PAC-MAN fait le tour du monde sur les PAC-PLANÈTES

Année 2006 – 2007

Nicolas ALFAÏATE, Morgan BELFORT, Solenne TORTAY, élèves de Terminale S, Christophe CHARNEAU, élève de 1ère S, Kévin BOINÉ, Damien CHAUSSONET, Hamid EL KARBOUBI, AlexiaGAILLARD, Benjamin JANNOT, Gaëlle LABORDE, Julien PELETTE, élèves de 2nde.

Établissements : Lycée Condorcet (Bordeaux) et Lycée A. Kastler (Talence)

Chercheur Chercheuse : Pierre MOUNOUD, LaBAG (Université de Bordeaux 1).

Présentation du sujet :

Qu'est-ce que c'est une **Pac-planète** ?

Comment choisir sa direction pour faire le **tour du monde** ?

Quel est le **PPTM** (Plus Petit Tour du Monde) si la planète est carrée, rectangulaire, losange,parallélogramme?

(mais toujours d'une aire égale à 1)

On va essayer de trouver **un majorant pour tous les PPTM** !!!!!

avec les propositions, les idées, le soutien, les « lumières » de **Monsieur Pierre Mounoud.**

Plan

Définitions : « Pac-man, Pac-planète, déplacements de Pac-man, Tour du Monde »

Question 1 : quelle direction pour un Tour du Monde ?

Question 2 : sur une Pac-planète donnée, quel est le Plus Petit Tour du Monde ? (étude dans les divers cas de figures)

Question 3 : y a t'il un « plus grand » parmi tous les PPTM associés à toutes les Pac-planètes ?

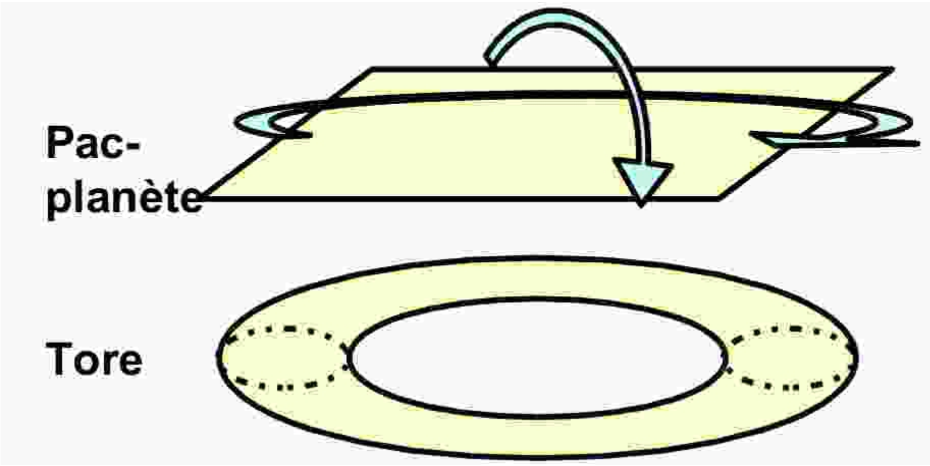
Y a t'il un majorant pour l'ensemble de tous les PPTM ?

Réseau, une découverte, les familles de disques, **la conjecture**

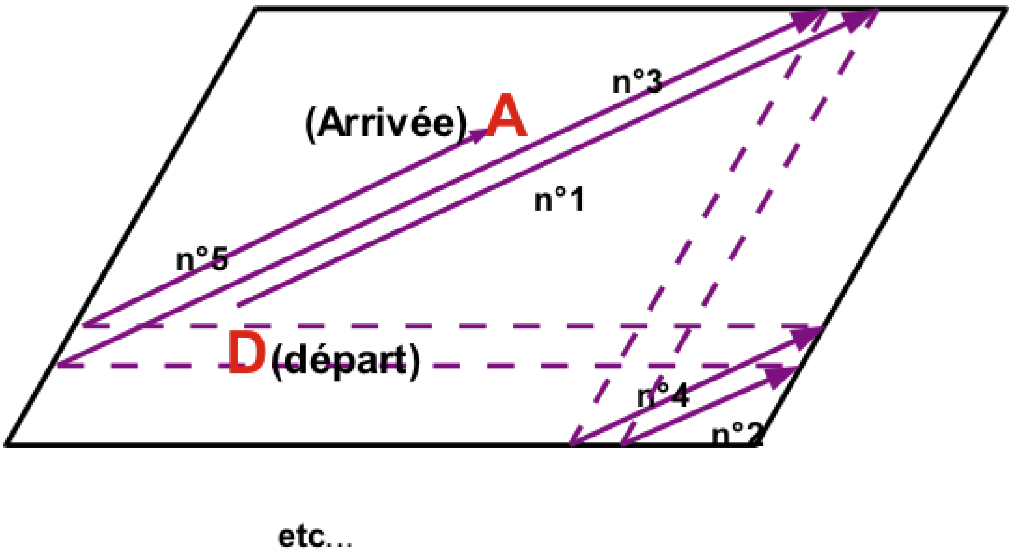
Définitions :

