Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ?

par Sothi Mok (3°), Michel Vongsavanh (3°), Eric Chin (3°), Siek-Hor Lim (1°S), Eric Akbaraly (1°S), élèves et anciens élèves du Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet, 93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein et M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? » Cette question qui paraît si bête est en fait le prétexte pour une réflexion sur la définition d'un carré dans une sphère. Plusieurs mois de travaux et plusieurs feuilles d'exposé pour en arriver à la conclusion qu'un carré peut ne pas posséder d'angle droit.

Compiègne
Compte-rendu du groupe 42 parrainé par le groupe 37.

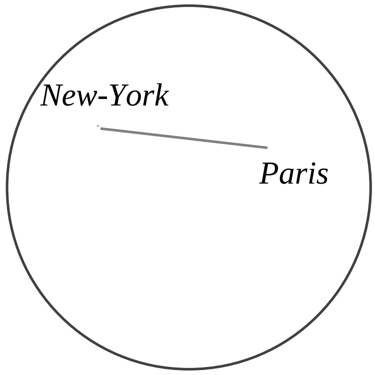
Des élèves de Noisy ont complètement résolu le problème de savoir s'il existe des carrés dont les 4 sommets sont sur une sphère, connaissant deux sommets. Leur sujet se présentait donc par une question :

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? »

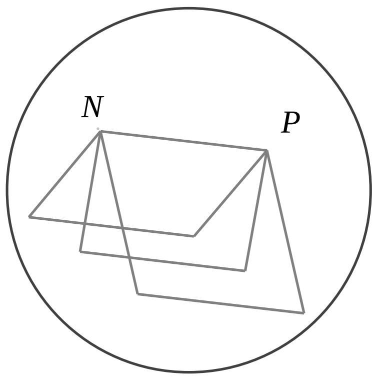
Ils nous ont montré que oui en traçant, sur le globe terrestre, un “carré bossu”.

Nous avons remarqué que leur exposé était bien complet et les démonstrations étaient tout-à-fait valables, mais peut-être dites un peu trop vite pour permettre la compréhension de certain spectateurs.

Voilà une curieuse question pour un sujet de recherche en mathématiques car à première vue, la réponse paraît simple. En effet, dans l'espace, nous pouvons par des plans de coupe, obtenir le support d'une infinité de carrés possédant des sommets à l'endroit où l'on veut.



En fait, tous les plans contenant la droite passant par Paris et New-York conviennent pour y tracer nos carrés : on peut imaginer un plan pivotant autour de l'axe Paris-New-York, comme sur la figure ci-dessous.



Cependant ces carrés ne sont pas sur la surface de la Terre, assimilée à une sphère parfaite.

En tentant de résoudre ce nouveau problème, c'est à une géométrie singulière que l'on doit faire face car nous n'avons jamais étudié de telles figures sur une surface sphérique.

Pour construire de tels carrés, il nous a fallu définir ce qu'est un segment et un angle sur une sphère.

Durant toute notre étude, nous avons utilisé la coupe par un plan ce qui nous a permis de revenir à volonté dans le monde bien connu de la géométrie plane.

les segments

Dans un plan, un segment est le plus court chemin entre deux points. Nous avons décidé de conserver la même définition du segment sur la sphère.

Pour cela, il nous faut déterminer ce qu'est le plus court chemin entre deux points sur la sphère.

Il nous a paru naturel d'admettre que le plus court chemin sera un arc de cercle car la section d'une sphère par un plan est toujours un cercle. Nous allons le prouver [NDLC : que la section d'une sphère par un plan est toujours un cercle].

Soit une sphère S de centre O_2 et de rayon R. Soit P_1 un plan quelconque coupant S. P_2 est le plan parallèle à P_1 passant par O_2.

