple à trois points

Après une itération, les points vont, dans tous les cas, former un segment composé d'un point d'un côté et de deux points de l'autre car les deux les plus éloignés se seront rassemblés en leur milieu.

A l'itération suivante, on remarque qu'on obtient un nouveau segment deux fois plus petit que l'ancien et que le sommet avec les deux points a changé de côté.

On peut continuer avec autant d'itérations que l'on souhaite, mais on trouvera toujours un segment ayant un point à une extrémité et deux points à l'autre.
Par conséquent, lorsque l'on prend trois points au début, la longueur, qui dépend du nombre d'itérations, est divisée par deux à chaque itération, donc les points seront de plus en plus proches, mais les points ne seront jamais confondus sauf dans les deux cas particuliers suivants :

- Lorsque l'on prend trois points alignés dont l'un est à égale distance des deux autres. Cela fait qu'après une itération, les deux points les plus éloignés se rassemblent là où se situe déjà l'autre point (Figure 9).
- Et lorsque les trois points sont dès le début à la même position, ce qui fait qu'ils ne bougeront pas et resteront aux mêmes coordonnées (Figure 10).

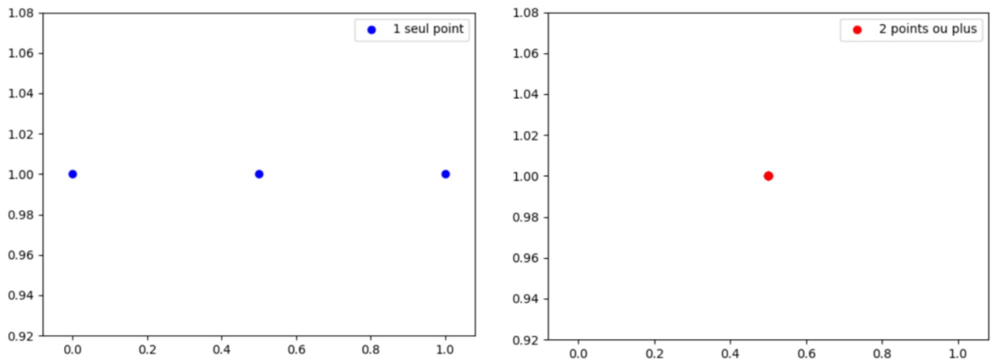


Figure 9 : Cas particulier de trois points alignés avec un point au milieu des deux autres

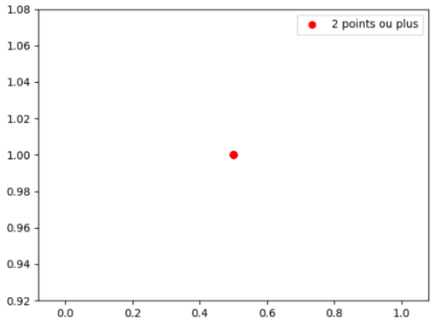


Figure 10 : Cas particulier de trois points superposés

Nous allons maintenant nous intéresser à l'endroit vers lequel les points vont tendre à se rapprocher. Pour cela, nous allons regarder les coordonnées des deux points qui se superposent par rapport au premier segment formé (après la première itération) qui correspond donc à une médiane du triangle car il rejoint un sommet (extrémité où il y a un point) et le milieu du côté opposé (extrémité où il y a deux points).