Une Pac-planète : c'est un objet mathématique fabriqué à partir d'un PARALLÉLOGRAMME en COLLANT deux côtés opposés, puis les deux autres.

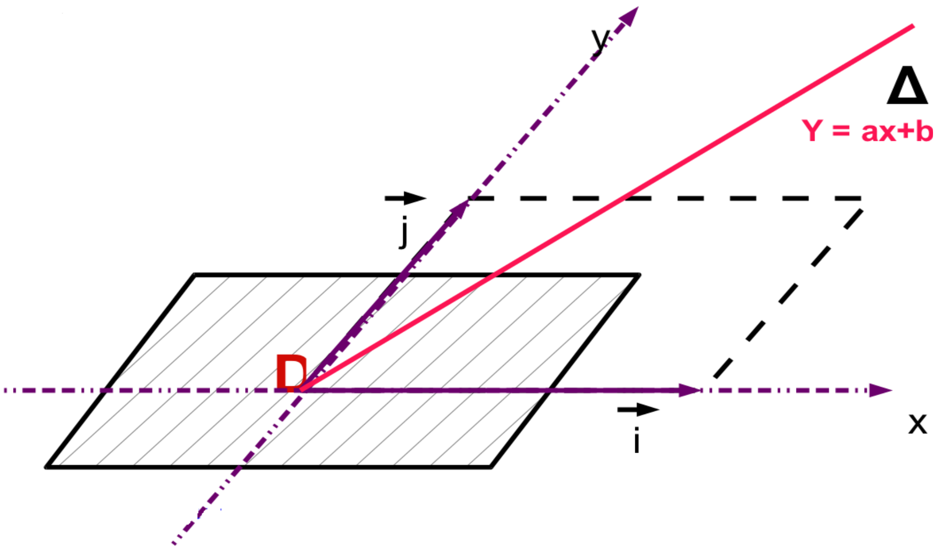
On l'appelle un TORE



Mode de déplacement de Pac-man : Il part d'un point D (départ), et s'arrête à un point A(arrivée), et se déplace EN LIGNE DROITE . Il aimerait faire un TOUR du MONDE, c'est-à-dire que A puisse être confondu avec D . (A = D) (1)



Question 1 : nous avons commencé par chercher **dans quelle direction** il devait partir pour être sûr de faire un TOUR du MONDE .

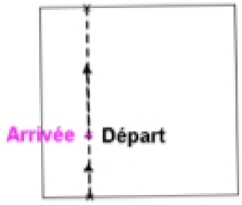


On a trouvé que : soit, il prend la direction du vecteur j , soit, il suit une droite « Δ », dont le coefficient directeur « a » est un NOMBRE RATIONNEL. (2)

Question 2 : pour une Pac-planète donnée, quel est le Plus Petit Tour du Monde ? On l'appelle PPTM .

On regarde des cas particuliers de Pac-planètes, puis les parallélogrammes non particuliers.

