Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

ON VOUS A GRILLÉS !

Année 2013-2014

Lila BAUDE, Léane GRILLOT, Marie MEUNIER-THAENS, élèves de 4°
Maëlys DIJOUX et Thérèse NALIN, élèves de 3°

Encadrés par : Mme **ROUGERIE**

Etablissement : collège Etienne Dolet à Orléans

Chercheur : M. **CEPA** de l'université d'Orléans

Présentation du sujet : voici notre tour de « mathémagie » !

Pensez à un nombre de 1 à 100.

Observez attentivement chacune de ces grilles et indiquez-nous :
- si votre nombre y figure
- si oui, de quelle couleur est la case où il est inscrit.

Nous pouvons deviner votre nombre !!!

1	2	4	5	7	8	10	11	13	14
16	17	19	20	22	23	25	26	28	29
31	32	34	35	37	38	40	41	43	44
46	47	49	50	52	53	55	56	58	59
61	62	64	65	67	68	70	71	73	74
76	77	79	80	82	83	85	86	88	89
91	92	94	95	97	98	100			

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100					

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80						

3	4	5	6	7	8	12	13	14	15
16	17	21	22	23	24	25	26	30	31
32	33	34	35	39	40	41	42	43	44
48	49	50	51	52	53	57	58	59	60
61	62	66	67	68	69	70	71	75	76
77	78	79	80	84	85	86	87	88	89
93	94	95	96	97	98				

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nous avons beaucoup travaillé, au cours de cette année scolaire, pour créer notre propre tour.
Voici les grandes lignes de nos recherches, effectuées dans le cadre d'un atelier MATHSenJEANS.

<u>1. Un premier tour.</u>

M. Cepa, enseignant-chercheur de l'Université d'Orléans, et Mme Rougerie, professeur de mathématiques, nous ont présenté, en septembre, un tour de magie :

Voici un tour de mathémagie amusant pour épater vos amis.

Le tour est très simple : vous allez devoir deviner un nombre entier.

Demandez à un spectateur de penser à un nombre entier entre 1 et 100, sans vous donner la valeur de ce nombre.

Présentez à cette personne, successivement, les cartes en lui demandant de vous indiquer celles où figure le nombre.

Et annoncez à haute voix le nombre auquel il a pensé !!!

16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58
59	60	61	62	63	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92
93	94	95						

1	3	5	7	9	11	13	15	17
19	21	23	25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47	49	51	53
55	57	59	61	63	65	67	69	71
73	75	77	79	81	83	85	87	89
91	93	95	97	99				

4	5	6	7	12	13	14	15	20
21	22	23	28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47	52	53	54
55	60	61	62	63	68	69	70	71
76	77	78	79	84	85	86	87	92
93	94	95	100					

32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58
59	60	61	62	63	96	97	98	99
100								

2	3	6	7	10	11	14	15	18
19	22	23	26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47	50	51	54
55	58	59	62	63	66	67	70	71
74	75	78	79	82	83	86	87	90
91	94	95	98	99				

8	9	10	11	12	13	14	15	24
25	26	27	28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47	56	57	58
59	60	61	62	63	72	73	74	75
76	77	78	79	88	89	90	91	92
93	94	95						

64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99
100								

Après avoir repéré la forme particulière des premiers nombres de chaque grille, des puissances de 2, nous avons montré que tous les nombres pouvaient se décomposer en somme de puissances de 2 toutes différentes.
Nous avons ainsi appris à compter *en base 2*...(1)
En annexe 1, nous avons dressé un tableau donnant la décomposition en base 2 de tous les nombres entiers de 1 à 100.

Voici notre méthode de décomposition systématique d'un nombre en base 2 :

Pour le nombre « 95 »

- *95 est compris entre deux puissances de 2 consécutives : $64 \leq 95 < 128$*
  - ❑ *128 est trop grand : il ne sera pas dans la décomposition de « 95 » en base 2.*
  - ❑ *64 est forcément dans la décomposition binaire de « 95 » ; en effet :*

    $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ et $63 < 95$

  Même en additionnant TOUTES les puissances de 2 inférieures à 64, on obtiendrait au maximum 63.

  95 = 64 + ...

- *On calcule : $95 – 64 = 31$*

- *31 est compris entre deux puissances de 2 consécutives : $16 \leq 31 < 32$*
  - ❑ *32 est trop grand ; il ne sera pas dans la décomposition en base 2 de « 31 » ni dans celle de « 95 » ; en effet : $64 + 32 > 95$*
  - ❑ *16 est forcément dans la décomposition binaire de « 31 » et de « 95 » car :*

    $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

    $15 < 16 \leq 31$ et $64 + 15 < \underbrace{64 + 31}_{95}$

  95 = 64 + 16 + ...

