Parking

année 2016-2017

Élèves :

Lélio Barandiaran, Isaure Delattre, Dante Montealegre Paredes, Roxane Oleg, Claire Saint-Antonin, Marilou Carde, Swann Leclere, Ismaël Dia, Marie-Lou Lequesne, Valentine Piganiol, Elias Mammeri, Cécilia Otero, Océane Deman, Romane Cayrecastel, Achille Miollan, Octave Bosc et Julie Derrey. Élèves de 5° et 4°.

Encadrés par : Mme Maïouf (Collège Jolimont), M. Duprat (Collège Michelet)

Établissements : Collèges Michelet (annexe) et Jolimont de Toulouse

Chercheur : Emily BURGUNDER , université Paul Sabatier de Toulouse

Problème :

Un nombre indéterminé de voitures veut se garer dans un parking comportant autant de places que de voitures. (1)

Les places de parking se suivent, les voitures se déplacent en file et ont chacune une place préférée.(Plusieurs voitures peuvent avoir la même place préférée).

Si une voiture passe devant sa place préférée et qu'elle est libre, elle se gare, sinon elle se gare à la prochaine place libre.

Si aucune des places après sa place préférée n'est libre, alors elle sort du parking.

Problématique :

- Dans ces conditions, toutes les voitures peuvent-elles se garer ?

- Pour un nombre de voitures donné, trouver les cas où toutes les voitures peuvent se garer et les compter.

Réponses :

1. Il existe des cas où toutes les voitures ne peuvent pas se garer.

2. Si n est le nombre de voitures, le nombre de cas où toutes les voitures peuvent se garer est donné par la formule : $\dfrac{2^n(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times1}{(n+1)\times n\times\ldots\times1}$ si on ne considère que les cas où les préférences de place sont classées dans l'ordre croissant.

Démonstration de la réponse à la première question :

Voici un contre-exemple avec 2 places et 2 voitures :
Si la première voiture A et la seconde voiture B préfèrent toutes les deux la place 2, alors la voiture A se gare à la place 2 mais la voiture B ne peux pas se garer.
Ce contre-exemple justifie la réponse à la première question.

Démarche pour la deuxième question :

Nous avons commencé par compter le nombre de possibilités totales, le nombre de possibilités qui fonctionnent et le nombre de possibilités qui ne fonctionnent pas. Nous les avons comptées une par une et mises dans un tableau pour plus de facilité.

Nombre de..	voitures	possibilités	possibilités qui fonctionnent	possibilités qui ne fonctionnent pas
	1	1	1	1
	2	4	3	1
	3	27	16	11
	4	256	125	131
	5	3125	1298	1827

Ce tableau nous a servi pour trouver une formule : celle qui permettait de trouver le nombre de possibilités totales. Il y en a n^n car toutes les voitures ont n choix de place et il y en a n.

Nous avons cherché un lien de proportionnalité entre les colonnes du tableau que nous n'avons pas trouvé suite à quoi nous avons établi des propriétés :

- il faut qu'au moins une des voitures préfère la place n°1 pour que la fonction marche (elle est la première place et ne peut pas être prise en second choix) ;

- il ne peut y avoir qu'une voiture qui préfère la dernière place, il ne peut y avoir que 2 voitures qui préfèrent l'avant dernière et ainsi de suite… (sinon, la voiture suivante préférant cette place ne peut se garer).

Nous avons cherché les formules pour trouver les possibilités qui fonctionnent et celles qui ne fonctionnent pas mais cette recherche n'a pas abouti.

Nous avons donc décidé de simplifier le problème en ne comptant que les cas où les préférences de place sont classées dans l'ordre croissant. (2)
Par exemple, pour deux voitures, nous retenons les cas (1;1), (1;2) et (2;2) mais pas (2;1).

Nous avons dénombré les cas jusqu'à 4 voitures :
- pour ***une*** voiture, il n'y a qu'***un cas*** qui fonctionne (1),
- pour ***deux*** voitures, il y en a ***deux*** ((1;1) et (1;2)),
- pour ***trois*** voitures, il y en a ***cinq*** ((1;1;1) ; (1;1;2) ; (1;1;3) ; (1;2;2) ; (1;2;3).c (3)

Nous avons remarqué que ces résultats étaient les mêmes que ceux trouvés dans les autres sujets de recherche traités dans notre collège.

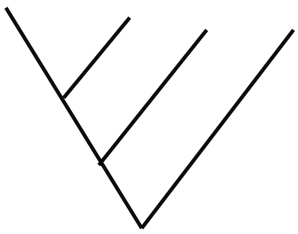
Nous avons donc essayé de trouver un lien avec un des sujets traités dans notre collège : Arbres binaires planaires.

Un arbre binaire planaire est constitué d'un nombre x d'entrées et d'une seule sortie qu'il faut relier en faisant des chemins.

Pour ce faire, il y a des règles :

- 2 chemins ne peuvent pas se croiser ;
- lorsque 2 chemins se touchent, ils se confondent et ne forment plus qu'un ;
- les chemins ne peuvent se regrouper que 2 par 2.

Exemple :



Cet arbre est acceptable, il respecte les règles.

