Pariez, mais je gagne !

Année 2020 – 2021

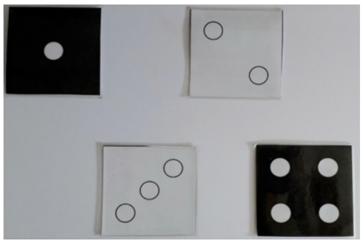
Elanore Brodu, Lucas Poeydarrieu, Charlotte Pouquet, Léopold Terrasse (élèves de 3e)

Encadrés par : Chantal Barneix et Alain Goyhetche

Etablissement : Collège Gaston Fébus, Orthez

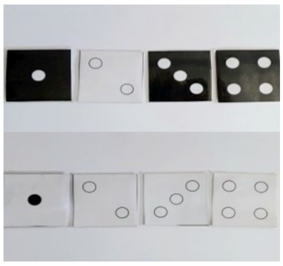
Chercheur : Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1-Présentation (notre travail, but et règles du jeu)



Nous allons vous présenter notre projet de maths en jean sur lequel nous avons travaillé cette année. C'est un jeu.
Celui-ci peut se jouer seul ou à deux et avec des cartes.
Ces dernières comportent deux faces : une blanche et une noire sur lesquelles il y a des chiffres représentés à la manière des dés (1).

Le joueur forme une combinaison avec ses cartes, par exemple, de gauche à droite : 1, 3, 2, 4 (si l'on joue avec 4 cartes)



L'opération autorisée est :
- permuter deux cartes adjacentes (c'est à dire échanger deux cartes placées côte à côte)
- retourner, au choix, une des deux cartes (elle change donc de couleur).

Le but du jeu est de toujours arriver à la combinaison finale : 1 2 3 4 avec toutes les cartes blanches.

Nous avons alors essayé de répondre à plusieurs questions :
- Peut-on savoir, pour une combinaison donnée, s'il est possible ou non de la remettre dans la position finale (1, 2, 3, 4, les quatre cartes étant blanches) ?
- Si on sait que, pour une combinaison, le problème est soluble, peut-on trouver un algorithme de résolution ?
- Si on sait que, pour une combinaison, le problème est soluble, peut-on déterminer le nombre minimal de permutations nécessaires à sa résolution ?

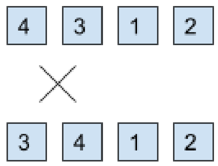
Organisation de l’article.

- Tout d’abord, nous avons trouvé ces problèmes bien compliqués, donc nous avons simplifié le jeu en supprimant les couleurs pour les deux premières parties.
- Dans la première partie, nous démontrerons que nous pouvons, à partir de n’importe quelle configuration arriver à la configuration finale (1, 2, 3, 4).
- Dans la seconde partie, nous détaillerons un algorithme qui permet de résoudre le problème en un nombre optimal de coups (que nous pourrons déterminer en début de partie).
- Dans la troisième partie, nous étudierons les combinaisons colorées ainsi que leur parité.
- Enfin, dans la dernière partie, nous détaillerons l’algorithme final qui reprendra celui de la partie 2 en déterminant quelle carte nous devons retourner.

Partie 1: Le Jeu sans couleur, une méthode générale :

1/ Comment schématiser une permutation de deux cartes ?

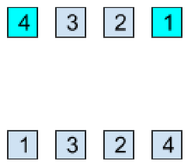
Une croix désigne une permutation de deux cartes adjacentes.
Exemple :
Pour échanger le 4 et le 3 de place, on symbolise la permutation par une croix.

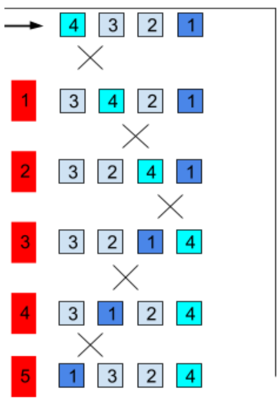
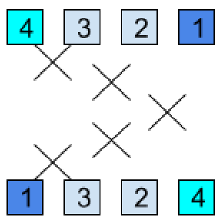


2/ Une méthode pour échanger deux cartes non adjacentes.