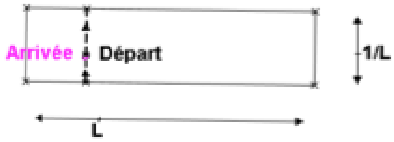
a) La Pac-planète carrée d'aire 1 :



Carré d'aire égale à 1 : le PPTM = 1 (longueur d'un côté)

Il est évident que PPTM = 1 , c'est la longueur d'un côté.

b) Pac-planètes rectangulaires d'aire 1 :

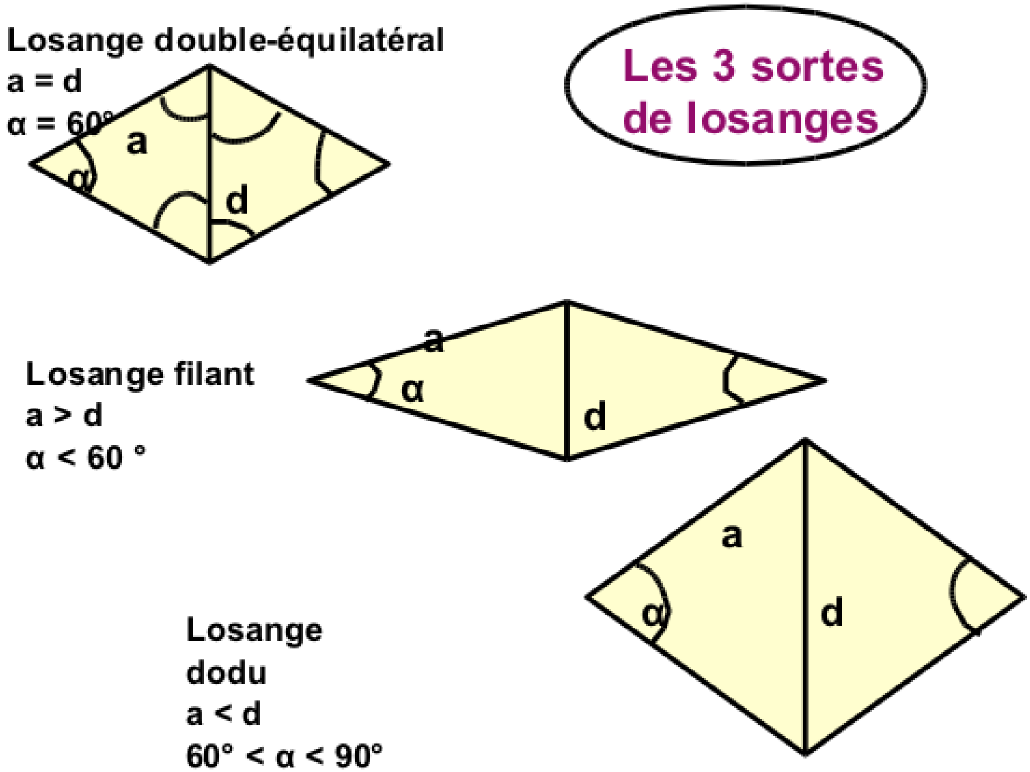


Rectangles d'aires égales à 1 : PPTM : 1/L (petit côté)donc PPTM<1

Il y en a une infinité(3), si L désigne le grand côté, le petit côté mesure 1/L , et il est clair que PPTM = 1/L

On remarque que dans tous ces cas : PPTM < 1

c) Pac-planètes losanges d'aire 1 :



On a distingué 3 sortes :

le losange « double-équilatéral »

les losanges « filants »

les losanges « dodus »

a est un côté , d est la petite diagonale.

-Le double-équilatéral : les angles aigus mesurent α = 60° et PPTM = $\sqrt{(2\sqrt{3})}$ = 1,13...