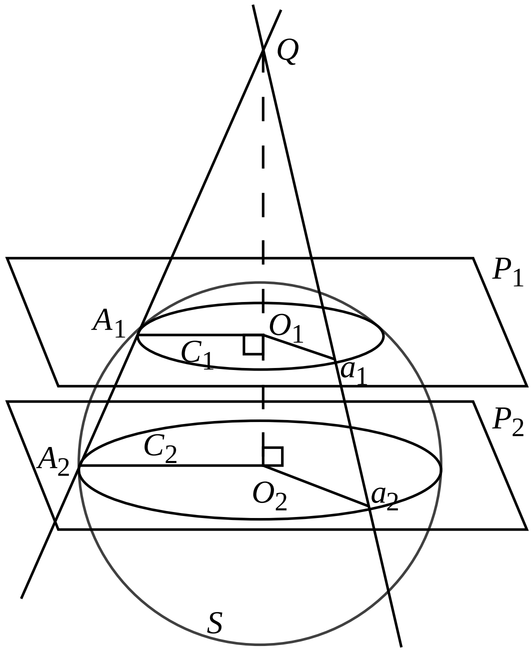
L'intersection de P_2 avec la sphère est le cercle C_2 de centre O_2 et de rayon R car tous les points de cette intersection sont sur un même plan et sont à égale distance (R, rayon de la sphère) de O_2.

Soit A_2 un point quelconque de C_2. Soit O_1 le projeté orthogonal de O_2 sur P_1. De O_1, on construit la parallèle à (A_2O_2) sur le plan P_1. L'intersection de cette droite avec la sphère nous fournit un point A_1. Soit Q l'intersection des droites (A_1A_2) et (O_1O_2). [voir dessin ci-contre]

Dans les triangles QA_1O_1 et QA_2O_2, les droites (A_1O_1) et (A_2O_2) sont parallèles et donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{QA_1}{QA_2} = \frac{A_1O_1}{A_2O_2} = \frac{QO_1}{QO_2'} = k$$

Lorsque le point a_2 décrit le cercle C_2 à partir de la position A_2, la droite (a_2Q) décrit un cône de révolution de sommet Q et de base le disque de centre O_2.



[NDLR. Dans le mouvement de révolution autour de l'axe (O_1O_2), chaque point p du plan P_1 reste sur P_1 (car l'angle droit $\angle pO_1O_2$ est conservé), chaque point s de la sphère reste sur la sphère (car la distance O_1s est conservée) ; à chaque position de a_2 correspond donc une position de a_1 qui est à la fois sur (A_2Q), sur la sphère S et sur le plan P_1. Comme le point a_2 reste sur P_2,] on a toujours (en se plaçant dans le plan (0_1a_1Q)) l'égalité :

$$\frac{Qa_1}{Qa_2} = \frac{a_1O_1}{a_2O_2} = \frac{QO_1}{QO_2'} = k$$

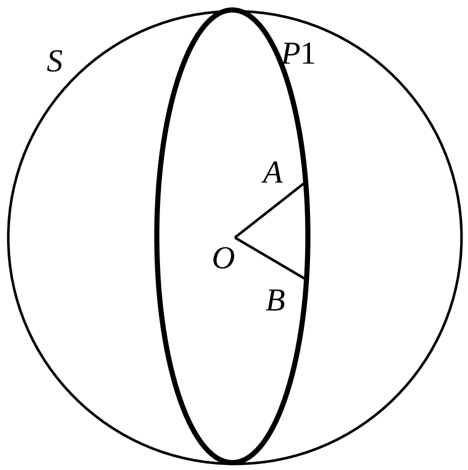
Puisque a_2O_2 est constant, a_1O_1 l'est aussi. L'intersection de P_1 avec la sphère est donc *un cercle de centre* O_1. [NDLR : plus précisément, cette intersection est contenue dans un cercle et pour obtenir ce résultat, il suffisait de dire que O_1 est invariable dans la rotation considérée. Pour montrer que, réciproquement, chaque point a du cercle de centre O_1 et de rayon O_1A_1 est dans l'intersection, on peut utiliser la relation numérique ci-dessus, en construisant a_1 pour que le point a_2 qui lui correspond coïncide avec a.]