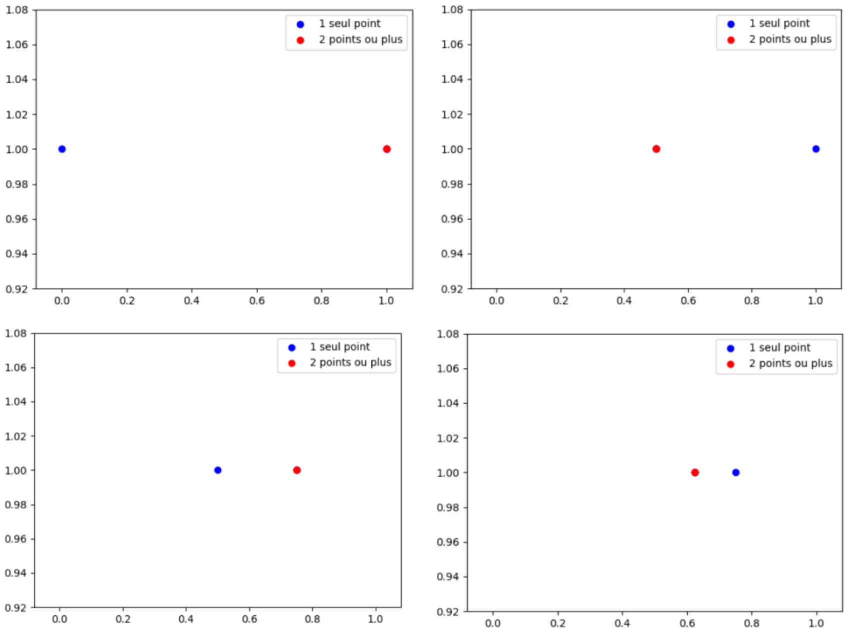


Figure 11 : Exemple de résolution après la première itération

Nous avons un segment qui possède un point à son sommet gauche et deux à son sommet droit

Le point seul va se rassembler avec un des deux autres points au milieu de ce segment.

On remarque que si on s'intéresse aux coordonnées du double point, on obtient :

1 0.5 0.75 0.625

Cela peut se transformer en suite d'additions :

$1 \qquad 1-1/2 \qquad 1-1/2+1/4 \qquad 1-1/2+1/4-1/8$

On voit donc qu'une suite logique se forme que l'on pourrait continuer:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$$

Cette addition peut être reformulée sous forme de puissances de $-\frac{1}{2}$ jusqu'à n coups :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Elle peut donc s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Or, $-\frac{1}{2}$ est compris entre -1 et 1 donc cette somme peut s'écrire (2) :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ tend vers 0, et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

Les points se réunissent donc aux $\frac{2}{3}$ de la médiane par rapport au sommet. Or, on sait que le point qui se situe aux $\frac{2}{3}$ des médianes est le centre de gravité du triangle, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes.
Quand on prend 3 points au début, ils tendent donc à se rassembler au centre de gravité du triangle qu'ils forment.

5. Centre de gravité

Maintenant que nous avons vu plusieurs cas particuliers nous allons essayer de généraliser tous ces exemples en déterminant le point où se réuniront tous les points présent au départ peu importe leur nombre et leur emplacement. Pour cela nous commençons par appeler G le centre de gravité de la figure initiale qui se calcule en faisant la moyenne de tous les points.

$G=\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$ Ici « n » représente le nombre de points.

Pour calculer les coordonnées du centre de gravité nous devrions normalement calculer son abscisse en faisant la moyenne des abscisses de tous les points puis son ordonnée en faisant la moyenne des ordonnées de tous les points. Par exemple si on notait chaque point comme ceci : $A_1\ (x_1, y_1)$, $A_2\ (x_2, y_2)$ … $A_n\ (x_n, y_n)$ alors les coordonnées de $G(G_x, G_y)$ seraient :

$$G_x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \qquad G_y=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

Pour que les explications soient plus claires nous écrirons par la suite seulement une formule, la première que nous avons vu dans laquelle il faut comprendre que les points notés A représentent l'abscisse ainsi que l'ordonnée de chaque point.

On va maintenant supposer que A_1 et A_2 sont les deux points les plus éloignés (cela ne change rien nous aurions pu prendre n'importe quels autres points) :

A_1 et A_2 vont donc former deux nouveaux points que nous allons appeler B et B' qui se situent au milieu du segment $[A_1A_2]$. Nous pouvons donc calculer le nouveau centre de gravité de la figure que nous appellerons G' en remplaçant les point A_1 et A_2 par B et B'.

$$G' = \frac{B + B' + A_3 + \cdots + A_n}{n}$$

Nous allons aussi calculer les coordonnées de B et B' en utilisant la formule des milieux.

$B = B' = \frac{A_1+A_2}{2}$ que nous pouvons aussi réécrire comme ceci $B + B' = A_1 + A_2$

Grâce à cette égalité nous pouvons réécrire G' en remplaçant $B + B'$ par $A_1 + A_2$.

$$G' = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}{n} = G$$

On se rend ainsi compte que G' est G sont confondus, c'est-à-dire qu'ils se situent aux mêmes coordonnées, cela veut donc dire qu'avant et après chaque itération le centre de gravité ne change pas. Nous venons donc de montrer que si tous les points ne font que se rapprocher alors le seul point possible où ils pourront tous se réunir est le centre de gravité.