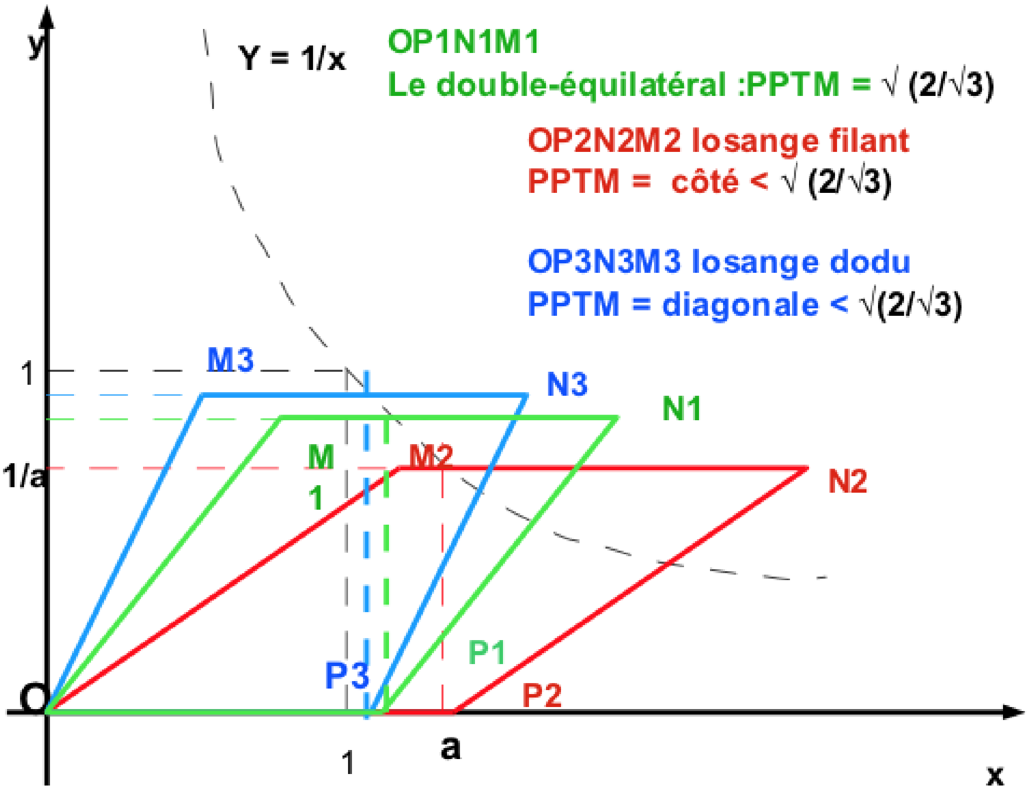
Pour démontrer cela, il suffit de dire combien vaut l'aire d'un triangle équilatéral quand le côté mesure x, puis chercher x pour que l'aire soit égale à 1/2 : l'aire = $(x^2\sqrt{3})/4=1/2$

-Les filants: les angles aigus vérifient 0° <α <60° et **PPTM=d, avec** $d<\sqrt{(2\sqrt{3})}$

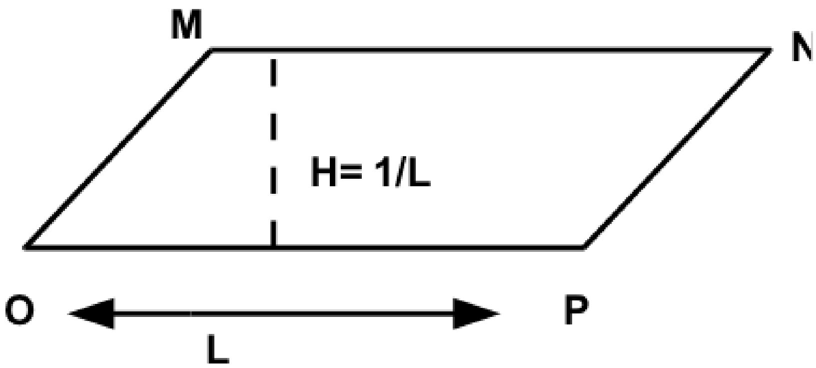
-Les dodus : les angles aigus vérifient 60°<α<90° et **PPTM=a, avec** $a<\sqrt{(2\sqrt{3})}$