Si l'on se donne deux points sur une sphère, il existe une infinité de plans passant par ces deux points ; il existe donc une infinité d'arcs de cercles joignant ces points.

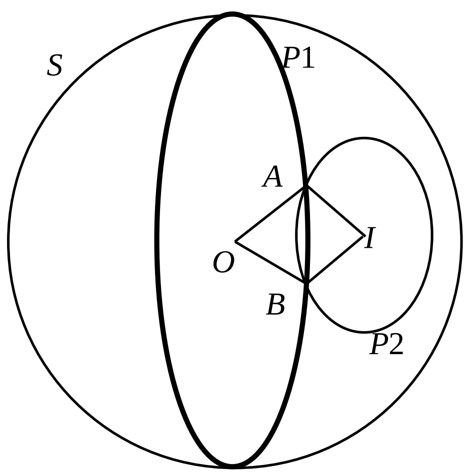
parmi tous ces arcs de cercle, quel est le plus court ?

Soit une sphère S de centre O.
A et B sont deux points distincts de la sphère.

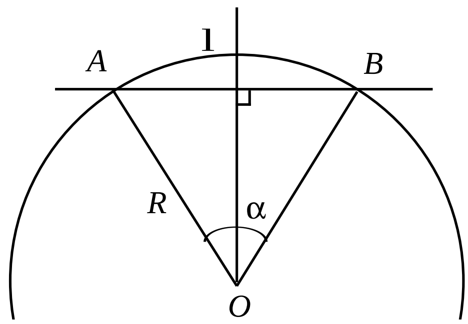
Le plan P_1 coupe la sphère en passant par A, B et O. Leur intersection est le grand cercle dessiné en gras :



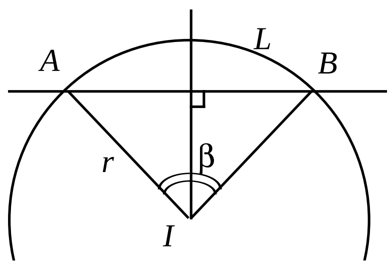
Le plan P_2 coupe la sphère en passant par A, B mais pas par O. Leur intersection est le cercle dessiné plus fin :



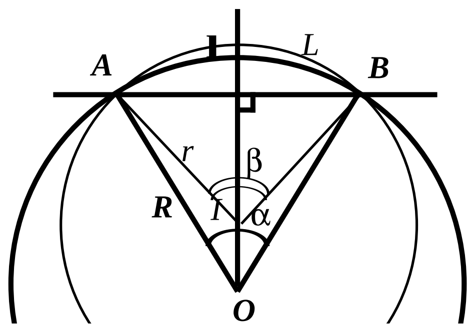
Sur le plan P_1, l'arc de cercle gras **l** formé par l'intersection du plan et de la sphère donne la figure suivante.



Sur le plan P_2, l'arc de cercle fin L formé par l'intersection du plan et de la sphère donne la figure suivante. I est le centre du cercle fin.



Si nous superposons ces deux figures sur un même plan, nous obtenons cette troisième figure. O et I sont sur la médiatrice de [AB].



On constate que plus le centre du cercle est éloigné du segment [AB], plus l'arc AB est court. Nous avons établi une preuve de cela mais elle est compliquée. (voir encadré, page suivante)

Pour nous, *un segment sur la sphère sera un arc de cercle issu d'un grand cercle (dont le centre est le centre de la sphère).*

Parmi tous les arcs de cercle passant par A et B, le plus court est celui obtenu par le cercle de centre le centre de la sphère.