On a d'abord trouvé une méthode qui permet d'échanger deux cartes non adjacentes de place sans que les autres cartes ne soient affectées.

Dans l’exemple ci-contre, on veut échanger le 4 et le 1 de place :
On fait ainsi dans l’ordre les permutations suivantes :
- le 4 et le 3 ; le 4 et le 2 ; le 4 et le 1 ; le 2 et le 1 ; le 3 et le 1



Voici les mouvements détaillés un à un afin de passer de la configuration initiale à la configuration finale. 	Si l’on résume toutes les permutations sur le même schéma : 

On obtient donc une configuration (que nous appellerons “en V”) et donc une méthode qui peut s’appliquer pour n’importe quelles cartes, quels que soient leurs emplacements.

Nous avons remarqué, avec cette méthode, que chaque carte placée entre le 1 et le 4 sera changée de place 2 fois, dans un sens puis dans l’autre. Finalement, chacune retrouvera sa position initiale.

En conclusion, cette méthode permet

- d’échanger deux cartes non adjacentes
- de garder les autres cartes à leurs places

Nous savons maintenant que nous pourrons résoudre n’importe quelle combinaison, en appliquant plusieurs fois cette méthode. Toutefois, le nombre de coups sera important.

Partie 2 : Recherche d’un algorithme avec le nombre optimal de coups :

1/ Deux techniques différentes de résolution :

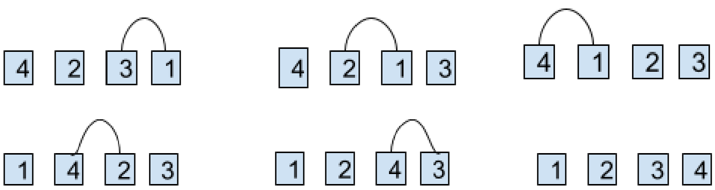
1ère solution “méthode des milieux”:

- On place correctement les cartes du milieu (2 et 3).
- On place ensuite les extrémités.

<u>Exemple :</u>

On place tout d’abord les cartes 2 et 3

Il faut maintenant placer les cartes 1 et 4 aux extrémités.



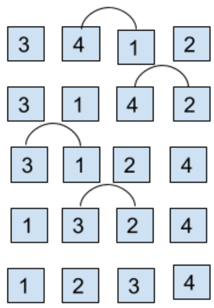
On compte 8 étapes.

On constate, en plaçant les cartes du milieu en premier, que l’on doit parfois les rebouger, si les extrémités sont mal placées. Ce qui augmente le nombre total de coups.

Nous avons donc cherché une autre méthode où les cartes seraient immobilisées une fois placées.

2ème solution “méthode des extrémités”:

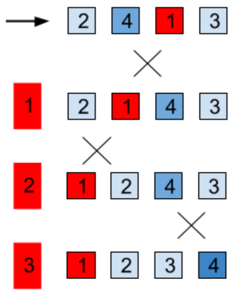
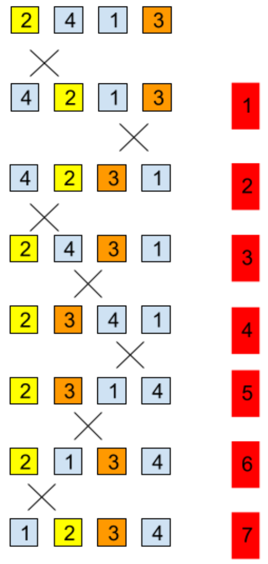
- Nous plaçons tout d’abord les cartes 1 et 4 aux extrémités (positions finales).
- Puis nous échangeons, si besoin, les cartes 2 et 3



On compte alors seulement 4 étapes.

Sur un autre exemple :

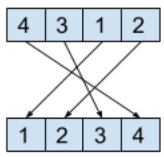
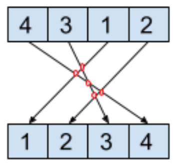
Méthode des extrémités	Méthode des milieux

Il semble que la méthode des extrémités soit plus rapide que la méthode des milieux.