Dans tous les cas de losanges, on a : PPTM $\leq\sqrt{(2\sqrt{3})}$

Les PPTM dans les Pac-planètes d'aire 1, cas des 3 sortes de losanges



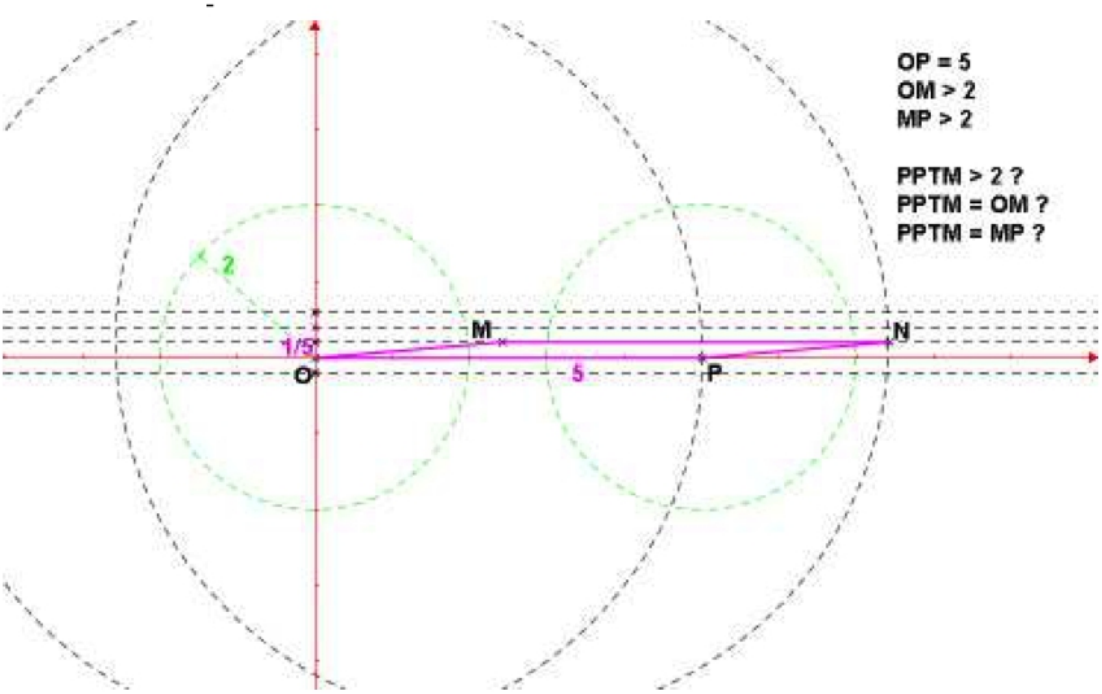
d) Pac-planètes , en parallélogrammes non particuliers d'aire 1



On décide d'appeler «L» le grand côté du parallélogramme OPNM : OP = MN = L ; alors la hauteur relative à L est : h = 1/L, car son aire est égale à L x h = 1

<u>Jusqu'ici les PPTM ont toujours été : ou bien, la petite diagonale , ou bien, le petit côté .</u>

<u>Ça va se compliquer!</u>



Voici un exemple où on voit que les deux côtés ET les deux diagonales du parallélogramme d'aire 1 , sont PLUS grands que 2 !

Dans un tel cas, **le PPTM serait-il PLUS GRAND que 2 ?**

Avec cette question commence la dernière partie de notre travail ! Voici rapidement les étapes de nos recherches qui nous ont amenés à émettre une conjecture qui dit que

QUAND on considère TOUTES les PAC-PLANETES, TOUS leurs PPTM sont inférieurs à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

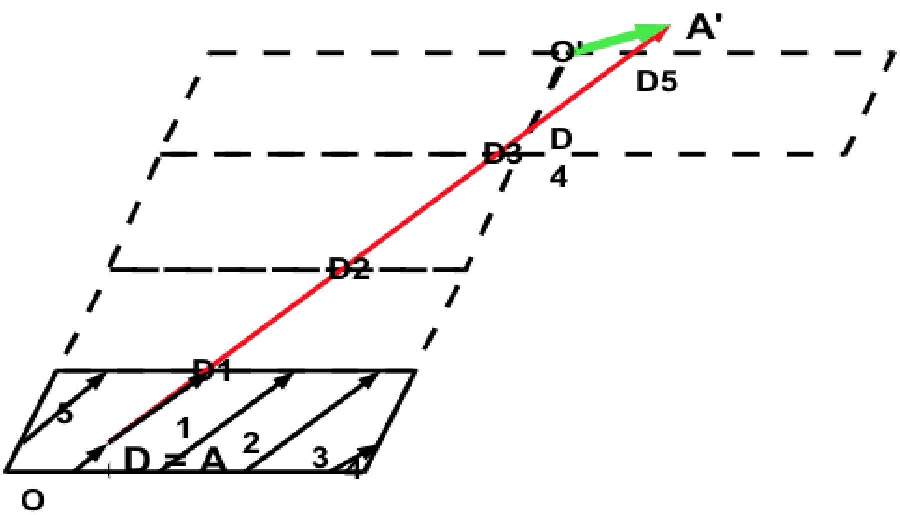
Question 3

La question est posée ainsi.