Preuve :

Dans le triangle ACI, on a :

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{AC}{r} = \frac{AB}{2r} \quad \text{donc} \quad AB = 2r\sin\frac{\beta}{2}$$

De même dans le triangle OCA, on a :

$$AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi

$$2r\sin\frac{\beta}{2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}\sin\frac{\beta}{2}$$

Cherchons le signe de $L - \mathbf{l}$:

$L - \mathbf{l} = \beta r - \alpha R$ est du même signe que

$$\beta\frac{r}{R} - \alpha$$

C'est du même signe que

$$\frac{r}{R}\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

avec $0 \le \alpha \le \pi$ et $0 \le \beta \le \pi$,
on a : $0 \le \alpha/2 \le \pi/2$ et $0 \le \beta/2 \le \pi/2$.

C'est du même signe que

$$\sin\left(\frac{r}{R}\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

car sin est une fonction croissante sur $[0, \pi/2]$.

C'est donc du même signe que

$$\sin\left(\frac{r}{R}\frac{\beta}{2}\right) - \frac{r}{R}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

On pose $a = r/R$ $(0 < a \le 1)$ et $x = \beta/2$. Etudions les variations de la fonction $f(x) = \sin(ax) - a\sin x$ sur $[0, \pi/2]$.

$$f'(x) = a\cos(ax) - a\cos x$$
$$f'(x) = a(\cos(ax) - \cos x)$$

On a $0 \le ax \le x \le \pi/2$ donc

$$\cos(ax) - \cos x > 0$$

car la fonction cos est décroissante sur $[0, \pi/2]$. Donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0, \pi/2]$.

De plus, $f(0) = 0$, donc

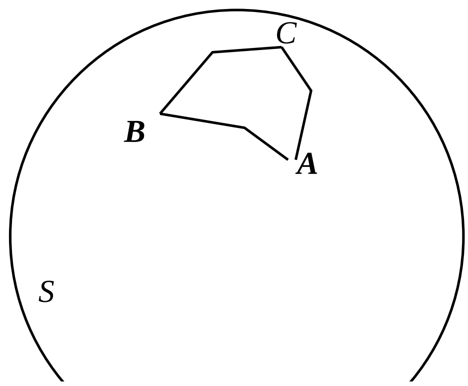
$f'(x)$ est toujours positive sur $[0, \pi/2]$.

Donc $L - \mathbf{l} > 0$ donc …

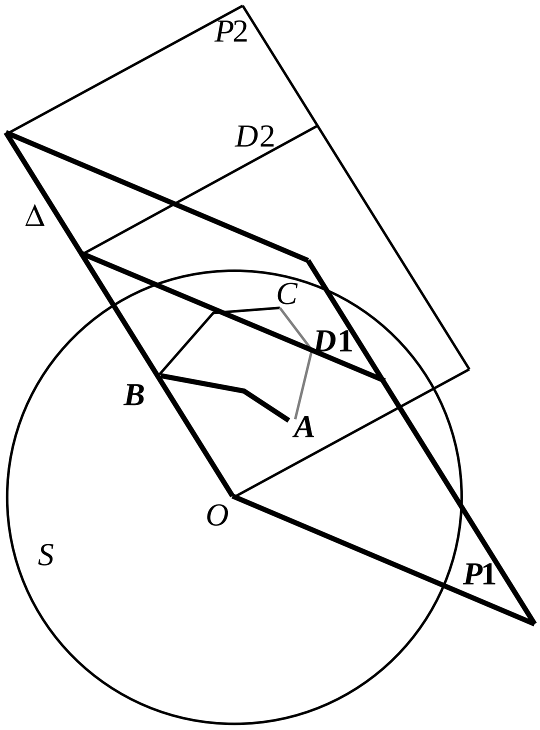
l'arc gras est plus court que l'arc fin.

Puisque nous avons défini la notion de segment sur la sphère, nous pouvons tracer des polygones.

Voici un triangle « bossu ». L'arc AB est obtenu par l'intersection du plan P_1 (le fin) passant par A, B et O et de la sphère S. L'arc BC est obtenu à l'aide du plan P_2 (le gras). Nous allons définir l'angle entre l'arc AB (fin) et l'arc BC (gras).