6. Conclusion

Nous avons prouvé que si tous les points se rapprochent alors ils se réuniront au niveau de leur centre de gravité. De plus, dans le cas de quatre points, les points se réunissent au bout d'un nombre de coups généralement compris entre 4 et 6. Dans le cas de trois points, il faudrait une infinité d'étapes pour que les points atteignent le centre de gravité. Nous pouvons donc nous demander s'il existe un cas particulier avec quatre points nécessitant une infinité d'étapes.

Remerciements

Nous remercions monsieur Paul, pour l'organisation de l'atelier du lycée Carnot, avec l'aide d'Ariane, et tout le travail que cela représente. Ainsi qu'Amic Frouvelle qui nous a proposé des sujets intéressants qui nous ont permis de travailler toute cette année.

Merci aussi aux organisateurs du congrès et à tous les participants sans qui rien ne serait possible.

7. Annexe

Code Python, permettant de réaliser les statistiques concernant le nombre de coups de la Figure 7 :

```
from matplotlib import pyplot
from random import randint
from math import sqrt

print("Combien de points voulez-vous ?")
a = int(input()) #Le programme peut être utilisé pour n'importe nombre de points
coups=[] #On définit la liste qui mémorisera le nombre de coups

for z in range(0,10000) :
  #On fait une grande boucle qui correspond au nombre d'expériences que l'on veut réaliser
  X=[] #Liste dans lesquelles on va stocker les coordonnées des points
  Xd=[] #Listes des coordonnées des points initiaux
  Y=[]
  Yd=[]
  for i in range(0,a) : #Pour chaque point, on génère des coordonnées aléatoires
    X.append(randint(100,1000)/100)
    Xd.append(X[i])
    Y.append(randint(100,1000)/100)
    Yd.append(Y[i])

  for j in range(0,100) : #On limite la simulation à 100 coups
    max = 0
    for i in range(0,a) : #On repère la plus grande distance
      for k in range(0,a) :
        if max < sqrt((X[i]-X[k])**2+(Y[i]-Y[k])**2) :
          max = sqrt((X[i]-X[k])**2+(Y[i]-Y[k])**2)
           point1=i
           point2=k
    if max == 0 : #Si la distance maximale est égale 0, tous les points ont les mêmes coordonnées, on passe à l'expérience suivante
      coups.append(j+1) #On conserve le nombre de coups réalisés pour cette expérience
      break #On passe à l'expérience suivante, avec des nouveaux points.

    X[point1] = (X[point1]+X[point2])/2 #On applique la règle du sujet et les deux points les plus éloignés se rassemblent au milieu du segment qu'ils forment
    Y[point1] = (Y[point1]+Y[point2])/2
    X[point2] = X[point1]
    Y[point2] = Y[point1]
```

```
stat=[] #Crée une liste pour trier les expériences par nombre de coups
for i in range(0,12) : #On regardera  les expériences dont le nombre de coups est inférieur à 12
   stat.append(0) #Initialisation de la liste
for i in range(len(coups)) : #On fait le décompte de chaque nombre de coup nécessaire pour pouvoir créer un graphique
   if coups[i]>len(stat)-1:
      print(coups[i]) #Si il y a plus de 12 coups dans une experience, on affiche le nombre de coups
      stat[len(stat)-1] = stat[len(stat)-1] + 10
   else :
      stat[coups[i]-1]=stat[coups[i]-1]+1

print(coups) #Affichage
pyplot.plot(stat)
pyplot.show()
```

Notes d'édition

(1) Plus précisément, le graphique représente, en ordonnées, le nombre de réalisations, en fonction du nombre de coups nécessaires pour terminer l'algorithme. Au total, 10 000 situations différentes ont été simulées. On remarque que le nombre de coups ne dépasse pas 15, ce qui signifie que les points finissent toujours pas se rapprocher en un nombre fini d'étapes.

(2) En réalité, l'égalité ci-dessous est valable plus généralement, elle est uniquement due au fait que -1/2 est différent de 1.