L'oncle d'Amérique

Année 2015-2016

Raphael PIOLA Raphael, élève au Lycée François Arago de Perpignan ; Bianca TURCU, Sanziana POPA, élèves au Collège National Bogdan Petriceicu Hasdeu de Buzau, Roumanie

Encadrés par : Marie DIUMENGE et Melania NICOLAE

Chercheurs : Robert BROUZET et Bogdan ENESCU

Le sujet.

Une lettre vous apprend que vous avez hérité, de la part d'un mystérieux oncle d'Amérique, de trois terrains. L'un d'entre eux est un triangle, les deux autres sont des quadrilatères (convexes). Vous ne connaissez par ce courrier que la longueur des côtés de chaque terrain mais n'avez pas de plan précis. La lettre stipule en outre que, dans la région où ils se trouvent, la surface minimale pour qu'un terrain soit constructible est de 1000 m². Les longueurs des côtés du triangle étant 125 m, 90 m et 40 m, celle du premier quadrilatère étant (en tournant) 35 m, 30 m, 20 m et 50 m et celle du deuxième quadrilatère étant (en tournant) 40 m, 20 m, 25 m et 50 m, examinez pour chacun d'eux si vous pouvez dire s'il est constructible ou pas.

On doit trouver l'aire de ces terrains et dire s'ils sont constructibles ou pas.

La formule de Héron que nous avons utilisée pour calculer l'aire d'un triangle ABC de côtés $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ est

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \text{ où } p = \frac{a+b+c}{2}\cdot$$

Démonstration.
Pour démontrer la formule de Héron nous avons utilisé la loi des cosinus : il s'agit, dans un triangle ABC, de la relation $\cos \mathrm{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, où C est l'angle au sommet C et a, b, c sont les longueurs des côtés.

Démonstration de la loi des cosinus.

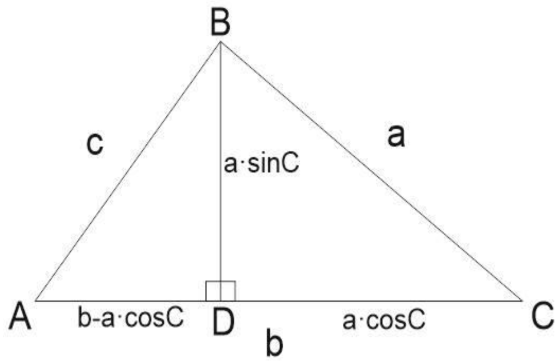
$c^2 = (a \sin \mathrm{C})^2 + (b - a\cos \mathrm{C})^2$

$c^2 = a^2 \sin^2 \mathrm{C} + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C} + a^2 \cos^2 \mathrm{C}$

$c^2 = a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



Maintenant nous pouvons démontrer la formule de Héron. L'aire du triangle ABC est

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}BD \cdot AC \\
&= \frac{1}{2}a\sin C \cdot b \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{(1-\cos C)(1+\cos C)} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+2ab+b^2-c^2)(-(a^2-2ab+b^2)+c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)}
\end{aligned}$$

Puis, en notant, a + b + c = 2p, on obtient

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2c)(2p-2a)(2p-2b)}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Le premier terrain.

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \dfrac{125 + 90 + 40}{2} = 127{,}5\, m$

$A = \sqrt{127{,}5(127{,}5 - 125)(127{,}5 - 90)(127{,}5 - 40)}$

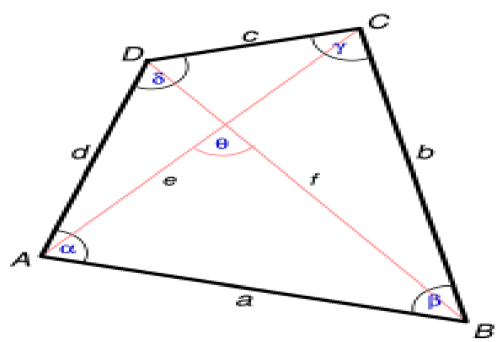
$= \sqrt{1045898{,}4375} > 1022{,}6\, m^2 \; > 1000\, m^2$

Donc le premier terrain est constructible.

Formule pour calculer la surface d'un quadrilatère convexe ABCD de côtés *a*, *b*, *c*, *d* et d'angles au sommets respectivement α, β, γ, δ **(*Formule de Bretschneider*) :**

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

où $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.



Démonstration.