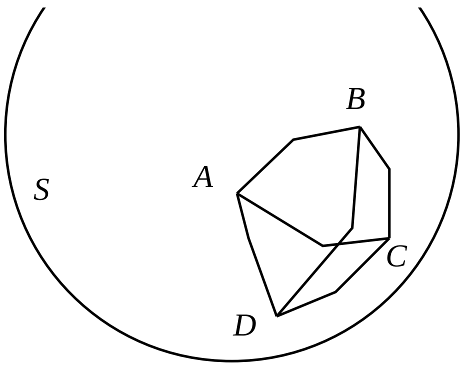
Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. Soit D_1 une droite de P_1 perpendiculaire à Δ, et D_2 une droite de P_2 perpendiculaire à Δ dont l'intersection avec D_1 est sur Δ.



L'angle des droites D_1 et D_2 détermine l'angle des plans P_1 et P_2. Pour nous, l'angle entre l'arc gras et l'arc fin sera l'angle déterminé par les plans P_1 et P_2.

les carrés « bossus »

Par analogie avec les carrés « droits » (dans un plan), nous sommes en mesure de définir des carrés sur la sphère que nous appellerons carrés « bossus ». Dans un premier temps, nous ne nous servirons que de la notion de segment sur la sphère.



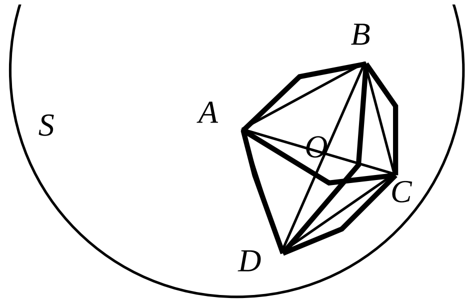
Un carré « bossu » sur la sphère *S* doit remplir les conditions suivantes :

a/ Les segments « bossus » sur la sphère *S* [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] sont égaux ;

b/ Les diagonales « bossues » sur la sphère *S* [*AC*] et [*BD*] sont égales.

Dans une telle configuration, les angles *AOB*, *BOC*, *COD* et *DOA* sont égaux car les arcs correspondants sont égaux.

En fait, à l'intérieur de la sphère, on obtient 4 triangles isocèles identiques (les fins), de sommet principal *O*, qui ont tous un côté adjacent.



Par conséquent, *OABCD* est une pyramide et *ABCD* qui est la base est au moins un losange (*AB* = *BC* = *CD* = *DA*). Or *AC* et *BD* sont égaux, donc *ABCD* est bien un carré « plat » possédant quatre sommets sur la sphère.

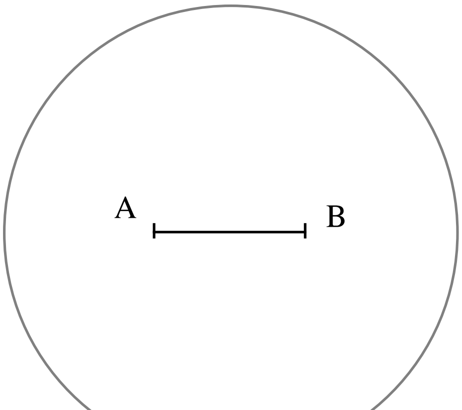
Ceci nous fournit une méthode permettant de construire les sommets des carrés « bossus » sur la sphère à partir de deux points choisis au hasard.

Soient *A* et *B* deux points quelconque sur la sphère, voici [page suivante] le …

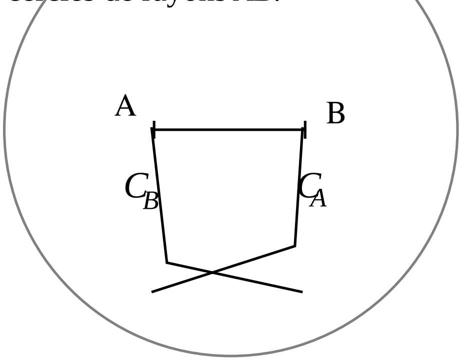
film de la construction des sommets C et D.