Remarque : Il nous semble qu'une autre méthode serait de placer les cartes successivement d'un côté à l'autre. Mais nous n'avons pas eu le temps de la tester.

2/ Un nouvel outil : Les croisements

Nous avons relié les cartes de la combinaison de départ à leurs homologues de la combinaison finale comme sur le schéma ci-contre:	
À partir de là, nous avons fait plusieurs constatations concernant le nombre de croisements entre les flèches. Ici nous avons 5 croisements entre toutes les flèches.	

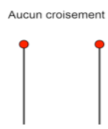
En effectuant plusieurs parties en cherchant à obtenir le plus petit nombre de coups, nous avons émis deux conjectures :

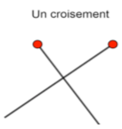
- ***Passer de la combinaison de base à la combinaison finale prend autant de coups que de croisements.***
- ***Nous n'arriverons jamais à résoudre le problème en moins de coups qu'il n'y a de croisements, quelle que soit la méthode.***

Nous allons l'expliquer.

3/ Effet d'un mouvement (d'une permutation) sur le nombre de croisements.

Une permutation peut modifier le nombre de croisements de +1 ou -1. En effet, deux cas seulement sont possibles :





Dans le cas de gauche, le nombre de croisements aura augmenté de 1 (passant de 0 à 1) tandis que dans le cas de droite, le nombre de croisements aura diminué de 1 (passant de 1 à 0) (2).

On en déduit que chaque coup modifiera forcément le nombre de croisements de +1 ou -1.

Donc, si nous observons au départ d'une configuration, n croisements, alors il faudra jouer au minimum n coups pour que le nombre de croisements passe de n à 0 (à condition que chaque coup enlève un croisement). Donc il n'existera pas de résolution avec un nombre de coups inférieur à n.

Théorème 1 :

Si n est le nombre de croisements alors le nombre de coups minimum à la résolution de la combinaison est égal à n.

4/ Etude de la parité des coups d'une résolution.

Théorème 2 :

Si le nombre minimum de coups pour résoudre une combinaison est pair (respectivement impair) alors toutes les autres solutions seront aussi paires (respectivement impaires).

Démonstration :

On suppose que, dans la configuration de départ, il y a n croisements, le nombre minimal de coups sera égal à n. Chaque coup devant être un coup gagnant, c'est à dire un coup enlevant un croisement. Il en faudra donc n (3).

Si en cours de partie (il reste alors p croisements), le joueur se trompe dans les mouvements, alors il ajoute un croisement (on passe alors à $p+1$ croisements). Il faut alors jouer un nouveau coup pour revenir à p croisements. Au final, pour revenir à la situation initiale (p coups), on aura dû jouer deux fois. Le nombre total de coups sera alors égal à $n+2$; $n+2$ aura la même parité que n.

On peut en déduire ce tableau :

nombres d'erreurs	0	1	2	…	p
nombre de coups	n	$n+2$	$n+4$	…	$n+2p$

Dans tous les cas, $n + 2p$ aura la même parité que n.

En conclusion

- **si n est pair alors, dans tous les cas, le nombre de coups nécessaires pour résoudre le problème (avec 0 erreur, 1 erreur, …) sera toujours pair.**
- **inversement si n est impair, le nombre de coups nécessaires pour résoudre le problème (0 erreur, 1 erreur, …) sera toujours impair.**

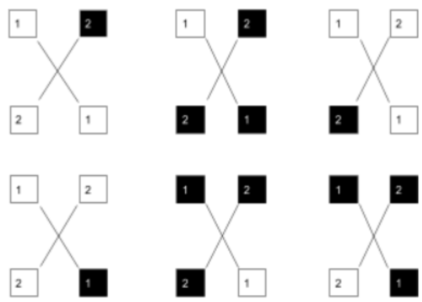
5/ Lien entre les croisements et la méthode des extrémités :

Nous savons donc que pour résoudre le problème il faut éliminer les croisements, et faire en sorte qu'il n'y en ait plus.
Lorsque l'on rapproche une carte (1 ou 4) vers sa position finale, à chaque coup, on est certain d'échanger cette carte avec une seconde dont la position finale par rapport à la première devra être inversée. Par exemple, la carte 1 devra être positionnée à l'extrême gauche. Pour y arriver, lors de chaque mouvement, elle sera échangée avec une carte située plus à gauche qu'elle. On supprime alors un croisement.
Donc, la méthode des extrémités nous assure que lors des placements des cartes 1 et 4, on supprime un croisement à chaque fois (4).
Cette méthode nous paraît donc être une méthode optimale.