Y a-t ' il un majorant pour TOUS les PPTM ?

La réponse nous semble être : OUI !

Comment avons-nous procédé ? D'abord , nous avons créé un réseau où la planète parallélogramme occupe une «case» :



(4)

Soit une Pac-planète OPNM.

Pac-man part d'un point D en ligne droite et réalise un tour du monde , donc l'arrivée A = D.

On le voit découpé en plusieurs segments sur le parallélogramme .

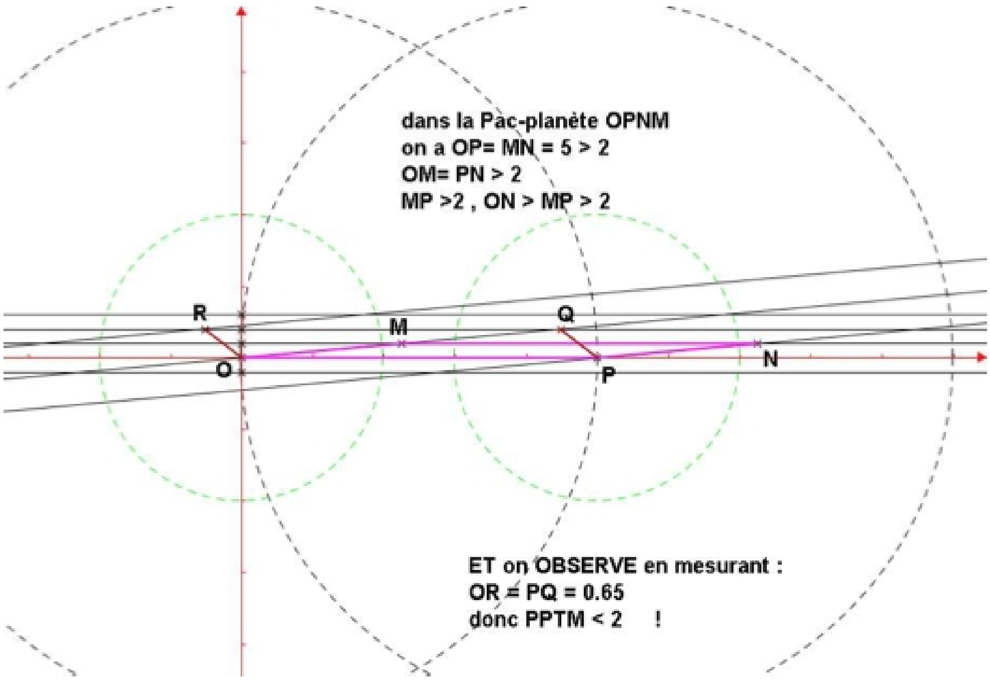
Mais on peut représenter ce trajet en mettant bout à bout tous les petits segments , et en juxtaposant des exemplaires de la planète autant qu'il est nécessaire . Puisqu'ils sont tous parallèles cela donne un alignement des points D, D_1 , D_2 , D_3 , ..., A' et donc un segment rectiligne [D A'] qui est exactement égal au tour du monde initial.

Pour faciliter encore plus , on remarque que O O' A' D est un parallélogramme et donc, que le trajet OO' est le même tour du monde que DA'.

ON DECIDE MAINTENANT de schématiser le problème en représentant la planète par un **réseau** et en prenant toujours un **sommet** du réseau comme **point de départ de Pac-man** .