$A_{ABCD} = A_{ADB} + A_{BDC}$

$A_{ABCD} = \dfrac{ad\,\sin\alpha}{2} + \dfrac{bc\,\sin\gamma}{2}$

$4A_{ABCD}^2 = (ad)^2 \cdot \sin^2\alpha + (bc)^2 \cdot \sin^2\gamma + 2abcd \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma$ (1)

Nous utilisons la loi des cosinus dans les triangles ADB, CDB :

$$\begin{cases} DB^2 = BA^2 + DA^2 - 2DA \cdot BA \cdot \cos\alpha \\ DB^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

Donc,

$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$

$\dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad \cdot \cos\alpha - bc \cdot \cos\gamma$

$\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4}=(ad)^2\cdot\cos^2\alpha+(bc)^2\cdot\cos^2\gamma-2abcd\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$ (2)

Nous avons rassemblé des relations (1) et (2) et nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}4A_{ABCD}^2+\frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}{4} &= (ad)^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(bc)^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)-\\ &\quad -2abcd(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\gamma)\\ &= (ad)^2+(bc)^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16A_{ABCD}^2 &= 4a^2d^2+4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-8abcd\cos(\alpha+\gamma)\\ &= 4a^2d^2+4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-8abcd\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)-1\right)\\ &= 4a^2d^2+4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+8abcd\\ &= (2ad+2bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\\ &= (2ad+2bc+b^2+c^2-a^2-d^2)(2ad+2bc-b^2-c^2+a^2+d^2)-\\ &\quad -16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\\ &= [(b+c)^2-(a-d)^2][(a+d)^2-(b-c)^2]-16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\\ &= (a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)\\ &\quad -16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\end{aligned}$$

Nous avons noté $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ et nous avons obtenu

$$16A_{ABCD}^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

et donc

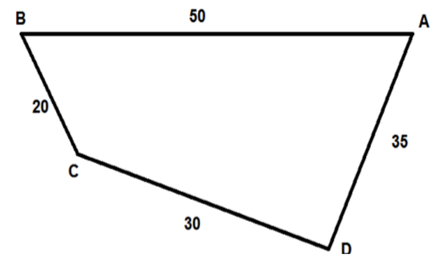
$$A_{ABCD}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}.$$

Pour démontrer la formule de Bretschneider, nous avons utilisé les théorèmes suivants : pour tous réels x et y ont lieu les égalités

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\sin^2x+\cos^2x=1$$
$$\cos 2x=2\cos^2x-1$$

Le deuxième terrain.

1. $s = \frac{35+30+20+50}{2} = 67{,}5\ m$



$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$A = \sqrt{32{,}5 \cdot 37{,}5 \cdot 47{,}5 \cdot 17{,}5 - 20 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 50 \cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\ m^2$$

$$A = \sqrt{1013085{,}9375 - 1050000 \cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\ m^2$$

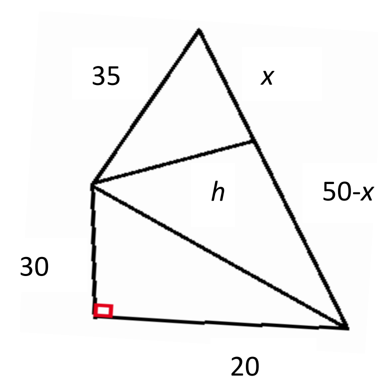
Si $\alpha + \gamma = 180°$, on a $cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0$ et nous obtenons une surface maximale. Alors

$$A > \sqrt{1013085}\, m^2 > \sqrt{1000000}\, m^2$$

$$A > 1000 m^2$$

Dans ce cas, le terrain est constructible.

2. Nous avons pensé à prendre un cas particulier, à savoir quand les côtés avec des longueurs de 30 m et 20 m sont perpendiculaires.



Nous avons appliqué trois fois le théorème de Pythagore et nous avons obtenu :

$$\begin{cases} h^2 = 35^2 - x^2 \\ h^2 = (30^2+20^2) - (50-x)^2 \end{cases}$$

d'où

$$1225 - x^2 = 1300 - 2500 + 100\,x - x^2$$

$$100\,x = 1225 + 2500 - 1300$$

$x = 24{,}25\ m$

$h^2 = 1225 - x^2 \approx 636{,}93$

$h \approx 25{,}2376\ m < 25{,}24\ m$

$A_2 = \frac{h \cdot 50}{2} \Rightarrow A_2 < 631\ m^2$

$A_1 = \frac{30 \cdot 20}{2} = 300\ m^2$

$A = A_1 + A_2 < 300\ m^2 + 631\ m^2 = 931\ m^2 < 1000\ m^2$

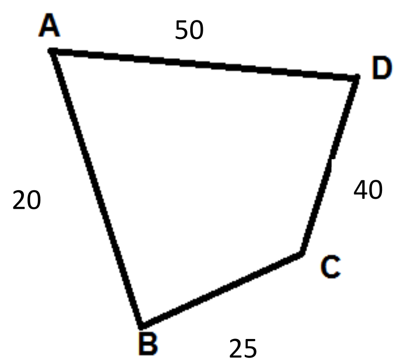
Ainsi, le deuxième terrain peut être constructible ou non selon la valeur des angles.

Le troisième terrain.

$s = \frac{50+25+20+40}{2}$

$s = 67{,}5\ m$

Si $\alpha + \gamma$=180°, $cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0$ et nous obtenons une surface maximale.



$A = \sqrt{17{,}5 \cdot 27{,}5 \cdot 42{,}5 \cdot 47{,}5}\ \ m^2$

$A = \sqrt{971523{,}4375}\ \ m^2 < \sqrt{1000000}\ \ m^2$

$A < 1000\ m^2$

Donc le terrain n'est pas constructible, quels que soient les angles.