Partie 3 : Introduction des couleurs :

Pour rappel, les règles nous imposent de retourner une carte à chaque permutation. Certaines cartes seront donc noires au début, mais elles doivent toutes être blanches à la fin.

1/ Tous les cas possibles :



2/ Deux premières propriétés :

Lemme 1 :
Une carte blanche reste blanche seulement après un nombre pair de coups.

Démonstration :
Si une carte blanche devient noire après un retournement, alors il faudra un autre coup afin qu'elle redevienne blanche.
Au final, on compte 2 coups. Pour deux retournements, il faudra 4 coups, etc…

Lemme 2 :
Une carte noire devient blanche seulement après un nombre impair de coups.

Démonstration :
Une carte noire devient blanche après un coup. Ensuite, pour qu'elle reste blanche, on aura besoin d'un nombre pair de coups (lemme 1). Au total, il faudra un nombre impair de coup (pair + impair) pour que la carte noire soit blanche.

3/ Comment savoir si une configuration est soluble ?

On sait que le nombre de retournements est égal au nombre total de coups car on retourne une carte à chaque déplacement.

Théorème 3 :
Si le nombre de coups et le nombre de cartes noires ont la même parité, alors le problème peut être résolu.
Sinon, il est impossible.

Démonstration

Deux cas possibles :

Si le nombre de cartes noires au départ est impair.
A l'arrivée, ces cartes devront être blanches. Nous avons vu précédemment que le nombre de retournements pour chacune de ces cartes est impair donc le nombre total de retournements pour ces cartes noires sera impair (impair × impair = impair) (5).
Le nombre total de retournements des cartes blanches est pair.
Donc, dans tous les cas, le nombre total de retournements de cartes sera impair.

- Si le nombre de permutations pour résoudre ce problème est impair (dans tous les cas), alors le problème est résoluble (même parité) (6).
- Si le nombre de permutations pour résoudre ce problème est pair (dans tous les cas), alors le problème est insoluble (parités différentes).

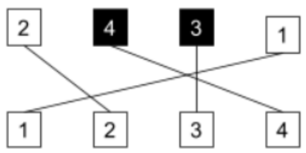
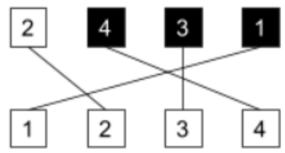
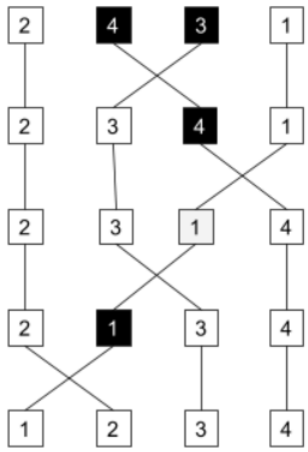
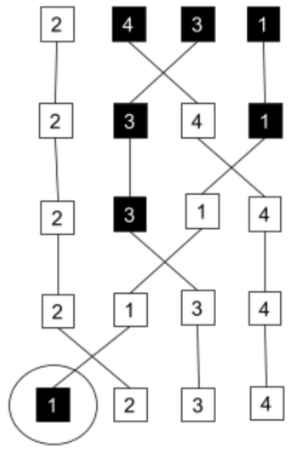
Si le nombre de cartes noires au départ est pair.
A l'arrivée, ces cartes devront être blanches. Nous avons vu précédemment que le nombre de retournements pour chacune de ces cartes est impair donc le nombre total de retournements pour ces cartes noires sera pair (impair × pair = pair).
Le nombre total de retournements des cartes blanches est pair.