- *On calcule : $95 - 64 - 16 = 31 – 16 = 15$*

- *15 est compris entre deux puissances de 2 consécutives : $8 \leq 15 < 16$*
  - ❑ *16 est trop grand*
  - ❑ *8 est dans la décomposition binaire de « 95 » : $1 + 2 + 4 = 7$*

    $7 < 8 \leq 15$ et $64 + 16 + 7 < \underbrace{64 + 16 + 15}_{95}$

  95 = 64 + 16 + 8 + ...

- *On calcule : $95 - 64 - 16 – 8 = 15 – 8 = 7$*
  - *$4 \leq 7 < 8$*
  - *4 est dans la décomposition binaire de « 95 ».*

95 = 64 + 16 + 8 + 4 + …

- *On calcule : 95 - 64 – 16 – 8 – 4 = 7 - 4 = 3*
    - □ *2 □3 < 4*
    - □ *2 est dans la décomposition binaire de « 95 ».*

95 = 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + …

- *On calcule : 95 - 64 – 16 – 8 – 4 – 2 = 3 - 2 = 1*
    - □ *1 □1 < 2*
    - □ *1 est dans la décomposition binaire de « 95 ».*

Finalement : 95 = 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

Pour construire les grilles, on écrit juste le nombre dans les grilles qui commencent par une puissance de 2 qui entre dans sa décomposition en base 2. Ainsi, 95 se trouve dans les grilles commençant par 64, 16, 8, 4, 2 et 1.

Nous avons remarqué qu'avec ces mêmes grilles nous pouvions « compter » jusqu'à 127 et qu'il était possible de faire le tour avec des nombres plus grands en rajoutant une ou plusieurs grilles.

Nous avons aussi observé que nous pouvions nous passer de la dernière grille (celle de 64) en posant une question supplémentaire au spectateur :

« votre nombre est-il supérieur ou égal à 64 ? ».

Si le spectateur répond « oui », il suffit d'ajouter 64 à la somme déjà obtenue grâce aux autres grilles.

2. D'autres grilles ?

Un autre groupe de l'atelier travaillait avec les nombres de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34…(2)
Nous avons essayé de construire des grilles avec ces nombres.

Pari réussi ! Ces grilles figurent en annexe 2.

Au départ, nous pensions pourtant que cela ne serait pas possible car un même nombre pouvait se décomposer de plusieurs façons différentes ; par exemple : 4 = 2 + 2 ; 4 = 3 + 1 ou encore 11 = 5 + 3 + 2 + 1 = 8 + 3

Nous avons trouvé une façon de décomposer n'importe quel nombre de 1 à 100 en somme de nombres de Fibonacci de telle sorte que cette décomposition soit unique.

Nous avons imposé de toujours choisir le plus grand nombre de la suite des nombres de Fibonacci au fur et à mesure de la décomposition d'un nombre.
Ainsi, pour les deux nombres choisis en exemple : 4 = 3 + 1 et 11 = 8 + 3.

Nous n'avons pas su expliquer pourquoi notre méthode marchait.(3)

Enfin, nous nous sommes demandées s'il était possible de construire des grilles avec les puissances de 3.

3. Des grilles en base 3 : NOTRE tour !

Nous avons très vite rencontré un gros problème : « comment écrire 2 ? 5 ? 7 ? » avec les puissances de 3 sur le modèle des décompositions en base 2.

Il nous faut utiliser plusieurs fois la même puissance :
2 = 1 + 1 ; 5 = 3 + 1 + 1 ; 7 = 3 + 3 + 1.   Et pourquoi pas : 7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 ? (4)

Voilà qui pose problème pour construire les grilles : on ne peut pas écrire un nombre deux fois dans la même grille ! Et, comme nous l'avons déjà vu avec les autres grilles, il faut être sûr que la décomposition choisie est unique.

Nous avons alors choisi de nous concentrer sur la décomposition de chaque nombre.
Si, en base 2, il faut 2 chiffres, en base 3, il en faut maintenant 3 : 0, 1 et 2.

Nous avons commencé à écrire les décompositions de plusieurs nombres.
Comme nous sommes des filles soucieuses de la présentation de notre travail nous avons utilisé des couleurs différentes…
7 = 3 + 3 + 1 = 3 × 2 + 1 × 1   5 = 3 + 1 + 1 = 3 × 1 + 1 × 2   40 = 27 + 9 + 3 + 1 = 27 × 1+ 9 × 1 + 3 × 1 + 1 × 1

Eurêka !!! Voilà comment construire les grilles :

- *nous écrivons en noir les nombres dans la grille d'une puissance de 3 qui apparaît 1 fois dans leur décomposition ;*
- *nous écrivons en rouge les nombres dans la grille d'une puissance de 3 qui apparaît 2 fois dans leur décomposition.*

Par exemple : 7 se trouve en rouge dans la grille commençant par 3 et en noir dans la grille commençant par 1.