On procède comme pour construire un carré droit à l'aide d'un compas.

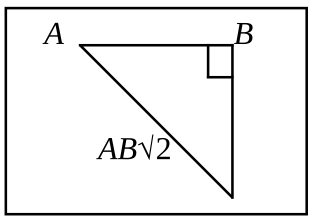
A l'aide du compas, on trace du « même côté » de [*AB*], deux arcs de cercle de rayon *AB*, centrés en *A* et en *B*.



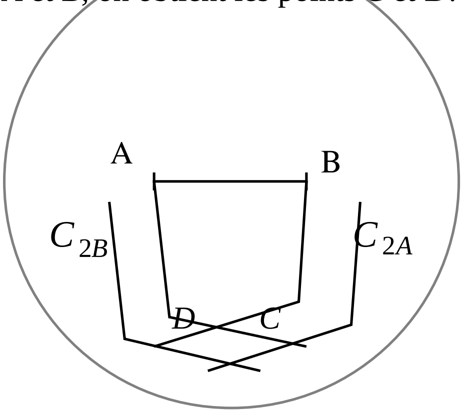
Si l'on prolongeait le segment [*AB*], alors la sphère serait partagée en deux hémisphères. Dans le même hémisphère, on trace en *A* et *B* deux arcs de cercles de rayons *AB*.

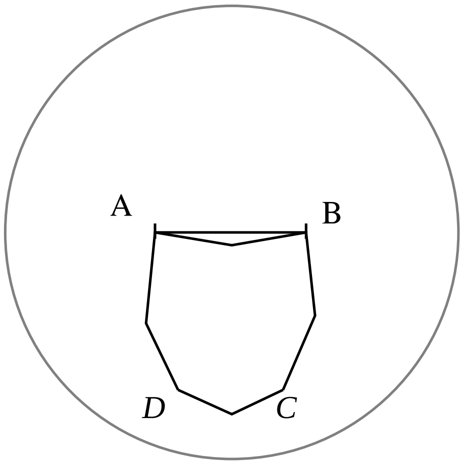


Sur un plan, nous sommes capables de construire la longueur $AB\sqrt{2}$.

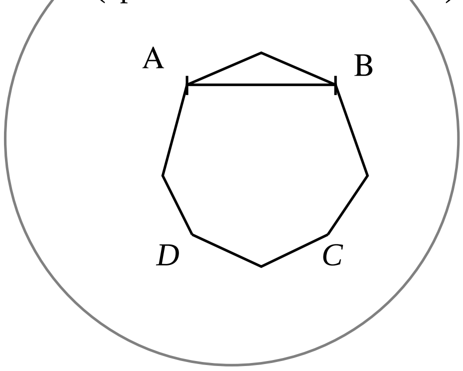


En reportant la longueur $AB\sqrt{2}$ en *A* et *B*, on obtient les points *C* et *D*.





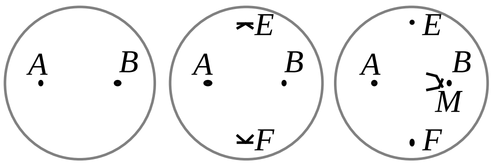
Et enfin, voici un carré bossu *ABCD* (après voir fait une rotation)



On obtient les sommets du carré « bossu » mais pour tracer les côtés, il faudrait pouvoir tracer les segments « bossus ». Nous pouvons les construire point par point car il n'est pas difficile d'obtenir autant de points que l'on veut appartenant à ces segments « bossus ».

A l'aide du compas, on construit les points *E* et *F* tels que

$AE = AF = BE = BF$.