Donc, dans tous les cas, le nombre total de retournements de cartes sera pair.

Deux cas :

- si le nombre de permutations pour résoudre ce problème est pair, alors le problème est résoluble (même parité).
- si le nombre de permutations pour résoudre ce problème est impair, alors le problème est insoluble (parités différentes).

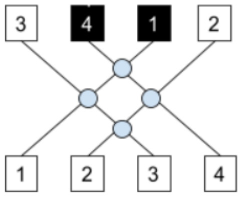
Exemples :

	
Nombre de croisements : 4 Nombre de cartes noires : 2 **Possible**	Nombre de croisements : 4 Nombre de cartes noires : 3 **Impossible**
	

Partie 4 : Résolution du problème initial (avec les couleurs).

<u>Méthode générale</u> :
1/ On détermine le nombre de coups en comptant le nombre de croisements.
2/ On détermine alors si le problème est soluble.
3/ On détermine le nombre de mouvements de chaque carte (permutations sans les couleurs)
4/ On détermine, pour chaque carte le nombre de retournements.
5/ Pour chaque coup, grâce aux 3/ et 4/, on détermine quelle carte sera retournée.

Exemple :



1/ on détermine le nombre de coups :

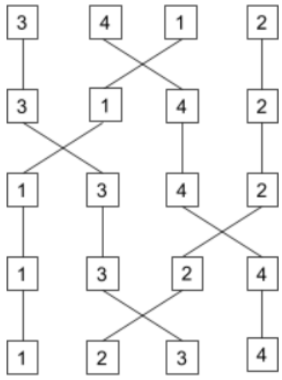
4 croisements donc 4 coups.

2/ Possible ou non ?

On a deux cartes noires dans cet exemple.
Le nombre de coups et le nombre de cartes noires ont la même parité, donc d'après le théorème 3, le problème pourra être résolu.

3/ On détermine le nombre de déplacements pour chaque carte :

On applique la méthode des extrémités.
Puis on compte les déplacements (récapitulés dans le tableau qui suit).



On en déduit le tableau suivant :

Carte	Déplacement(s)	Carte	Déplacement(s)	Carte	Déplacement(s)	Carte	Déplacement(s)
1	2	2	2	3	2	4	2

Remarque : La somme du nombre de déplacements est égale au double du nombre de coups. En effet, pour chaque permutation, on déplace deux cartes.

4/ On détermine pour chaque carte le nombre de retournements :

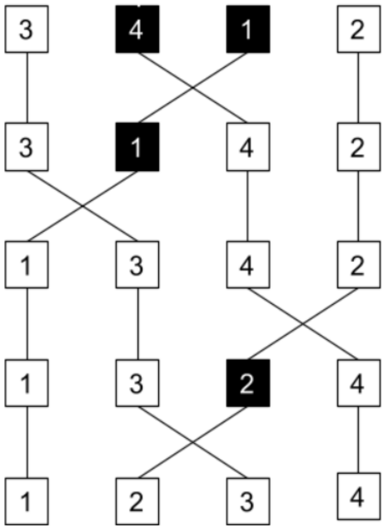
Carte	Couleur	Retournements (pair ou impair)	Déplacements	Nombre de retournements
1	N	Impair	2	1-3 Seule possibilité 1 (car 3>2)
2	B	Pair	2	0-2
3	B	Pair	2	0-2
4	N	Impair	2	1-3 Seule possibilité 1 (car 3>2)

Pour les cartes 1 et 4, qui sont noires, on obtient un nombre de retournement impair. Nous avions donc plusieurs possibilités : soit on les retourne 1 fois, soit 3 fois. Or, on voit que chaque carte n'est déplacée que deux fois pour arriver à la combinaison finale. Donc, la seule possibilité est de ne les retourner qu'une seule fois (7).

Pour les cartes 2 et 3, nous avons le choix.