Nous avons ensuite dressé un tableau donnant la décomposition en base de 3 pour pouvoir construire les grilles.

Ce tableau se trouve en annexe 3.

Conclusion :

En travaillant sur ce sujet, nous sommes allées au congrès de Lille puis nous sommes allées à Paris, au salon des jeux mathématiques où nous avons reçu une mention spéciale au prix André Parent 2014 : c'était vraiment super !

Annexe 1 : décomposition en base 2 des nombres de 1 à 100

	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	0	1	0	1	0
11	0	0	0	1	0	1	1
12	0	0	0	1	1	0	0
13	0	0	0	1	1	0	1
14	0	0	0	1	1	1	0
15	0	0	0	1	1	1	1
16	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	1	0	0	0	1
18	0	0	1	0	0	1	0
19	0	0	1	0	0	1	1
20	0	0	1	0	1	0	0
21	0	0	1	0	1	0	1
22	0	0	1	0	1	1	0
23	0	0	1	0	1	1	1
24	0	0	1	1	0	0	0
25	0	0	1	1	0	0	1
26	0	0	1	1	0	1	0
27	0	0	1	1	0	1	1
28	0	0	1	1	1	0	0
29	0	0	1	1	1	0	1
30	0	0	1	1	1	1	0
31	0	0	1	1	1	1	1
32	0	1	0	0	0	0	0
33	0	1	0	0	0	0	1
34	0	1	0	0	0	1	0
35	0	1	0	0	0	1	1
36	0	1	0	0	1	0	0
37	0	1	0	0	1	0	1
38	0	1	0	0	1	1	0
39	0	1	0	0	1	1	1
40	0	1	0	1	0	0	0
41	0	1	0	1	0	0	1
42	0	1	0	1	0	1	0
43	0	1	0	1	0	1	1
44	0	1	0	1	1	0	0
45	0	1	0	1	1	0	1
46	0	1	0	1	1	1	0
47	0	1	0	1	1	1	1
48	0	1	1	0	0	0	0
49	0	1	1	0	0	0	1
50	0	1	1	0	0	1	0

	64	32	16	8	4	2	1
51	0	1	1	0	0	1	1
52	0	1	1	0	1	0	0
53	0	1	1	0	1	0	1
54	0	1	1	0	1	1	0
55	0	1	1	0	1	1	1
56	0	1	1	1	0	0	0
57	0	1	1	1	0	0	1
58	0	1	1	1	0	1	0
59	0	1	1	1	0	1	1
60	0	1	1	1	1	0	0
61	0	1	1	1	1	0	1
62	0	1	1	1	1	1	0
63	0	1	1	1	1	1	1
64	1	0	0	0	0	0	0
65	1	0	0	0	0	0	1
66	1	0	0	0	0	1	0
67	1	0	0	0	0	1	1
68	1	0	0	0	1	0	0
69	1	0	0	0	1	0	1
70	1	0	0	0	1	1	0
71	1	0	0	0	1	1	1
72	1	0	0	1	0	0	0
73	1	0	0	1	0	0	1
74	1	0	0	1	0	1	0
75	1	0	0	1	0	1	1
76	1	0	0	1	1	0	0
77	1	0	0	1	1	0	1
78	1	0	0	1	1	1	0
79	1	0	0	1	1	1	1
80	1	0	1	0	0	0	0
81	1	0	1	0	0	0	1
82	1	0	1	0	0	1	0
83	1	0	1	0	0	1	1
84	1	0	1	0	1	0	0
85	1	0	1	0	1	0	1
86	1	0	1	0	1	1	0
87	1	0	1	0	1	1	1
88	1	0	1	1	0	0	0
89	1	0	1	1	0	0	1
90	1	0	1	1	0	1	0
91	1	0	1	1	0	1	1
92	1	0	1	1	1	0	0
93	1	0	1	1	1	0	1
94	1	0	1	1	1	1	0
95	1	0	1	1	1	1	1
96	1	1	0	0	0	0	0
97	1	1	0	0	0	0	1
98	1	1	0	0	0	1	0
99	1	1	0	0	0	1	1
100	1	1	0	0	1	0	0

Annexe 2 : les grilles de Fibonacci

1	4	6	9	12	14	17	19	22	25
27	30	33	35	38	40	43	46	48	51
53	56	59	61	64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93	95	98		