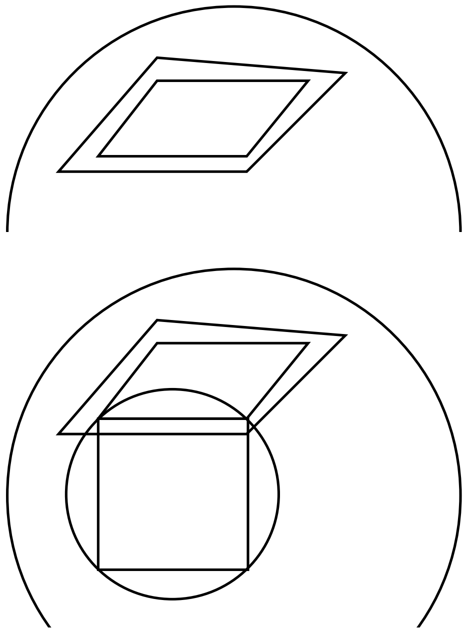


Toujours à l'aide du compas, on peut construire au moins un point *M* tel que $ME = MF < AE$. Ainsi *M* appartient au segment bossu [*AB*].

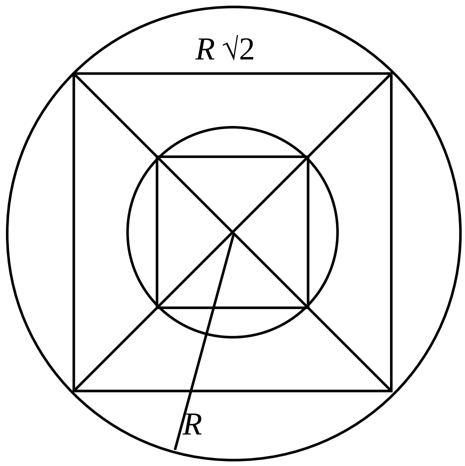
[NDLR : resterait à voir si cette méthode de construction d'**un** point du segment bossu permet d'en obtenir un, d'en obtenir beaucoup ou de les obtenir tous …]

Est ensuite venu le problème de savoir s'il existait d'autres conditions pour construire notre carré « bossu ».

Nous allons donc réutiliser un de nos outils : la coupe par un plan. Nous savons que tout carré « plat » de côté c est inscriptible dans un cercle de diamètre $c\sqrt{2}$. Or, l'intersection d'un plan avec une sphère détermine un cercle. Nous nous donnons deux points distincts A et B de S : s'il existe au moins un cercle (obtenu par la section d'un plan) de diamètre $AB\sqrt{2}$, alors on pourra construire un carré plat $ABCD$ (C et D appartenant aussi à S), et ensuite construire notre « carré bossu » dont les sommets sont A, B, C et D.



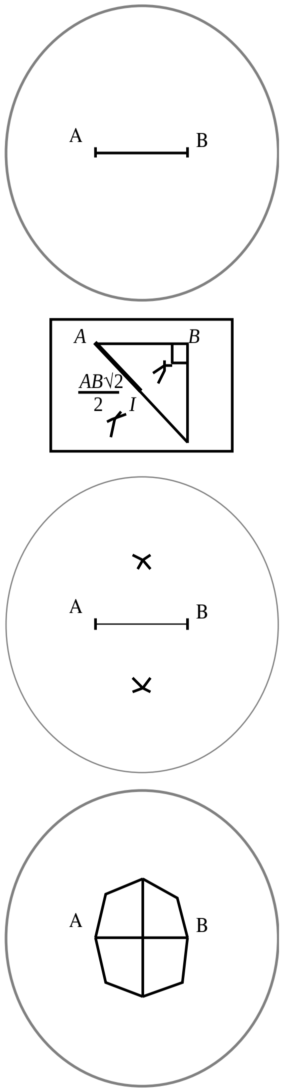
Pour l'étude du « carré bossu », nous nous sommes donc d'abord intéressés à notre carré droit et voici nos résultats. (R est le rayon de la sphère)



	nombre de carrés droits de côté $[AB]$	nombre de carrés droits de diagonale $[AB]$	nombre total de carrés
$0<AB<R\sqrt{2}$	2	1	3
$AB = R\sqrt{2}$	1	1	2
$R\sqrt{2}<AB<2R$	0	1	1
$AB = 2R$	0	infinité	

Pour les carrés « bossus », nous obtenons un tableau récapitulatif identique puisqu'à chaque carré droit correspond un unique carré « bossu ».