On ne doit pas oublier que le nombre de retournements doit être égal au nombre de coups. Ici, il y a 4 coups donc il faut 4 retournements. 2 retournements sont “pris” par les cartes noires 1 et 4, il nous reste donc 2 retournements.
Nous avons le choix, soit on retourne deux fois le 2 et 3 n’aura aucun retournement, soit on retourne deux fois le 3 et le 2 n’aura aucun retournement.

Voici donc une solution (le 2 est retourné 2 fois)



Conclusion :

Je peux donc gagner à ce jeu à tous les coups :
Je laisse à mon adversaire le choix :

- Il décide de la combinaison des cartes
- Ou il décide du nombre de cartes noires.

S’il décide de la combinaison, je choisis le nombre de croisements. En fonction de sa parité, je déciderai du nombre de cartes noires (parité inverse).
S’il décide du nombre de cartes noires, je choisis une combinaison dont le nombre de croisements aura une parité inverse au nombre de cartes noires.

Remarque (suite à une question posée lors du congrès) :

Dans cet article, nous avons utilisé seulement 4 cartes pour les exemples.
Pour autant, nous aurions pu jouer avec plus ou moins de cartes.
En effet, nous supposons que l’algorithme que nous avons établi ne changera pas :

- Les croisements donnent le nombre de coups.
- La parité : dépend du nombre de cartes noires et du nombre de coups (pair ou impair)
- La méthode : méthode des extrémités (chaque coup supprimera un croisement), choix de la carte à retourner.

Notes d'édition

(1) Sur une carte, les nombres inscrits sur les deux faces sont les mêmes. Sur deux cartes distinctes les nombres sont différents.

(2) En effet, dans les deux cas aucun autre croisement que celui entre ces deux cartes n'est modifié.

(3) Plus précisément, il faudra au moins n coups, car on enlève au plus un croisement à chaque coup, et il faudra exactement n coups si on parvient à faire chaque fois un “coup gagnant”, c'est-à-dire à enlever un croisement : c'est bien ce qui est réalisé avec la méthode des extrémités (voir paragraphe 5/).

(4) Et, une fois les cartes 1 et 4 rangées, on permute les cartes 2 et 3 si elles présentent un croisement et on supprime bien un croisement jusqu'au dernier coup. Dans le cas d'un nombre N quelconque de cartes, en recommençant de même avec les cartes de 2 à $N-1$, puis de 3 à $N-2$,… on supprime encore un croisement à chaque coup.
Cela montre de plus que la suggestion en remarque à la fin du 1/ de la partie 2 est juste : on peut placer successivement la première carte par une série de permutations, puis la deuxième, la troisième, et ainsi de suite, chacune des permutations supprimant un croisement.

(5) En fait, ce nombre est la somme d'un nombre impair de nombres impairs donc il est impair, et de même dans le cas d'un nombre pair de cartes noires on a la somme d'un nombre pair de nombres impairs, qui est paire.

(6) Cela n'est pas prouvé. Pour que le problème soit résoluble il est nécessaire que le nombre de permutations et le nombre de retournements, donc de coups à faire, aient la même parité, mais il n'est pas évident que cette condition soit suffisante (voir note 7).
Même remarque pour le cas d'un nombre pair de cartes noires.

(7) On a imposé ici que les permutations réalisées sont exactement celles de la méthode des extrémités, ce qui est une contrainte supplémentaire : à chaque coup on se permet seulement de choisir la carte retournée, la permutation étant fixée. Pour l'exemple donné, on trouve bien des solutions mais ce n'est pas toujours possible, par exemple s'il y a plus de cartes noires que de croisements ou si une carte noire n'est jamais permutée quand on suit la méthode des extrémités.

En suivant la méthode des extrémités, on peut donc arriver à la situation où les cartes sont rangées dans l'ordre mais qu'il reste des cartes noires. On obtient seulement que, lorsqu'au départ le nombre de cartes noires a la même parité que le nombre de croisements, ces cartes noires restantes seront en nombre pair (à chaque coup le nombre de cartes noires et le nombre de croisements varient de ± 1 et ils restent donc de même parité).
On laisse au lecteur le soin de montrer qu'on peut alors résoudre le problème en ajoutant une série de permutations-retournements.