Alors **<u>UN TOUR du MONDE ira toujours d'un sommet du réseau à un autre sommet du réseau</u>** .(5)

Reprenons le cas du parallélogramme où toutes les longueurs étaient plus grandes que 2 : (rappel: le rayon d'un cercle vert est égal à 2)



Grâce à son propre réseau, ON OBSERVE qu'il y a au moins **un Tour du Monde inférieur à 2** par exemple OR ou PQ qui sont visiblement, même, plus petits que 1 ...

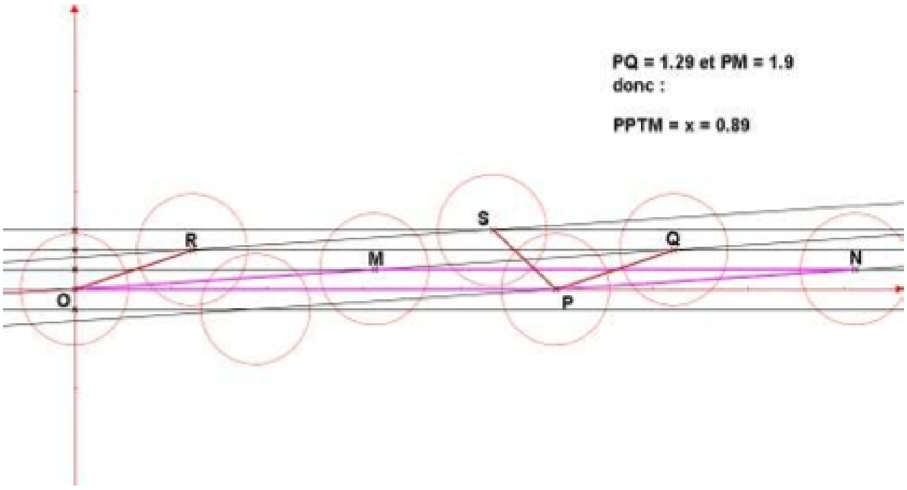
L'idée que tous les PPTM soient majorés devient intéressante, et crédible !

Là, le chercheur nous a apporté de l'aide en nous conseillant d'utiliser **des familles de disques** centrés en chaque point du réseau .

<u>Dernière étape : la recherche d'un majorant pour tous les PPTM</u> (et recherche **d'un plus grand des plus petits tours du monde ?**)

Soit OPNM un Pac-planète ; on appelle **x son PPTM**.

1) <u>On centre des disques</u> sur chaque sommet du réseau de cette planète. On choisit comme <u>RAYON des disques : x/2</u>



Les disques rouges ont une aire égale à 1, leur rayon est 1/√π

On en trouve qui se chevauchent doncP S < 2/√π

Le PPTM est majoré par 2/√π

Dans tous les cas qu'on a étudiés, on a eu la certitude que c'était obligatoire que certains disques se chevauchent. Ce qui entraîne que (x/2) < (1/√π) et donc x < 2/√π .En conséquence, il y avait toujours dans le réseau des sommets distants de moins de 2 / √π

Et les PPTM de ces planètes étaient tous inférieurs à 2 / √π. C'est pour cela que nous conjecturons que c'est toujours VRAI !

La conjecture :

2/√π est le majorant de tous les PPTM

Cela signifie que, dans tout réseau de parallélogrammes d'aire 1 ,

-- la plus petite distance entre 2 sommets est toujours inférieure à 2 / √ π

-- autrement dit : si on trace un cercle de rayon 2/√π centré en un sommet, il y a au moins un autre sommet à l'intérieur de ce cercle.

Notes d'éditions
(1) À noter que dans tout l'article, les déplacements sont étudiés sur le parallélogramme qui par « recollement des bords » est à la base de la construction de la Pac-planète.
(2) Il n'est pas trop difficile de montrer ce résultat ; dommage que nos chercheurs en herbe n'aient pas donné cette preuve. Mais le lecteur et la lectrice pourront pallier ce manque !
(3) Il y a une infinité de rectangles d'aire 1.
(4) Cette construction, qui consiste à « dupliquer » le parallélogramme pour visualiser les « droites » sur la Pac-planète est aussi pratique pour montrer les résultats précédents.
(5) Est-on sûr qu'alors on ne simplifie pas trop le problème ? Est-on sûr qu'en partant d'un sommet on fera le plus petit tour du monde possible sur cette planète ? À vérifier...