Annexe : construire un carré bossu *ACBD* … (histoire sans paroles)



Commentaire du chercheur

Un problème intéressant de direction de recherche est apparu au cours du travail.

Au 2ème séminaire (15 janvier 1995), le groupe (issu d'un seul collège, il était composé d'un élève de 4ème, d'un de 3ème,et de deux “anciens” de MATh.en.JEANS en classe de 1ère) avait proposé de nombreuses pistes ou résultats :

• définition d'un angle entre deux grands cercles comme étant celui de leur plans,

• définition du carré comme ayant 4 côtés égaux et un angle droit,

• existence d'un triangle équilatéral avec 3 angles droits,

• représentation plane des figures sphériques par projection orthogonale sur un plan tangent.

Mais les élèves semblaient coincés dans leur entreprise par l'abondance des questions soulevées et notamment celles qui concernaient la mesure des distances et les plus courts chemins (les *géodésiques*) sur la sphère.

L'intervention du chercheur a consisté à reformuler les questions :

1) Existe-t-il un plus court chemin entre deux points donnés de la sphère ?

2) Un plus court chemin est-il dans un plan ?

3) Parmi les chemins polygonaux, ceux qui sont plans sont-ils plus courts ?

4) L'intersection d'un plan et d'une sphère est-elle bien un cercle ?

5) Parmi les chemins circulaires, le plus court est-il celui qui a le plus grand rayon ?

6) Peut-on calculer la longueur d'un arc de cercle correspondant à une section non équatoriale.

7) Comment angle au centre et longueur de grand arc dépendent-ils l'un de l'autre ?

Sur la problèmatique du plus court chemin, différentes conjectures s'étaient affrontées (morceau de “parallèle” au sens de la cartographie, chemin “gauche” du type loxodromie) avant de se stabiliser autour des arcs de grand cercle (ou cercle équatorial).

Pour chercheur et enseignant, la tentation était grande de demander aux élèves de poursuivre des investigations géométriques autour de la question initiale (étude des carrés sphériques) en leur demandant d'admettre comme théorème que les géodésiques de la sphère sont des arcs de grand cercles.

Dans une recherche similaire (jumelage 1989-90 entre lycée Racine de Paris et lycée technique Jean-Jaurès d'Argenteuil, sujet “Géométrie non euclidienne”, introduit par le “problème du Jardinier” : placer des arbres de manière que dans chaque ligne “droite” déterminée par 2 arbres, il y ait toujours au moins un troisième arbre), la même interrogation s'était posée à propos des géodésiques de la sphère.

Voulant recentrer la recherche sur les problèmes de géométrie non euclidienne, nous avions à l'époque pris la décision de donner comme outil le théorème des géodésiques.

Dans la situation de 1995, après discussion, l'enseignant a proposé aux élèves de choisir entre deux consignes :

A- Prouver que l'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle et déterminer son centre, les propriétés suivantes étant prises pour axiomes :

(a) La propriété de Pythagore est vraie dans tout plan de l'espace,

(b) Si M est un point de l'espace hors d'un plan P, le plan P contient un unique point plus proche de M, soit H. Pour tout point p de P, l'angle $\angle pHM$ est droit.

B- En admettant que les “droites sphériques” sont les grands cercles, étudier les triangles de la sphère, par exemple les triangles rectangles, leur aire … Existe-t-il d'autres triangles équilatéraux que celui trouvé ? Leurs angles sont-ils égaux ?

Les élèves ont choisi par eux-mêmes la direction **A**, en approfondissant les questions 4 et 5.