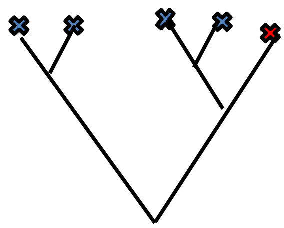
Pour passer d'un arbre à une suite de places préférées de parking :

Nous prenons une voiture de moins que le nombre d'entrées de l'arbre.
Pour savoir à quelle liste de places ordonnée correspond un arbre nous avons utilisé une grille à placer sur l'arbre en question.

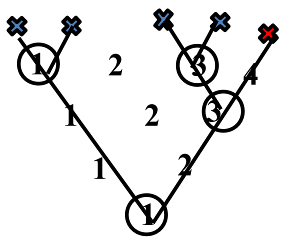
1 2 3 4
1 2 3
1 2
1

Ici, il y a la branche des 1, la branche des 2, la branche des 3 et la branche des 4. Il y a donc 4 voitures

On prend un arbre (à 5 entrées) pour le superposer à la grille...



Et on le superpose.



On lit de haut en bas et de gauche à droite les numéros associés aux nœuds. (4)

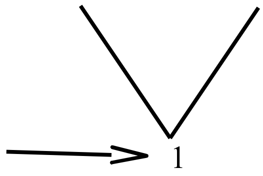
Donc l’arbre ci-dessus correspond à la solutions pour 4 voitures (1;1;3;3).

De cette manière, chaque arbre produit une possibilité qui fonctionne de garer les voitures.

Pour passer d'une suite de places préférées de parking à un arbre :

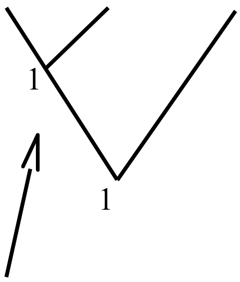
Pour relier les chiffres aux arbres, nous avons rédigé ces règles :

On commence par faire un V comme celui-ci :



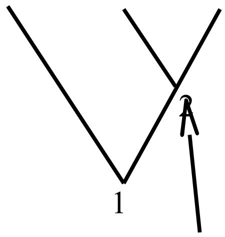
La sortie de l'arbre sera numérotée 1 (comme dans les propriétés exposées plus tôt, la suite de places préférées doit obligatoirement commencer par un 1 pour qu'elle fonctionne)

La suite de places préférées peut ensuite contenir un 1.
Dans ce cas il faudra avoir la démarche suivante :



Le deuxième 1 sera alors placé sur la branche de gauche, il indique une intersection de 2 branches.

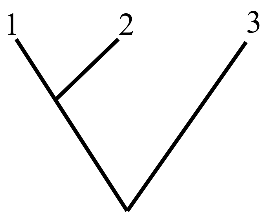
Si, au contraire, la possibilité contient ensuite un 2, il faudra avoir la démarche suivante :



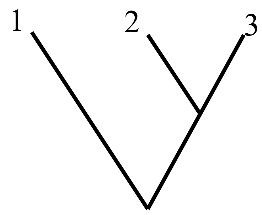
Le 2 sera alors placé sur la branche de droite, il indique une intersection de 2 branches.

(5)

Pour continuer, on attribue un numéro à chaque branche de gauche à droite :



ou



et on représente la place préférée suivante par une nouvelle branche placée sur la branche existante portant son numéro.

On peut ainsi en recommençant le procédé attribuer un arbre à une suite de places préférées qui fonctionne. Cet arbre contient par construction autant de nœuds qu’il y a de voitures.

Ce n'est pas nous qui avons trouvé la formule, ni le groupe Arbres Binaires Planaires. Par contre, Arbres Binaires Planaires avait démontré que ses résultats étaient les mêmes que pour le troisième sujet traité (Triangulation). C'est ce dernier qui a trouvé la formule finale, utilisable pour les trois sujets. (6)

La formule était pour un arbre à n nœuds :

$$\frac{2^n(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times1}{(n+1)\times(n-1)\times\ldots\times1}$$

Ainsi, cette formule est valable pour compter le nombre de possibilités de préférence de place qui fonctionne (si elles sont ordonnées dans l'ordre croissant).

Il nous resterait maintenant à trouver une formule pour le nombre de possibilités si les places ne sont pas ordonnées. Il serait également intéressant de trouver cette formule sans passer par un autre sujet.

Notes d'édition

(1) Plutôt qu'**indéteminé**, parler d'un nombre « **fixé** » de voitures
(2) On ne s'étonnera pas que les résultats obtenus grâce à cette simplification soient différents des nombres qui figurent dans le tableau précédent où étaient comptées toutes les permutations du choix des places
(3) La liste suivante n'énumère les cas que jusqu'à 3 voitures
(4) On pourrait gagner en clarté en expliquant pourquoi cela fonctionne de manière générale, pourquoi la lecture de l'arbre de cette manière-là donne bien la suite de préférence (1,1,3,3).
(5) Il n'y a pas incompatibilité s'il y a plus de 2 voitures, par exemple avec 1,1,2. Il faudrait dire alors comment construire l'arbre.
(6) On aurait pu donner une idée de la preuve proposée (au moins les grandes étapes) par le groupe travaillant sur Triangulation.
On peut trouver cet article Triangulation à l'adresse :
http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/article_triangulation_verifie.pdf