2	7	10	15	20	23	28	31	36	41
44	49	54	57	62	65	70	75	78	83
86	91	96	99						

5	6	7	18	19	20	26	27	28	39
40	41	52	53	54	60	61	62	73	74
75	81	82	83	94	95	96			

13	14	15	16	17	18	19	20	47	48
49	50	51	52	53	54	68	69	70	71
72	73	74	75						

55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88						

34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54									

3	4	11	12	16	17	24	25	32	33
37	38	45	46	50	51	58	59	66	67
71	72	79	80	87	88	92	93	100	

8	9	10	11	12	29	30	31	32	33
42	43	44	45	46	63	64	65	66	67
84	85	86	87	88	97	98	99	100	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	76	77	78	79	80	81	82
83	84	85	86	87	88				

89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100								

Exemple :
Le nombre 42 se décompose, d'après ce tableau, sous la forme : $42 = 27 + 9 + 2 \times 3$
Donc :

- 42 se trouve, en noir, dans la grille commençant par 27 et celle commençant par 9.
- 42 ne se trouve pas dans les grilles commençant par 81 et 1.

Annexe 3 : décomposition en base 3 des nombres de 1 à 100

42 se trouve en rouge dans la grille de 3.

	81	27	9	3	1
1					1
2					2
3				1	0
4				1	1
5				1	2
6				2	0
7				2	1
8				2	2
9			1	0	0
10			1	0	1
11			1	0	2
12			1	1	0
13			1	1	1
14			1	1	2
15			1	2	0

	81	27	9	3	1
16			1	2	1
17			1	2	2
18			2	0	0
19			2	0	1
20			2	0	2
21			2	1	0
22			2	1	1
23			2	1	2
24			2	2	0
25			2	2	1
26			2	2	2
27		1	0	0	0
28		1	0	0	1
29		1	0	0	2
30		1	0	1	0

	81	27	9	3	1
31		1	0	1	1
32		1	0	1	2
33		1	0	2	0
34		1	0	2	1
35		1	0	2	2
36		1	1	0	0
37		1	1	0	1
38		1	1	0	2
39		1	1	1	0
40		1	1	1	1
41		1	1	1	2
42		1	1	2	0
43		1	1	2	1
44		1	1	2	2
45		1	2	0	0

	81	27	9	3	1
46		1	2	0	1
47		1	2	0	2
48		1	2	1	0
49		1	2	1	1
50		1	2	1	2
51		1	2	2	0
52		1	2	2	1
53		1	2	2	2
54		2	0	0	0
55		2	0	0	1
56		2	0	0	2
57		2	0	1	0
58		2	0	1	1
59		2	0	1	2
60		2	0	2	0

	81	27	9	3	1
61		2	0	2	1
62		2	0	2	2
63		2	1	0	0
64		2	1	0	1
65		2	1	0	2
66		2	1	1	0
67		2	1	1	1
68		2	1	1	2
69		2	1	2	0
70		2	1	2	1
71		2	1	2	2
72		2	2	0	0
73		2	2	0	1
74		2	2	0	2
75		2	2	1	0

	81	27	9	3	1
76		2	2	1	1
77		2	2	1	2
78		2	2	2	0
79		2	2	2	1
80		2	2	2	2
81	1	0	0	0	0
82	1	0	0	0	1
83	1	0	0	0	2
84	1	0	0	1	0
85	1	0	0	1	1
86	1	0	0	1	2
87	1	0	0	2	0
88	1	0	0	2	1
89	1	0	0	2	2
90	1	0	1	0	0

Annexe 3 : décomposition en base 3 des nombres de 1 à 100 (suite et fin)

	81	27	9	3	1
91	1	0	1	0	1
92	1	0	1	0	2

	81	27	9	3	1
95	1	0	1	1	2
96	1	0	1	2	0

	81	27	9	3	1
99	1	0	2	0	0
100	1	0	2	0	1

Notes d'éditions

(1) On peut en effet prouver que tout nombre entier possède une unique décomposition en base 2. La méthode qui suit, à défaut le montrer pour tous les entiers, permet bien d'obtenir de telles décompositions. En revanche, on ne voit pas très bien à quel endroit on compte en base 2...

(2) Il aurait été intéressant de préciser comment et pourquoi cette belle idée s'est imposée ...

(3) La lectrice (ou le lecteur) intéressée pourra se pencher sur le théorème de Zeckendorf.

(4)En observant la méthode exposée pour la décomposition en base 2, on s'attend plutôt à 7=3+3+1 qu'à 7=3+1+1+1+1...
Dès lors, le mathémagicien doit savoir, en regardant chaque grille, combien de fois la puissance de 3 figurant sur la première case apparaît dans la décomposition du nombre cherché (ce qui est donné par le choix des couleurs)